Calcul numérique.

Vous remarquerez que dans cette leçon nous parlons d'expression fractionnaire et non pas de fraction. En effet les règles vues ici restent valables pour des expressions faisant intervenir des inconnues ou des variables x voire d'autres objets.

I Les quatre opérations classiques.

Addition.

$$2 + 3 = 5.$$

- Les nombres $2 + 3$ ou 5 sont appelés la *somme* de l'addition.
- Les nombres 2 et 3 sont appelés les *termes* de la somme $2 + 3 = 5$.
- Le symbole $+$ se lit « plus ».
- L'addition est *commutative* : si a et b sont des nombres alors $a + b = b + a$.
- L'addition est *associative* : si a, b et c sont des nombres alors $a+(b+c) = (a+b)+c$. Nous simplifierons donc l'écriture en $a + b + c$.
- Le nombre 0 est appelé un *élément neutre pour l'addition* : si a est un nombre alors $a + 0 = 0 + a = a$.
- Un nombre b est appelé *l'opposé* du nombre a si $a + b = 0$. On note alors $b = -a$.

Soustraction.

$$7 - 3 = 4.$$

- Les nombres $7 - 3$ ou 4 sont appelés la *différence* de la soustraction.
- Le symbole $-$ se lit « moins ».
- La soustraction n'est ni commutative, ni associative et elle n'admet pas d'élément neutre.

Multiplication.

$$2 \times 3 = 6.$$

- Les nombres 2×3 ou 6 sont appelés le *produit* de la multiplication.
- Les nombres 2 et 3 sont appelés les *facteurs* du produit $2 \times 3 = 6$.

- Le symbole $\times$ se lit « fois ». Lorsque cela ne gêne pas la compréhension on simplifie l'écriture en enlevant le symbole $\times$: $2\times(3+4)=2(3+4)$.
- La multiplication est *commutative* : si a et b sont des nombres alors $a\times b=b\times a$.
- La multiplication est *associative* : si a, b et c sont des nombres alors $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$. Nous simplifierons donc l'écriture en $a\times b\times c$.
- Le nombre 1 est appelé un *élément neutre pour la multiplication* : si a est un nombre alors $a\times 1=1\times a=a$.
- Un nombre b est appelé *l'inverse* du nombre a si $a\times b=1$. On note alors $b=a^{-1}$ ou $b=\frac{1}{a}$.

Division.

$$\frac{6}{3}=2.$$

- Les nombres $\frac{6}{3}$ ou 2 sont appelés le *quotient* de la division.
- 6 est appelé le *numérateur* et 3 le *dénominateur*.
- Si l'écriture fractionnaire est l'écriture usuelle au lycée il est encore possible de trouver les symbole $\div$, $/$, ou $:$ qui se lisent « divisé par ».
- La division n'est ni commutative, ni associative et elle n'admet pas d'élément neutre.

II Puissances.

Définition et notation.

Définition 1

Si x est un nombre et n un entier naturel, alors x^n, qui se lit « x puissance n » ou « x exposant n », est le nombre

$$x^n=\underbrace{x\times\cdots\times x}_{n\text{ facteurs}}$$

Produits et quotients de puissances d'un même nombre.

Proposition 1

Soient a un nombre, n et p deux entiers naturels.

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad (a^n)^p = a^{n \times p}$$

Puissance de produit ou quotient.

Proposition 2

Soient a et b deux nombres, et n un entier naturel.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

et si b est non nul :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exercices.

Exercice 1.

Exercices 11 à 14 page 98 du manuel Indice.

Exercice 2.

Exercices 47 page 100 à 58 page 101 du manuel Indice.

III Priorités opératoires.

Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets (voire accolades). S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction joue le même rôle que des parenthèses : les numérateurs et dénominateurs sont considérés entre parenthèses.

Priorité 2 Les exposants (puissances).

Priorité 3 Les multiplications et division en ligne ($\div$ ou $/$) en allant de gauche à droite.

Priorité 4 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

IV Manipuler les expressions fractionnaires.

Rappelons tous d'abord qu'il est impossible de diviser par 0, ou pour le dire autrement 0 n'est pas inversible.

Par conséquent les quantités qui apparaissent aux dénominateurs dans ce chapitre sont toutes supposées non nulles.

Une simplification et une astuce.

$$\frac{a}{1} = a.$$

Nous nous servirons de cette égalité dans les deux sens : pour simplifier ou pour écrire un nombre sous forme de fraction lorsque nécessaire.

Produit.

$$\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = \frac{a \times x}{b \times y}$$

Simplification par facteur commun.

Nous déduisons de ce qui précède une méthode de simplification d'écriture d'une expression fractionnaire ; il est possible de simplifier un facteur commun aux numérateur et dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{a \times c}{b \times c} &= \frac{a}{b} \times \frac{c}{c} \\ &= \frac{a}{b} \times 1 \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}.$$

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{a\times 1}{1\times b}\\ &= \frac{a}{1}\times\frac{1}{b}\\ &= a\times\frac{1}{b}\end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} = a\times\frac{1}{b}.$$

Inverse.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\times\frac{b}{a} &= \frac{ab}{ba}\\ &= \frac{ab}{ab}\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Expression fractionnaire et signe.

Nous essaierons, si possible, de n'écrire des expressions fractionnaires que positives (si le nombre est négatif le signe moins est mis en évidence devant) :

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$$

Somme.

Pour additionner deux expressions fractionnaires il faut les mettre au même dénominateur.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{x}{y} &= \frac{a\times y}{b\times y}+\frac{b\times x}{b\times y}\\ &= \frac{ay+bx}{by}\end{aligned}$$

C'est une méthode très générale qui fonctionne y compris lorsque nous manipulerons d'autres objets que des nombres.

Différence.

Il s'agit d'une combinaison des deux précédents résultats :

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}-\frac{x}{y} &= \frac{a}{b}+\frac{-x}{y}\\ &= \frac{a\times y}{b\times y}+\frac{b\times(-x)}{b\times y}\\ &= \frac{ay-bx}{by}\end{aligned}$$

Quotient.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} &= \frac{a}{b}\div\frac{x}{y}\\ &= \frac{a}{b}\times\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\\ &= \frac{a}{b}\times\frac{y}{x}\end{aligned}$$

Forme irréductible d'une fraction.

Un entier naturel est dit *premier* si et seulement si il a exactement deux diviseurs distincts positifs.

Théorème 1 - théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier naturel supérieur ou égale à 2 admet une décomposition en facteurs premiers unique à l'ordre des facteurs près.

Exercice 3.
Déterminez la décomposition en facteurs premiers de 180.

Le nombre $\frac{1}{2}$ peut encore s'écrire $\frac{2}{4}$. L'écriture fractionnaire d'un nombre n'est pas unique. Ceci pouvant produire de la confusion les mathématiciens ont retenu une écriture fractionnaire qui est unique : *la forme irréductible d'une fraction*.

Corollaire 1

Tout nombre rationnel s'écrit de façon unique comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur n'ont pas d'autre commun diviseur que 1 (ou -1).

Exercice 4.
Donnez la forme irréductible du nombre rationnel $\dfrac{120}{300}$.

Exercices.

Exercice 5.
Exercices 7 à 10 page 98 du manuel Indice.

Exercice 6.
Exercices 37 à 46 page 100 du manuel Indice.