Équation linéaire.

I Généralités sur les équations.

Une *équation* est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des *variables*) qui représentent des nombres (expression littérale).

Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie. C'est pourquoi pour résoudre une équation nous donnerons *l'ensemble des solutions*.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations.

Nous apprendrons certaines de ces méthodes.

Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

II Des outils de résolution algébrique d'équations.

Équation et opérations : compatibilité.

Proposition 1

Soient a, b et c des nombres.

(i) $a = b$ si et seulement si $a + c = b + c$,

(ii) $a = b$ si et seulement si $a - c = b - c$,

(iii) Si c est inversible alors : $a = b$ si et seulement si $a \times c = b \times c$,

(iv) Si c est inversible alors : $a = b$ si et seulement si $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$.

Démonstration 1

Justifions, par exemple, pour l'addition.

* Implication directe.

  En logique, pour toutes quantités a et b, et pour toute expression $F(x)$, si $a = b$ alors $F(a) = F(b)$.

  En particulier lorsque $F(x) = x + c$, nous obtenons $F(a) = F(b)$ et donc $a + c = b + c$.

* Réciproque.

  Supposons que $a + c = b + c$.

Tous les nombres réels admettent un opposé. En particulier $-c$ est l'opposé de c. Donc d'après l'implication directe :

$$(a+c)+(-c)=(b+c)+(-c)$$

L'addition étant transitive :

$$a+c+(-c)=b+c+(-c)$$

Enfin :

$$a=b$$

Remarques.

1. Le signe égale peut avoir des sens différents : annonce d'une notation, annonce du résultat d'un calcul (primaire et collège), équation (collège et lycée). L'égalité dans une équation peut être vue comme un équilibre dans une balance roberval.
   Lorsque nous aurons plusieurs variables l'égalité signifiera un lien entre ces variables. Les physiciens et ingénieurs parleraient de contraintes.
2. Finalement nous retiendrons les règles suivantes.
   Nous ne modifions pas l'ensemble des solutions d'une équation
   - en additionnant ou soustrayant n'importe quel nombre simultanément dans les deux membres de l'égalité,
   - en multipliant ou en divisant par n'importe quel nombre non nul simultanément dans les deux membres de l'égalité.

Exemples.

1. Résolvons l'équation (E) : $x+2=0$
   Résolvons (E) par analyse-synthèse.
   * Phase d'analyse.
     Supposons que x est une solution de (E).
     Nous avons successivement :
     $$\begin{aligned} x+2&=0\\ x+2-2&=0-2\\ x&=-2 \end{aligned}$$
     S'il y a une solution ce ne peut être que -2.

* Phase de synthèse.
  -2 est bien une solution : $(-2) + 2 = 0$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\{-2\}$.

2. Résolvons l'équation (E) : $3x + 1 = 5$.

   Résolvons (E) par analyse-synthèse.

   * Phase d'analyse.
     Supposons que x est une solution de (E).
     Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 5 \\ 3x + 1 - 1 &= 5 - 1 \\ 3x &= 4 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{4}{3} \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

   * Phase de synthèse.
     $\frac{4}{3}$ est bien une solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est $\{3\}$.

3. Sachant que x désigne une longueur résolvons l'équation (E) : $10 = -2x + 4$.

   Résolvons le problème par analyse-synthèse.

   * Phase d'analyse.
     Supposons que x est une solution de (E).
     Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} 10 &= -2x + 4 \\ 10 - 4 &= -2x + 4 - 4 \\ 6 &= -2x \\ \frac{6}{-2} &= \frac{-2x}{-2} \\ -3 &= x \end{aligned}$$

* Phase de synthèse.
  -3 ne peut être une solution à notre problème : c'est un nombre strictement négatif et ce n'est donc pas une longueur.

L'ensemble des solutions du problème est $\varnothing$.

Remarques.

1. La phase de synthèse est indispensable pour prendre en compte des valeurs interdites pour les solutions : valeurs interdites à cause de formules de calcul (cf infra) ou des contraintes contextuelles (par exemple le fait qu'une longueur est positive).

Équation produit-nul.

Théorème 1

> Soient a et b deux quelconques nombres réels.
>
> $ab = 0$ équivaut à dire que $a = 0$ ou $b = 0$.

Démonstration 2

* Condition nécessaire.
  Démontrons que si $ab = 0$ alors forcément $a = 0$ ou $b = 0$ en raisonnant par l'absurde.

