Équations du premier degré.

I Généralités sur les équations.

Une *équation* est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des *variables*) qui représentent des nombres (expression littérale).

Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie. C'est pourquoi pour résoudre une équation nous donnerons *l'ensemble des solutions*.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations.

Nous apprendrons certaines de ces méthodes.

Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

II Des outils de résolution algébrique d'équations.

1 Équation et opérations : compatibilité.

Proposition 1

Soient a, b et c des nombres.

(i) $a = b$ si et seulement si $a + c = b + c$,

(ii) $a = b$ si et seulement si $a - c = b - c$,

(iii) Si c est inversible alors : $a = b$ si et seulement si $a \times c = b \times c$,

(iv) Si c est inversible alors : $a = b$ si et seulement si $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Remarques.

1. Le signe égale peut avoir des sens différents : annonce d'une notation, annonce du résultat d'un calcul (primaire et collège), équation (collège et lycée). L'égalité dans une équation peut être vue comme un équilibre dans une balance Roberval.

   Lorsque nous aurons plusieurs variables l'égalité signifiera un lien entre ces variables. Les physiciens et ingénieurs parleraient de contraintes.

2. Finalement nous retiendrons les règles suivantes.

   ♥ Nous ne modifions pas l'ensemble des solutions d'une équation

- en additionnant ou soustrayant n'importe quel nombre simultanément dans les deux membres de l'égalité,
- en multipliant ou en divisant par n'importe quel nombre non nul simultanément dans les deux membres de l'égalité.

Remarques.

1. La phase de synthèse est indispensable pour prendre en compte des valeurs interdites pour les solutions : valeurs interdites à cause de formules de calcul (cf infra) ou des contraintes contextuelles (par exemple le fait qu'une longueur est positive).

III Algorithme de résolution algébrique des équations du premier degré.

1 Reconnaître une équation du premier degré.

Définition 1

Une *équation du premier degré* (ou équation polynomiale de degré 1) est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$ax + b = 0$$

avec a et b des nombres fixés et x un nombre variable.

Remarques.

1. Dans la pratique il faudra être capable de reconnaître diverses présentations d'équations linéaires mais aussi savoir reconnaître les équations qui ne sont pas linéaires (cf infra en exemples).

Exercice 1.

Identifier les équations du premier degré parmi les suivantes.

a) $x + 2 - x^2 = 2x$.

b) $3x - \sqrt{7} = 4x$

c) $7(x - 7) = 7^2$.

d) $2x - 3 = 6 - 6x$.

e) $3\sqrt{x}^{2} = 27$.

f) $2x \times 3 + 4 = 13 + x$.

g) $3x + 4 = -7$.

h) $\dfrac{3x + 1}{3 \times 5} = \frac{4}{3}$.

i) $0 = 2x + 3$.

2 Identifier les termes en x et les regrouper.

Une équation linéaire est une somme de termes qui sont soit de la forme ax soit de la forme b.

Pour résoudre une équation linéaire nous rassemblerons tous les termes de la forme ax dans un même membre de l'égalité.

3 Isoler le x.

Une fois les deux précédentes étapes terminées (identifier une équation linéaire puis regrouper tous les termes de la forme ax d'un côté), nous allons isoler le x en déconstruisant le calcul.

4 Exercice.

Exercice 2.

Résolvez les équations du premier degré suivantes d'inconnue x :

1. $x + 4 = 7$
2. $3x = 12$
3. $-3x + 4 = 13$
4. $-3x + 4 = 14x - 7$

Exercice 3.

Résolvez les équations du premier degré suivantes d'inconnue x :

a) $2x - 3 = 5$,

b) $x + 4 = 5x - 2$,

c) $3(x + 1) = 5x - 1$,

d) $-2(4 - x) + 1 = 2$,

e) $\frac{2}{3}x = 4$,

f) $-3x = 4$,

g) $-6x = \frac{2}{3}$,

h) $-\frac{t}{3} = 2$,

i) $2(3x - 1) - 5 = x + 1$,

j) $-3x + 4 = 2\left(x + \frac{2}{5}\right)$,

k) $3(x - 2) - 1 = -2(x + 4)$,

l) $2(4 - 3x) = -(x + 5)$,

m) $2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x - \frac{1}{3}$,

n) $\frac{x-5}{7} = -3$,

o) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$,

p) $\frac{x-3}{2} = 2x + 1$.

Exercice 4.

Identifiez puis résolvez les équations linéaires parmi les équations d'inconnue x suivantes :

a) $x^2 = 3x - 1$

b) $-4x + 2 = 10$

c) $\sqrt{x} + 1 = 3$

d) $9x - 1 = 2x - 15$

e) $\frac{1}{x} + 3 = 1$

f) $\frac{1}{3} = \frac{3x}{6} - 7$

g) $5x - 7 - x = 4x$

h) $\sqrt{7}x - 2 = -\pi$

5 Équation produit-nul.

