# Équation linéaire.

## I Généralités sur les équations.

Une *équation* est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des *variables*) qui représentent des nombres (expression littérale).

Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie. C'est pourquoi pour résoudre une équation nous donnerons *l'ensemble des solutions*.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations.

Nous apprendrons certaines de ces méthodes.

Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

## II Des outils de résolution algébrique d'équations.

**Équation et opérations : compatibilité.**

Proposition 1

Soient $a$, $b$ et $c$ des nombres.

(i) $a = b$ si et seulement si $a + c = b + c$,

(ii) $a = b$ si et seulement si $a - c = b - c$,

(iii) Si $c$ est inversible alors : $a = b$ si et seulement si $a \times c = b \times c$,

(iv) Si $c$ est inversible alors : $a = b$ si et seulement si $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

**Équation produit-nul.**

Théorème 1

Soient $a$ et $b$ deux quelconques nombres réels.

$ab = 0$ équivaut à dire que $a = 0$ ou $b = 0$.

Exercice 1.

Résolvez l'équation d'inconnue $x$ : $(-3x + 7)(4x - 6) = 0$

Exercice 2. Application.

Résolvez l'équation d'inconnue $x$ : $\dfrac{(x-3)(x+4)(x+4)}{(x+2)(x+4)(x-1)} = 0$.

Exercice 3. Application.

Résolvez l'équation d'inconnue $x$ :

$$\frac{3x+2}{7x-1} = 2.$$

## III Algorithme de résolution algébrique des équations linéaires.

**Reconnaître une équation linéaire.**

Définition 1

Une *équation linéaire* (ou équation polynomiale de degré 1) est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$ax + b = 0$$

avec $a$ et $b$ des nombres fixés et $x$ un nombre variable.

Exercice 4. Application.

Identifier les équations linéaires parmi les suivantes.

1. $x + 2 - x^2 = 2x$.
2. $3x - \sqrt{7} = 4x$
3. $7(x-7) = 7^2$.
4. $2x - 3 = 6 - 6x$.
5. $3\sqrt{x}^2 = 27$.
6. $2x \times 3 + 4 = 13 + x$.
7. $3x + 4 = -7$.
8. $\dfrac{3x+1}{3 \times 5} = \frac{4}{3}$.
9. $0 = 2x + 3$.

**Identifier les termes en $x$ et les regrouper.**

Une équation linéaire est une somme de termes qui sont soit de la forme $ax$ soit de la forme $b$.

Pour résoudre une équation linéaire nous rassemblerons tous les termes avec du $x$ dans un même membre de l'égalité.

**Isoler le $x$.**

**Exercice.**

Exercice 5.

Résolvez les équations du premier degré suivantes d'inconnue $x$ :

1. $x + 4 = 7$
2. $3x = 12$
3. $-3x + 4 = 13$
4. $-3x + 4 = 14x - 7$

Exercice 6. Application.

Résolvez les équations du premier degré suivantes d'inconnue $x$ :

1. $2x - 3 = 5$,
2. $x + 4 = 5x - 2$,
3. $3(x + 1) = 5x - 1$,
4. $-2(4 - x) + 1 = 2$,
5. $\frac{2}{3}x = 4$,
6. $-3x = 4$,
7. $-6x = \frac{2}{3}$,
8. $-\frac{t}{3} = 2$,
9. $2(3x - 1) - 5 = x + 1$,
10. $-3x + 4 = 2\left(x + \frac{2}{5}\right)$,
11. $3(x - 2) - 1 = -2(x + 4)$,
12. $2(4 - 3x) = -(x + 5)$,
13. $2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x - \frac{1}{3}$,
14. $\frac{x-5}{7} = -3$,
15. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$,
16. $\frac{x-3}{2} = 2x + 1$.

Exercice 7. Application.

Identifiez puis résolvez les équations linéaires parmi les équations d'inconnue $x$ suivantes :

1. $x^2 = 3x - 1$
2. $-4x + 2 = 10$
3. $\sqrt{x} + 1 = 3$
4. $9x - 1 = 2x - 15$
5. $\frac{1}{x} + 3 = 1$
6. $\frac{1}{3} = \frac{3x}{6} - 7$
7. $5x - 7 - x = 4x$
8. $\sqrt{7}x - 2 = -\pi$

# IV Exercices.

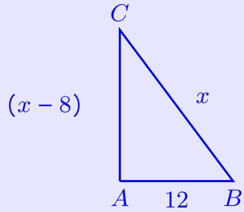
Exercice 8. ♥

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{3}x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculez l'image de $\sqrt{3}$ par la fonction $f$.
2. Déterminez les antécédents de $-7$ par la fonction $f$.

### Exercice 9. Application.

Trouver $x$ pour que le triangle $ABC$ soit rectangle en $A$.




### Exercice 10. ♥

Déterminez l'ensemble des valeurs interdites pour le calcul défini pour $x$ réel par

$$\frac{\sqrt{x}}{2x-3}$$

### Exercice 11. Application.

Résolvez l'équation

$$\frac{2x-4}{x} = 3$$

### Exercice 12. Application.

Dans une assemblée, quarante personnes ont plus de 40 ans, un quart a entre 30 et 40 ans et un tiers a moins de 30 ans. Quel est le nombre de personnes de cette assemblée ?