  Supposons que $ab = 0$ et que pourtant $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
  En utilisant la précédente proposition pour b qui est inversible :

$$ab \times \frac{1}{b} = 0 \times b$$

et donc :

$$a = 0$$

Ce qui est impossible puisque nous avons supposé que $a \neq 0$.

Nous avons démontré par l'absurde que si $ab = 0$ alors, nécessairement, $a = 0$ ou $b = 0$.

* Condition suffisante.

Découle trivialement du fait que 0 est absorbant.

Remarques.

1. On peut formuler ce résultat de la façon suivante : pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit que l'un des facteur (au moins) soit nul.
2. Ce résultat se généralise à un produit de plus de deux facteurs.
3. Cette proposition nous permettra à partir d'une équation complexe d'en obtenir plusieurs plus simples.
4. Dire que : $\frac{a}{b} = 0$ équivaut à dire que $a \times \frac{1}{b} = 0$, ce qui équivaut encore à : $a = 0$ et $b \neq 0$.

$$\frac{a}{b} = 0 \text{ si et seulement si } a = 0 \text{ et } b \neq 0.$$

Exemples.

1. Résolvons l'équation (E) : $\frac{x+3}{\pi} = 0$.

   Résolvons le problème par analyse-synthèse.

   * Phase d'analyse.

   Supposons que x est une solution de (E).

   Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{\pi} &= 0 \\ x+3 &= 0 \\ x+3-3 &= 0-3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

   * Phase de synthèse.

   -3 est bien une solution de (E).

   L'ensemble des solutions de (E) est $\{3\}$.

2. Résolvons l'équation (E) : $\frac{(x+3)(x+1)}{x+1} = 0$.

   Résolvons le problème par analyse-synthèse.

* Phase d'analyse.
  Supposons que x est une solution de (E).
  Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{(x+3)(x+1}{x+1} &= 0 \\
(x+3)(x+1) &= 0 \\
x+3=0 \quad &\text{ou} \quad x+1=0 \\
x+3-3=0-3 \quad &\text{ou} \quad x+1-1=0-1 \\
x=-3 \quad &\text{ou} \quad x=-1
\end{aligned}$$

* Phase de synthèse.
  -3 est bien une solution de (E) par contre -1 est une valeur interdite (car annule le dénominateur).

L'ensemble des solutions de (E) est $\{3\}$.

Exercice 1.
Résolvez l'équation d'inconnue x : $(-3x+7)(4x-6)=0$

Correction exercice 1

Nous reconnaissons une équation produit nul.

Résolvons l'équation.

$$(-3x+7)(4x-6)=0$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
-3x+7=0 \quad &\text{ou} \quad 4x-6=0 \\
-3x+7-7=0-7 \quad &\text{ou} \quad 4x-6+6=0+6 \\
-3x=-7 \quad &\text{ou} \quad 4x=6 \\
\frac{-3x}{-3}=\frac{-7}{-3} \quad &\text{ou} \quad \frac{4x}{4}=\frac{6}{4} \\
x=\frac{7}{3} \quad &\text{ou} \quad x=\frac{2\times 3}{2^2}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{7}{3};\ \frac{2}{3}\right\}$.

Exercice 2. Application.

Résolvez l'équation d'inconnue x : $\dfrac{(x-3)(x+4)(x+4)}{(x+2)(x+4)(x-1)} = 0$.

Correction exercice 2

L'expression fractionnaire qui apparaît dans cette équation ne peut s'annuler que si son numérateur s'annule. Cependant nous allons devoir être prudent car son dénominateur comportant des x il peut-y avoir des valeurs interdite. Ces valeurs interdites nous obligent à abandonner le raisonnement par équivalence et adopter le raisonnement par analyse-synthèse.

Déterminons par analyse-synthèse l'ensemble des solutions de cette équation.

* Analyse.

Supposons que le nombre x soit une solution de l'équation.

Alors forcément, l'expression étant fractionnaire, son numérateur doit être nul :

$$(x-3)(x+4)(x+4) = 0$$

Nous reconnaissons une équation produit-nul.

La précédente équation équivaut successivement à :

$$x-3=0 \quad \text{ou} \quad x+4=0 \quad \text{ou} \quad x+4=0$$
$$x=3 \quad \text{ou} \quad x=-4 \quad \text{ou} \quad x=-4$$

Nous voyons que, forcément, x ne peut être que l'un de ces deux nombres : 3 ou -4.

* Synthèse.

En phase d'analyse nous avons vu qu'il n'y a que deux solutions possibles. Il faut maintenant vérifier que ce sont effectivement des racines.

