Les entiers.

I Entiers naturels : $\mathbb{N}$.

Les *entiers naturels* sont les nombres qui servent à dénombrer, à compter. L'ensemble de tous les entiers naturels est :

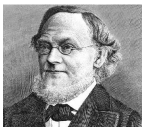
$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$$

Leopold Kronecker ($XIX^{\text{ième}}$) : « Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme. »

Remarques.

1. La notation $\mathbb{N}$ représente la première lettre de « naturel ».
2. En fait l'ensemble des nombres entiers naturels se construit logiquement.
3. Parmi les mathématiciens qui ont marqué l'étude de l'ensemble des entiers naturels :

Giuseppe Peano.



Hermann Günther Grassmann.

II Entiers relatifs : $\mathbb{Z}$.

Les *entiers relatifs* sont les entiers naturels et leurs *opposés*. L'ensemble de tous les entiers relatifs est :

$$\mathbb{Z} = \{\dots,\ -3,\ -2,\ -1, 0, 1, 2, 3,\ \dots\}$$

Proposition 1

Les nombres entiers relatifs ont une partie décimale nulle.

Remarques :

1. Autrement dit l'*écriture décimale infinie* d'un entier ne comporte que des zéros dans la partie décimale. Ainsi : $3 = 3{,}000\ldots$
2. Il existe des nombres qui ne sont pas des entiers. Par exemple $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier.
3. La notation $\mathbb{Z}$ (de l'allemand « zahlen » signifiant nombres) fut popularisée par Nicolas Bourbaki.

III Additionner des entiers relatifs.

Exercice 1

Évaluez les quantités suivantes :

1. $A = -3 + 2$
2. $B = -8 - 7$
3. $C = -(-3) + 4$
4. $D = -13 + (-11)$

IV Multiplier des entiers relatifs.

Les règles rappelées ici fonctionnent en fait pour n'importe quel nombre.

Signe d'un produit.

Le produit de deux nombres de même signe est positif.
Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.
Il est également possible de se représenter les choses comme suit.

Multiplier par un nombre négatif change le signe

$$\boxed{x} \xrightarrow{\quad -2\times \quad} \boxed{-2\times x}$$

Multiplier par un nombre positif ne change pas le signe

$$\boxed{x} \xrightarrow{\quad 3\times \quad} \boxed{3\times x}$$

0 est dit *absorbant* pour la multiplication : quelque soit le nombre a, $0 \times a = 0$.
1 est dit *neutre* pour la multiplication : quelque soit le nombre a, $1 \times a = a$.

Priorités opératoires.

Les règles de priorités pour l'instant se limitent à :

Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires.

Priorité 2 Les multiplications en allant de gauche à droite.

Priorité 3 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

Exercice 2

Évaluez les quantités suivantes :

1. $A = 4 \times (-1)$
2. $B = -1 \times (-1)$
3. $C = 3 \times [-2(3-5)]$
4. $D = (3 - 5 \times (-2))(-1 + (-4) \times 2)$

V Nommer le résultat d'un calcul.

Nous dirons qu'un calcul est une somme (respectivement une différence, respectivement un produit) si la dernière opération effectuée en respectant les priorités opératoires est une addition (respectivement une soustraction, respectivement une multiplication).

À moins de devoir distinguer somme et différence, les résultats d'une addition et d'une soustraction seront très souvent indifféremment appelés des sommes.

Ainsi $2 \times (-2) + 4 \times (3-1)$ et $3 - (4-2) \times (5-2)$ sont des sommes tandis que $(3-1) \times (-6-1)$ est un produit.

Exercice 3

Indiquez si les calculs suivants sont des sommes ou des produits et effectuez les calculs à la main.

1. $A = 5 + 2 - 5 \times 3$
2. $B = (3+2) \times 5$
3. $C = (3+2) + (2-5)(3+2)$
4. $D = (2+5)(1-3)$

VI Exercices.

Exercice 4

Calculez en ligne en détaillant.

1. $A = -2 \times (-4+2) - [3 - 2 \times (5-3)]$.
2. $B = -3 \times 2 - 4 + 3 - 7 + 8$.
3. $C = [(-5+7) + 6] - 5$.
4. $D = [(3-2) \times (4-1)](5-7)$.

5. $E = -3 \times -2 \times (-1) \times 4.$
6. $F = -4 \times (2 - 5) \times (3 + 1).$