Théorème 1

Soient a et b deux quelconques nombres réels.

$ab = 0$ équivaut à dire que $a = 0$ ou $b = 0$.

Remarques.

1. On peut formuler ce résultat de la façon suivante : pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit que l'un des facteur (au moins) soit nul.
2. Ce résultat se généralise à un produit de plus de deux facteurs.
3. Cette proposition nous permettra à partir d'une équation complexe d'en obtenir plusieurs plus simples.
4. Dire que : $\frac{a}{b} = 0$ équivaut à dire que $a \times \frac{1}{b} = 0$, ce qui équivaut encore à : $a = 0$ et $b \neq 0$.

$$\heartsuit \quad \frac{a}{b} = 0 \text{ si et seulement si } a = 0 \text{ et } b \neq 0.$$

Exercice 5.

Résolvez l'équation d'inconnue x : $(-3x + 7)(4x - 6) = 0$

Exercice 6.

Résolvez l'équation d'inconnue x : $\dfrac{(x-3)(x+4)(x+4)}{(x+2)(x+4)(x-1)} = 0.$

Exercice 7.

Résolvez l'équation d'inconnue x :

$$\frac{3x+2}{7x-1} = 2.$$

IV Exercices.

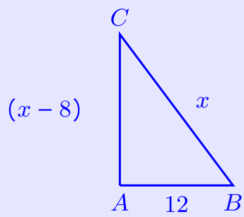
Exercice 8.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{3}x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculez l'image de $\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Déterminez les antécédents de -7 par la fonction f.

Exercice 9.

Trouver x pour que le triangle ABC soit rectangle en A.



Exercice 10.

Déterminez l'ensemble des valeurs interdites pour le calcul défini pour x réel par

$$\frac{\sqrt{x}}{2x-3}$$

Exercice 11.

Résolvez l'équation

$$\frac{2x-4}{x} = 3$$

Exercice 12.

Dans une assemblée, quarante personnes ont plus de 40 ans, un quart a entre 30 et 40 ans et un tiers a moins de 30 ans. Quel est le nombre de personnes de cette assemblée ?

Exercice 13.

Deux trains partent à 4 h du matin, l'un de la ville A vers la ville B, et l'autre de la ville B située à 315 km de A en direction de la ville A. À quelle heure se fera la rencontre, sachant que le premier roule à 90 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et le second à 120 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Exercice 14.

Un litre d'une boisson contient 7 % de sirop. Quel volume d'eau pure doit-on rajouter pour qu'un litre de cette nouvelle boisson contienne 5 % de sirop ?

Exercice 15.

Quel est le rayon d'un disque dont l'aire égale le périmètre ?

Exercice 16.

Problème publié dans le Liber Abaci *(1202) par Léonard de Pise dit Fibonacci.*

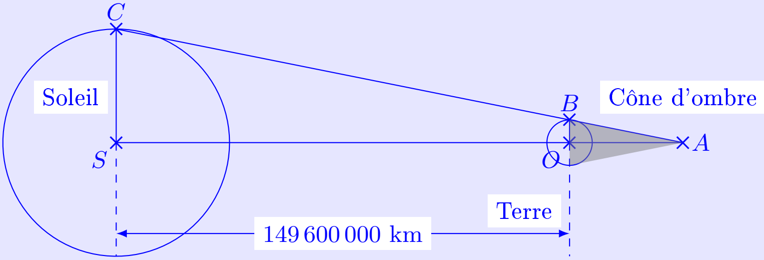
Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40 sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps. Quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ?

L'apport principal de *Léonard de Pise* (dit *Fibonacci*) fut l'introduction de la numération décimale dans le traité de comptabilité *Liber abaci* alors que l'Europe utilise encore les chiffres romains.

Son nom est resté célèbre jusqu'à nos jours grâce à une suite de nombres qui porte son nom et qui est associée au nombre d'or. Chaque terme de la suite de Fibonacci, qui commence par 0 puis 1, est la somme des deux précédents.
Cette suite est souvent évoquée dans des thématiques ésotérique ou esthétique (comme le roman *Da Vinci code*).

Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)

Exercice 17.



1. La distance moyenne Soleil-Terre (calculée de centre à centre) est de 149 600 000 km.

   Le rayon du soleil est de 696 000 km, celui de la Terre de 6 360 km.

   Démontrez que la hauteur OA du cône d'ombre situé derrière la Terre est de 1 379 642 km par valeur approchée à l'unité près par excès.