- Vérifions que 3 est bien une solution.

$$\begin{aligned}\frac{(3-3)(3+4)(3+4)}{(3+2)(3+4)(3-1)} &= \frac{0\times 7\times 7}{5\times 7\times 2}\\ &= 0\end{aligned}$$

- Par contre -4 n'est pas une solution car sinon le dénominateur de l'expression fractionnaire s'annule. -4 est une valeur interdite.

Ainsi une seule des deux solutions convient.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{3\}$.

Exercice 3. Application.

Résolvez l'équation d'inconnue x :

$$\frac{3x+2}{7x-1} = 2.$$

Correction exercice 3

Avec le produit en croix on perd l'équivalence. Il faut donc procéder à un raisonnement par analyse-synthèse qui est plus long.

* Supposons qu'on ait réussi à trouver un nombre x tel que $\frac{3x+2}{7x-1} = 2$, alors $3x + 2 = 2(7x - 1)$.
  Cette dernière équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 2 \times 7x - 2 \times 1 \\ 3x + 2 &= 14x - 2 \end{aligned}$$

  Si x est une solution de l'équation alors forcément $x = \frac{4}{17}$.
* Vérifions que la seule solution possible est vraiment une solution :

$$\frac{3 \times \frac{4}{17} + 2}{7 \times \frac{4}{17} - 1} = 2$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{4}{17}\right\}$.

III Algorithme de résolution algébrique des équations linéaires.

Reconnaître une équation linéaire.

Définition 1

Une *équation linéaire* (ou équation polynomiale de degré 1) est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$ax + b = 0$$

avec a et b des nombres fixés et x un nombre variable.

Remarques.

1. Dans la pratique il faudra être capable de reconnaître diverses présentations d'équations linéaires mais aussi savoir reconnaître les équations qui ne sont pas linéaires (cf infra en exemples).

Exemples.

1. $0 = 2x + 1$ est une équation linéaire.
2. $-2x + \pi - 4x = 3x - 7$ est une équation linéaire.
3. $1 = 0 + 1$ n'est pas une équation car il n'y a pas d'inconnue.
4. $\frac{x+1}{2} = 0$ est une équation linéaire.
5. $x^2 + 2 = 3x$ n'est pas une équation linéaire.
6. $\sqrt{x+1} = 4$ n'est pas une équation linéaire.
7. $\frac{x-1}{x+1} = 4$ n'est pas une équation linéaire.
8. $(x+2)(x-3) = 0$ n'est pas une équation linéaire.

Exercice 4. Application.

Identifier les équations linéaires parmi les suivantes.

1. $x + 2 - x^2 = 2x$.
2. $3x - \sqrt{7} = 4x$
3. $7(x-7) = 7^2$.
4. $2x - 3 = 6 - 6x$.
5. $3\sqrt{x}^2 = 27$.
6. $2x \times 3 + 4 = 13 + x$.
7. $3x + 4 = -7$.
8. $\dfrac{3x+1}{3 \times 5} = \frac{4}{3}$.
9. $0 = 2x + 3$.

Identifier les termes en x et les regrouper.

Une équation linéaire est une somme de termes qui sont soit de la forme ax soit de la forme b.

Pour résoudre une équation linéaire nous rassemblerons tous les termes de la forme ax dans un même membre de l'égalité.

Isoler le x.

Une fois les deux précédentes étapes terminées (identifier une équation linéaire puis regrouper tous les termes de la forme ax d'un côté), nous allons isoler le x en déconstruisant le calcul.

1. Résolvons (E) : $2x + 3 = 2$.

   Voici la rédaction type dont nous userons pour résoudre des équation linéaires. L'idée pour isoler le x est de faire les calculs réciproques (contraires) de ceux qui s'appliquent à x : $\underbrace{\underbrace{2x}+3}$.

   Ou pour le dire autrement il faut faire le programme de calcul qui s'applique à x à l'envers.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{x} \arrow[d, "\times 2"'] \\
\boxed{2x} \arrow[d, "+3"'] \\
\boxed{2x+3}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\boxed{x} \\
\boxed{2x} \arrow[u, "\div 2"] \\
\boxed{2x+3} \arrow[u, "-3"]
\end{tikzcd}
$$

   (E) équivaut successivement à :

$$
\begin{aligned}
2x + 3 - 3 &= 2 - 3 \\
2x &= -1 \\
\frac{2x}{2} &= \frac{-1}{2} \\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

   L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

   Les équations linéaires ne présentent pas de difficultés (notamment pas de valeur interdite) nous pouvons donc les résoudre par équivalences plutôt que par analyse-synthèse.