### Exercice 13. Application.

Deux trains partent à 4 h du matin, l'un de la ville $A$ vers la ville $B$, et l'autre de la ville $B$ située à 315 km de $A$ en direction de la ville $A$. À quelle heure se fera la rencontre, sachant que le premier roule à $90\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ et le second à $120\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ ?

### Exercice 14. Application.

Un litre d'une boisson contient 7 % de sirop. Quel volume d'eau pure doit-on rajouter pour qu'un litre de cette nouvelle boisson contienne 5 % de sirop ?

### Exercice 15. Application.

Quel est le rayon d'un disque dont l'aire égale le périmètre ?

## Exercice 16. Application.

*Problème publié dans le* Liber Abaci *(1202) par Léonard de Pise dit Fibonacci.*

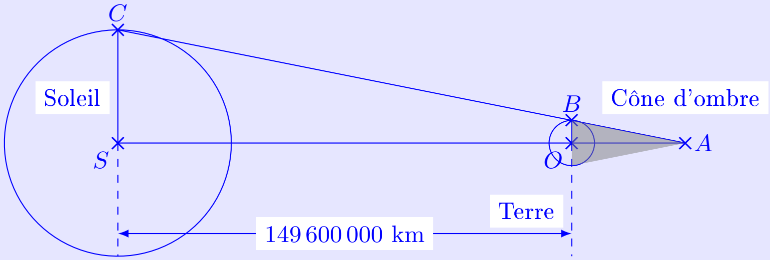
Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40 sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps. Quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ?

L'apport principal de *Léonard de Pise* ( dit *Fibonacci*) fut l'introduction de la numération décimale dans le traité de comptabilité *Liber abaci* alors que l'Europe utilise encore les chiffres romains.

Son nom est resté célèbre jusqu'à nos jours grâce à une suite de nombres qui porte son nom et qui est associée au nombre d'or. Chaque terme de la suite de Fibonacci, qui commence par 0 puis 1, est la somme des deux précédents.
Cette suite est souvent évoquée dans des thématiques ésotérique ou esthétique (comme le roman *Da Vinci code*).

Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)

## Exercice 17. Application.




1. La distance moyenne Soleil-Terre (calculée de centre à centre) est de 149 600 000 km.

   Le rayon du soleil est de 696 000 km, celui de la Terre de 6 360 km.

   Démontrez que la hauteur $OA$ du cône d'ombre situé derrière la Terre est de 1 379 642 km par valeur approchée à l'unité près par excès.

2. Calculez le volume du cône d'ombre de sommet $A$ et dont la base est formé par le disque de rayon $OB$.

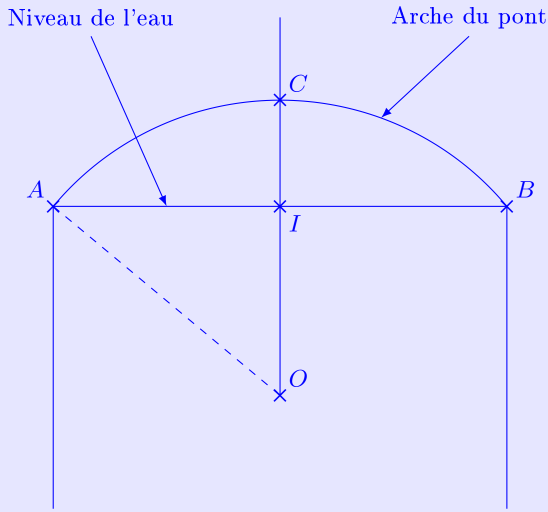
3. La distance moyenne Terre-Lune (calculée de centre à centre) est de 382 000 km. Le rayon de la lune est de 1 738 km Étudiez la possibilité d'éclipses totales de la Lune en période de pleine lune.

## Exercice 18. Application.

*Extrait du C.R.P.E. 2017 (concours de recrutement des professeurs des écoles).*

**Péniche et pont.**

Un pont a une arche en forme d'arc de cercle.
Lors d'une crue, l'eau atteint les sommets $A$ et $B$ des piliers du pont.
La hauteur maximale $IC$ entre le niveau de l'eau et le sommet de l'arche est alors de 5 mètres. L'écartement $AB$ entre les deux piliers du pont est de 24 mètres.
La situation est modélisée par le schéma suivant, qui n'est pas à l'échelle, sur lequel $O$ est le centre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et $(CO)$ est l'axe de symétrie de la figure.




1. Montrer que le rayon $OA$ de l'arche est 16,9 m.

On assimile la coupe de la partie émergée d'une péniche, vue de face, à un rectangle de 4 mètres de haut et de 12 mètres de large.


La situation est modélisée par le schéma ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle sur lequel on a $EH = 12$ m et $FE = 4$ m.

2. Cette péniche peut-elle passer sous l'arche du pont sans dommages ? Justifier.

### Exercice 19.

Exercices 26 à 31 page 99 du manuel Indice : découverte avec des étapes.

### Exercice 20.

Exercices 115 à 119, 104 page 104 et 125 et 126 page 105 du manuel Indice : équation linéaire, produit et fractionnaires.

### Exercice 21.

Exercices 127 et 128 page 105 du manuel Indice : mise en équation.