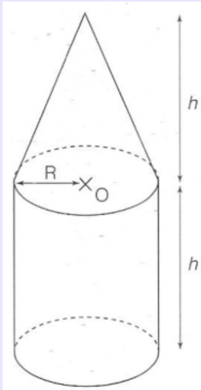
2. Calculez le volume du cône d'ombre de sommet A et dont la base est formé par le disque de rayon OB.

3. La distance moyenne Terre-Lune (calculée de centre à centre) est de 382 000 km. Le rayon de la lune est de 1 738 km Étudiez la possibilité d'éclipses totales de la Lune en période de pleine lune.

Exercice 18. Partie 1.

Dans tous l'exercice l'unité est le mètre.

1. Un moulin à vent est constitué d'un cylindre surmonté d'un cône de révolution.



Le cylindre et le cône ont la même hauteur h et une base commune de centre O et de rayon R.

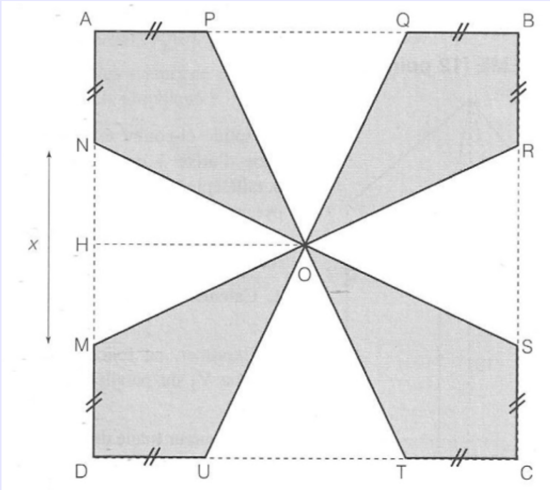
(a) Exprimez le volume du cylindre et du cône en fonction de R et de h.

(b) Déduisez-en que le volume du moulin est égale à $\dfrac{4\pi R^2 h}{3}$.

(c) On donne $R = 3$ et $h = 5$. Calculez la valeur arrondie à 1 m^3 de ce volume.

Exercice 18. Partie 2.

2. Les ailes du moulin sont représentées par la région grisée ci-dessous.



$ABCD$ est un carré de centre O et de 12 mètres de côté. Les triangles OMN, OPQ, ORS et OUT sont isocèles en O. On pose $MN = x$.

   (a) Exprimez en fonction de x l'aire du triangle OMN. Déduisez-en que l'aire des ailes du moulin est égale à $144 - 12x$.
   (b) Déterminez la valeur de x pour laquelle l'aire des ailes est égale à 36 m^2.
   (c) On suppose que $x = 9$.
      i. Calculez OM.
      ii. Montrez que le périmètre des ailes du moulin est égale à 72 m.

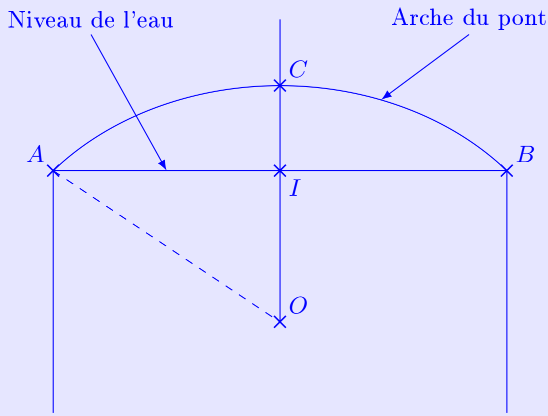
3. Dans cette question on suppose que $x = 9$.
   On a réalisé une maquette de ce moulin au 1/20. Calculez
   (a) le périmètre des ailes de la maquette,
   (b) l'aire des ailes de la maquette,
   (c) le volume de la maquette du moulin, en utilisant le résultat du 1.c et en donnant la réponse en m $=^3$ arrondie au millimètre.

Exercice 19.

Extrait du C.R.P.E. 2017 (concours de recrutement des professeurs des écoles).

Péniche et pont.

Un pont a une arche en forme d'arc de cercle.
Lors d'une crue, l'eau atteint les sommets A et B des piliers du pont.
La hauteur maximale IC entre le niveau de l'eau et le sommet de l'arche est alors de 5 mètres. L'écartement AB entre les deux piliers du pont est de 24 mètres.
La situation est modélisée par le schéma suivant, qui n'est pas à l'échelle, sur lequel O est le centre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et (CO) est l'axe de symétrie de la figure.



1. Montrer que le rayon OA de l'arche est $16,9$ m.

On assimile la coupe de la partie émergée d'une péniche, vue de face, à un rectangle de 4 mètres de haut et de 12 mètres de large.

La situation est modélisée par le schéma ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle sur lequel on a $EH = 12$ m et $FE = 4$ m.

2. Cette péniche peut-elle passer sous l'arche du pont sans dommages ? Justifier.