2. L'équation $4x - 1 = 3 - x$ équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
4x - 1 + x &= 3 - x + x \\
5x + 1 &= 3 \\
5x + 1 - 1 &= 3 - 1 \\
5x &= 2 \\
\frac{5x}{5} &= \frac{2}{5} \\
x &= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

3. Lorsque les facteurs d'une équation produit nul sont tous du premier degré (comme des fonctions affines) alors il est aussi possible de raisonner par équivalences.

   L'équation $(2x + 1)(-x + 2) = 0$ équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
2x + 1 &= 0 & \text{ou} \quad & -x + 2 = 0 \\
2x + 1 - 1 &= 0 - 1 & \text{ou} \quad & -x + 2 - 2 = 0 - 2 \\
2x &= -1 & \text{ou} \quad & -x = -2 \\
\frac{2x}{2} &= \frac{-1}{2} & \text{ou} \quad & \frac{-x}{-1} = \frac{-2}{-1} \\
x &= -\frac{1}{2} & \text{ou} \quad & x = 2
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\frac{1}{2} ; 2\right\}$.

Exercice.

Exercice 5.

Résolvez les équations du premier degré suivantes d'inconnue x :

1. $x + 4 = 7$
2. $3x = 12$
3. $-3x + 4 = 13$
4. $-3x + 4 = 14x - 7$

Correction exercice 5

1. Résolvons l'équation.

$$x + 4 = 7$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x + 4 - 4 &= 7 - 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{3\}$.

2. Résolvons l'équation.

$$3x = 12$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{3x}{3} &= \frac{12}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{4\}$.

3. Résolvons l'équation.

$$-3x + 4 = 13$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} -3x + 4 - 4 &= 13 - 4 \\ -3x &= 9 \\ \frac{-3x}{-3} &= \frac{9}{-3} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-3\}$.

4. Résolvons l'équation.

$$-3x + 4 = 14x - 7$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} -3x + 4 - 14x &= 14x + 7 - 14x \\ -17x + 4 &= 7 \\ -17x + 4 - 4 &= 7 - 4 \\ -17x &= 3 \\ \frac{-17x}{-17} &= \frac{3}{-17} \\ x &= -\frac{3}{17} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{17}\right\}$.

Exercice 6. Application.

Résolvez les équations du premier degré suivantes d'inconnue x :

1. $2x - 3 = 5$,
2. $x + 4 = 5x - 2$,
3. $3(x + 1) = 5x - 1$,
4. $-2(4 - x) + 1 = 2$,
5. $\frac{2}{3}x = 4$,
6. $-3x = 4$,
7. $-6x = \frac{2}{3}$,
8. $-\frac{t}{3} = 2$,
9. $2(3x - 1) - 5 = x + 1$,
10. $-3x + 4 = 2\left(x + \frac{2}{5}\right)$,
11. $3(x - 2) - 1 = -2(x + 4)$,
12. $2(4 - 3x) = -(x + 5)$,
13. $2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x - \frac{1}{3}$,
14. $\frac{x-5}{7} = -3$,
15. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$,
16. $\frac{x-3}{2} = 2x + 1$.

Correction exercice 6

1. $2x - 3 = 5$, $\mathscr{S} = \{4\}$.
2. $x + 4 = 5x - 2$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
3. $3(x + 1) = 5x - 1$, $\mathscr{S} = \{1\}$.
4. $-2(4 - x) + 1 = 2$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.
5. $\frac{2}{3}x = 4$, $\mathscr{S} = \{6\}$.

6. $-3x = 4$, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$.
7. $-6x = \frac{2}{3}$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{-1}{9}\right\}$.
8. $-\frac{t}{3} = 2$, $\mathscr{S} = \{-6\}$.
9. $2(3x-1)-5 = x+1$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{8}{5}\right\}$.
10. $-3x+4 = 2\left(x+\frac{2}{5}\right)$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{16}{25}\right\}$.
11. $3(x-2)-1 = -2(x+4)$, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$.
12. $2(4-3x) = -(x+5)$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{11}{5}\right\}$.
13. $2\left(\frac{x}{3}-1\right) = x-\frac{1}{3}$, $\mathscr{S} = \{-5\}$.
14. $\frac{x-5}{7} = -3$, $\mathscr{S} = \{-16\}$.
15. $\frac{1}{4}x+\frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.
16. $\frac{x-3}{2} = 2x+1$, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

Exercice 7. Application.

Identifiez puis résolvez les équations linéaires parmi les équations d'inconnue x suivantes :

1. $x^2 = 3x-1$
2. $-4x+2 = 10$
3. $\sqrt{x}+1 = 3$
4. $9x-1 = 2x-15$
5. $\frac{1}{x}+3 = 1$
6. $\frac{1}{3} = \frac{3x}{6}-7$
7. $5x-7-x = 4x$
8. $\sqrt{7}x-2 = -\pi$

Correction exercice 7

Toutes les expressions qui ne ressemble pas à des formules algébriques de fonctions affines ne correspondent pas à des équations linéaires. Concrètement, les expressions $\sqrt{x}$, x^2, x^3, ..., $\frac{1}{x}$ ne doivent pas apparaître.

1. Ce n'est pas une équation linéaire.
2. C'est une équation linéaire et $\mathscr{S} = \{-2\}$.
3. Ce n'est pas une équation linéaire.
4. C'est une équation linéaire et $\mathscr{S} = \{-2\}$.
5. Ce n'est pas une équation linéaire.
6. Il s'agit bien d'une équation linéaire.

$$\frac{1}{3} = \frac{3x}{6} - 7$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= \frac{3}{6}x - 7 \\
\frac{1}{3}+7 &= \frac{3}{6}x - 7+7 \\
\frac{22}{3} &= \frac{3}{6}x \\
\frac{6}{3}\times\frac{22}{3} &= \frac{6}{3}\times\frac{3}{6}x \\
\frac{22}{6} &= x \\
\frac{2\times 11}{2\times 3} &= x
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{11}{3}\right\}$.

7. Il s'agit bien d'une équation linéaire.
   Cependant la situation est un peu particulière comme le montre la résolution de cette équation.

$$5x - 7 - x = 4x$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
4x - 7 &= 4x \\
4x - 7 - 4x &= 4x - 4x \\
-7 &= 0
\end{aligned}$$

   Toute la difficulté est d'interpréter cette dernière égalité.
   Lorsque nous travaillons par équivalence toutes les phrases mathématiques écrites sont aussi vraies les unes que les autres. Or la dernière phrase que nous avons obtenue est, très clairement, fausse, donc la première est tout aussi fausse. Ainsi l'égalité proposée est toujours fausse, et ce, qu'elle que soit la valeur choisie pour x. Autrement dit il n'y a aucune solution.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \varnothing$.

8. La présence de $\sqrt{7}$ ou de π ne doit pas effrayer : il s'agit juste de nombres.
   C'est une équation linéaire et :

$$\sqrt{7}x - 2 = -\pi$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\sqrt{7}x - 2+2 &= -\pi+2 \\
\sqrt{7}x &= -\pi + 2\frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{7}} && = \frac{-\pi + 2}{\sqrt{7}} \\
x &= \frac{-\pi + 2}{\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

Et il n'y a pas d'écriture plus simple de ce nombre.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{-\pi+2}{\sqrt{7}}\right\}$.

IV Exercices.

Exercice 8. ♥

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{3}x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculez l'image de $\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Déterminez les antécédents de -7 par la fonction f.

Correction exercice 8

1.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{3}x - 1 \\
f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

2. Les antécédents de -7 par la fonction f sont les nombres x tels que : $f(x) = -7$.
Résolvons cette dernière équation (qui est linéaire et donc se résout en isolant le x).

$$\begin{aligned}
f(x) = -7 &\iff \sqrt{3}x - 1 = -7 \\
&\iff \sqrt{3}x - 1+1 = -7+1 \\
&\iff \sqrt{3}x = -6 \\
&\iff \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = \frac{-6}{\sqrt{3}} \\
&\iff x = -\frac{6}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

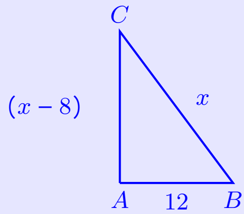
Et en présentant élégamment :

$$f(x) = -7 \iff x = 2\sqrt{3}$$

L'ensemble des antécédents de -7 par f est donc $\{2\sqrt{3}\}$.

Exercice 9. Application.

Trouver x pour que le triangle ABC soit rectangle en A.



Correction exercice 9

ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, d'après le theoreme de Pythagore.

Autrement dit il faut et il suffit que : $(x-8)^2 + 12^2 = x^2$.

Cette dernière équation équivaut successivement à :

$$x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2 + 144 = x^2$$
$$x^2 - 16x + 64 + 144 = x^2$$

En se ramenant à une égalité à 0 :

$$x^2 - 16x + 208 - x^2 = x^2 - x^2$$
$$-16x + 208 = 0$$

Nous reconnaissons une équation linéaire :

$$-16x + 208 - 208 = 0 - 208$$
$$-16x = -208$$
$$\frac{-16x}{-16} = \frac{-208}{-16}$$
$$x = 13$$

ABC est rectangle en A si et seulement si $x = 13$.

Exercice 10. ♥

Déterminez l'ensemble des valeurs interdites pour le calcul défini pour x réel par

$$\frac{\sqrt{x}}{2x-3}$$

Il faut utiliser le fait qu'une racine carrée s'applique uniquement à un nombre positif et qu'un quotient ne peut avoir un dénominateur nul.

Exercice 11. Application.

Résolvez l'équation

$$\frac{2x-4}{x}=3$$

Correction exercice 11

L'expression « résolvez dans $\mathbb{R}$ signifie que nous garderons que les solutions qui sont dans $\mathbb{R}$.

Il y a deux manipulations possibles : en se ramenant à une expression fractionnaire nulle ou en utilisant le produit en croix.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation par analyse-synthèse.

* Analyse.

Si $x \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation, alors nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{2x-4}{x} &= 3 \\
\frac{2x-4}{x}-3 &= 3-3 \\
\frac{2x-4}{x}-\frac{3x}{x} &= 0 \\
\frac{2x-4-3x}{x} &= 0 \\
\frac{-x-4}{x} &= 0 \\
-x-4 &= 0 \\
-x-4+4 &= 0+4 \\
-x &= 4 \\
-x\times(-1) &= 4\times(-1) \\
x &= -4
\end{aligned}$$

ou manipulation alternative utilisant le produit en croix :

$$\begin{aligned}
\frac{2x-4}{x} &= 3\\
\frac{2x-4}{x} &= \frac{3}{1}\\
(2x-4)\times(1) &= (3)\times(x)\\
2x-4 &= 3x\\
2x-4-2x &= 3x-2x\\
-4 &= x
\end{aligned}$$

* Synthèse.
  Nous avons vu (dans la phase d'analyse) qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution à savoir -4.
  Or

$$\frac{2\times(-4)-4}{-4} = 3$$

donc -4 est bien une solution de l'équation.
Ici nous aurions pu avoir une difficulté si la solution trouvée avait été une valeur interdite.

> L'ensemble des solutions de l'équation est :
>
> $\mathscr{S} = \{-4\}$.

Exercice 12. Application.
Dans une assemblée, quarante personnes ont plus de 40 ans, un quart a entre 30 et 40 ans et un tiers a moins de 30 ans. Quel est le nombre de personnes de cette assemblée ?

Correction exercice 12

Le plus souvent (en seconde) l'inconnue qu'il est pertinent d'introduire est la grandeur recherchée.

Notons x le nombre de personnes dans l'assemblée.
L'énoncé se traduit alors par l'égalité :

$$40 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = x$$

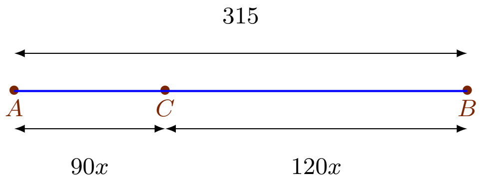
Il s'agit d'une équation linéaire dont l'unique solution est 96.

Exercice 13. Application.

Deux trains partent à 4 h du matin, l'un de la ville A vers la ville B, et l'autre de la ville B située à 315 km de A en direction de la ville A. À quelle heure se fera la rencontre, sachant que le premier roule à 90 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et le second à 120 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$?

Correction exercice 13

Notons x le temps, en heures, mis par les deux trains pour se croiser.



La distance parcourue par le train partant de A au moment du croisement est (en fonction de x) $90x$.

La distance parcourue par le train partant de B au moment du croisement est (en fonction de x) $120x$).

Ainsi x doit vérifier l'équation

$$90x + 120x = 315$$

Il s'agit d'une équation linéaire dont l'unique solution est $x = 1{,}5$.

Autrement dit les trains se croisent à 5 h 30.

Exercice 14. Application.

Un litre d'une boisson contient 7 % de sirop. Quel volume d'eau pure doit-on rajouter pour qu'un litre de cette nouvelle boisson contienne 5 % de sirop ?

Correction exercice 14

Déterminons le volume d'eau à rajouter.

Notons x le volume, exprimé en litre, d'eau pure rajouté dans la boisson.

Après mélange la boisson est composée de $\frac{7}{100}\times 1 = 0{,}07$ L de sirop, de $1-0{,}07 = 0{,}93$ L d'eau et de x litres d'eau.

On souhait que le mélange contienne 5 % de sirop donc :

$$\frac{0{,}07}{0{,}07 + 0{,}93 + x} = \frac{5}{100}$$

ce qui équivaut successivement à

$$\frac{0{,}07}{1 + x} = \frac{5}{100}$$

Puisque $x + 1 \neq 0$ (utilisation du produit en croix) :

$$\begin{aligned} 0{,}07 \times 100 &= (1 + x) \times 5 \\ 7 &= 5 + 5x \\ 7 - 5 &= 5 + 5x - 5 \\ 2 &= 5x \\ \frac{2}{5} &= x \end{aligned}$$

Pour que la nouvelle boisson contienne 5 % de sirop il faut rajouter 0,4 L.

Autre façon de raisonner : la quantité de sirop avant et après remplissage est la même donc :

$$\frac{7}{100} \times 1 = \frac{5}{100} \times (x + 1)$$

Exercice 15. Application.

Quel est le rayon d'un disque dont l'aire égale le périmètre ?

Correction exercice 15

Remarquons que ce problème n'a pas de sens pour un physicien puisque l'aire et le périmètre ont des dimensions différentes.

Deux méthodes de résolution : par disjonction des cas ou par résolution de l'équation en factorisant.

Exercice 16. Application.

Problème publié dans le Liber Abaci *(1202) par Léonard de Pise dit Fibonacci.*

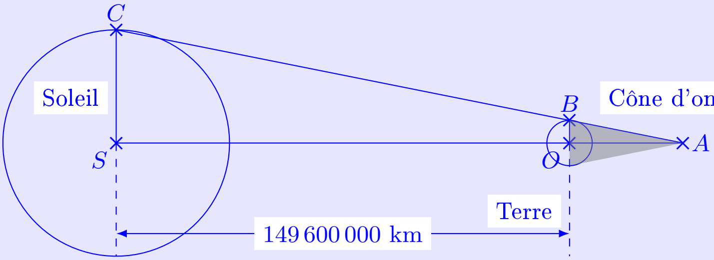
Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40 sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps. Quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ?

L'apport principal de *Léonard de Pise* (dit *Fibonacci*) fut l'introduction de la numération décimale dans le traité de comptabilité *Liber abaci* alors que l'Europe utilise encore les chiffres romains.

Son nom est resté célèbre jusqu'à nos jours grâce à une suite de nombres qui porte son nom et qui est associée au nombre d'or. Chaque terme de la suite de Fibonacci, qui commence par 0 puis 1, est la somme des deux précédents.
Cette suite est souvent évoquée dans des thématiques ésotérique ou esthétique (comme le roman *Da Vinci code*).

Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)

Exercice 17. Application.



1. La distance moyenne Soleil-Terre (calculée de centre à centre) est de 149 600 000 km.

   Le rayon du soleil est de 696 000 km, celui de la Terre de 6 360 km.

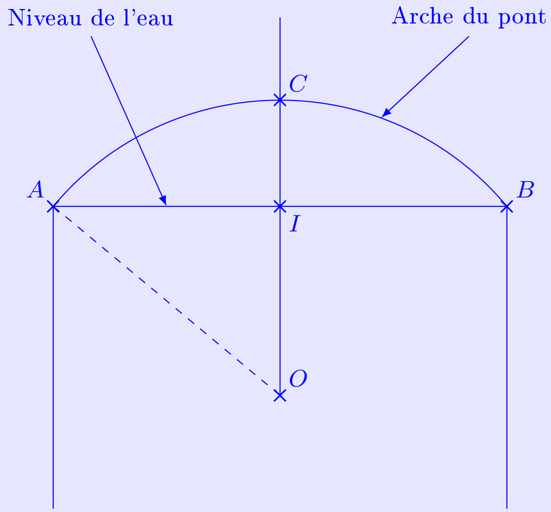
   Démontrez que la hauteur OA du cône d'ombre situé derrière la Terre est de 1 379 642 km par valeur approchée à l'unité près par excès.
2. Calculez le volume du cône d'ombre de sommet A et dont la base est formé par le disque de rayon OB.
3. La distance moyenne Terre-Lune (calculée de centre à centre) est de 382 000 km. Le rayon de la lune est de 1 738 km Étudiez la possibilité d'éclipses totales de la Lune en période de pleine lune.

Exercice 18. Application.

Extrait du C.R.P.E. 2017 (concours de recrutement des professeurs des écoles).

Péniche et pont.

Un pont a une arche en forme d'arc de cercle.
Lors d'une crue, l'eau atteint les sommets A et B des piliers du pont.
La hauteur maximale IC entre le niveau de l'eau et le sommet de l'arche est alors de 5 mètres. L'écartement AB entre les deux piliers du pont est de 24 mètres.
La situation est modélisée par le schéma suivant, qui n'est pas à l'échelle, sur lequel O est le centre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et (CO) est l'axe de symétrie de la figure.



1. Montrer que le rayon OA de l'arche est 16,9 m.

On assimile la coupe de la partie émergée d'une péniche, vue de face, à un rectangle de 4 mètres de haut et de 12 mètres de large.

La situation est modélisée par le schéma ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle sur lequel on a $EH = 12$ m et $FE = 4$ m.

2. Cette péniche peut-elle passer sous l'arche du pont sans dommages ? Justifier.

Correction exercice 18

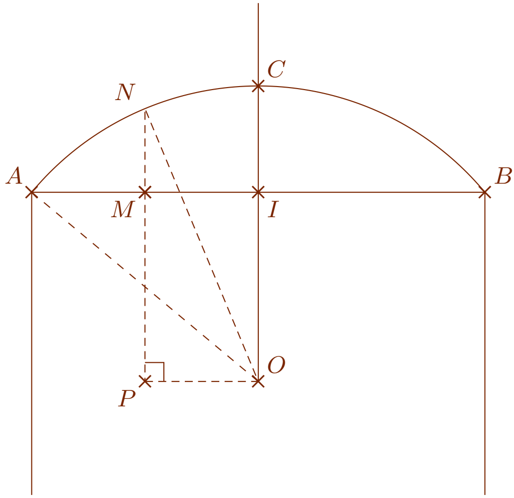
1. Déterminons OA.

   Puisque (CO) est l'axe de symétrie de la figure, AIO est rectangle en I.
   Donc, d'après le théorème de Pythagore : $AO^2 = OI^2 + IA^2$.
   Ce qui équivaut successivement à :

$$
\begin{aligned}
OA^2 &= (OA - IC)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
OA^2 &= (OA - 5)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2 \\
OA^2 &= OA^2 - 2 \times OA \times 5 + 5^2 + 12^2 \\
OA^2 &= OA^2 - 10 \cdot OA + 169 \\
OA^2 &= OA^2 - 2 \times OA \times 5 + 5^2 + 12^2 \\
OA^2 - OA^2 &= OA^2 - 10 \cdot OA + 169 - OA^2 \\
0 &= -10 \cdot OA + 169 \\
0 10 \cdot OA &= -10 \cdot OA + 169 10 \cdot OA \\
10 \cdot OA &= 169 \\
\frac{10 \cdot OA}{10} &= \frac{169}{10} \\
OA &= 16{,}9
\end{aligned}
$$

$$\boxed{OA = 16{,}9 \text{ m}}$$

2. Notons M le point appartenant à $[AI]$ tel que $MI = 6$, N le point de l'arche du pont situé à la verticale de M et P le point de $[NM)$ tel que ONP soit un triangle rectangle en P.



Déterminons MN.

NOP est un triangle rectangle en P donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$NP^2 + PO^2 = ON^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} NP^2 &= OA^2 - 6^2 \\ &= 16{,}9^2 - 6^2 \end{aligned}$$

NP étant une longueur donc positive :

$$\begin{aligned} NP &= \sqrt{16{,}9^2 - 6^2} \\ &= \sqrt{249{,}61} \end{aligned}$$

Nous en déduisons la hauteur

$$\begin{aligned} MN &= NP - PM \\ &= NP - OI \\ &= \sqrt{249{,}61} - (OA - CI) \\ &= \sqrt{249{,}61} - (16{,}9 - 5) \\ &= \sqrt{249{,}61} - 11{,}9 \\ &\approx 3{,}899 \end{aligned}$$

La péniche ne pourra pas passer sous l'arche sans dommage.

Exercice 19.

Exercices 26 à 31 page 99 du manuel Indice : découverte avec des étapes.

Exercice 20.

Exercices 115 à 119, 104 page 104 et 125 et 126 page 105 du manuel Indice : équation linéaire, produit et fractionnaires.

Exercice 21.

Exercices 127 et 128 page 105 du manuel Indice : mise en équation.