Calcul numérique.

Vous remarquerez que dans cette leçon nous parlons d'expression fractionnaire et non pas de fraction. En effet les règles vues ici restent valables pour des expressions faisant intervenir des inconnues ou des variables x voire d'autres objets.

I Les quatre opérations classiques.

Addition.

$$2 + 3 = 5.$$

- Les nombres $2 + 3$ ou 5 sont appelés la *somme* de l'addition.
- Les nombres 2 et 3 sont appelés les *termes* de la somme $2 + 3 = 5$.
- Le symbole $+$ se lit « plus ».
- L'addition est *commutative* : si a et b sont des nombres alors $a + b = b + a$.
- L'addition est *associative* : si a, b et c sont des nombres alors $a+(b+c) = (a+b)+c$. Nous simplifierons donc l'écriture en $a + b + c$.
- Le nombre 0 est appelé un *élément neutre pour l'addition* : si a est un nombre alors $a + 0 = 0 + a = a$.
- Un nombre b est appelé *l'opposé* du nombre a si $a + b = 0$. On note alors $b = -a$.

Soustraction.

$$7 - 3 = 4.$$

- Les nombres $7 - 3$ ou 4 sont appelés la *différence* de la soustraction.
- Le symbole $-$ se lit « moins ».
- La soustraction n'est ni commutative, ni associative et elle n'admet pas d'élément neutre.

Multiplication.

$$2 \times 3 = 6.$$

- Les nombres 2×3 ou 6 sont appelés le *produit* de la multiplication.
- Les nombres 2 et 3 sont appelés les *facteurs* du produit $2 \times 3 = 6$.

- Le symbole $\times$ se lit « fois ». Lorsque cela ne gêne pas la compréhension on simplifie l'écriture en enlevant le symbole $\times$: $2 \times (3+4) = 2(3+4)$.
- La multiplication est *commutative* : si a et b sont des nombres alors $a \times b = b \times a$.
- La multiplication est *associative* : si a, b et c sont des nombres alors $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$. Nous simplifierons donc l'écriture en $a \times b \times c$.
- Le nombre 1 est appelé un *élément neutre pour la multiplication* : si a est un nombre alors $a \times 1 = 1 \times a = a$.
- Un nombre b est appelé *l'inverse* du nombre a si $a \times b = 1$. On note alors $b = a^{-1}$ ou $b = \frac{1}{a}$.

Division.

$$\frac{6}{3} = 2.$$

- Les nombres $\frac{6}{3}$ ou 2 sont appelés le *quotient* de la division.
- 6 est appelé le *numérateur* et 3 le *dénominateur*.
- Si l'écriture fractionnaire est l'écriture usuelle au lycée il est encore possible de trouver les symbole $\div$, $/$, ou $:$ qui se lisent « divisé par ».
- La division n'est ni commutative, ni associative et elle n'admet pas d'élément neutre.

II Puissances.

Définition et notation.

Définition 1

Si x est un nombre et n un entier naturel, alors x^n, qui se lit « x puissance n » ou « x exposant n », est le nombre

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}$$

Remarques.

1. $x^0 = 1$ et $x^1 = x$.
2. Lorsque l'exposant est 2 comme dans x^2 on dit « x au carré ».
3. Lorsque l'exposant est 3 comme dans x^3 on dit « x au cube ».

4. Par convention, si x est non nul, nous noterons son *inverse*

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

En généralisant nous noterons pour n entier naturel

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Produits et quotients de puissances d'un même nombre.

Proposition 1

Soient a un nombre, n et p deux entiers naturels.

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad \left(a^n\right)^p = a^{n \times p}$$

Démonstration 1

Ce résultat se démontre en utilisant la définition de la puissance.

$$\begin{aligned} x^n \times x^p &= \left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}\right) \times \left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{p \text{ fois}}\right) \\ &= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{p \text{ fois}} \\ &= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n+p \text{ fois}} \\ &= x^{n+p} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \left(x^n\right)^p &= \underbrace{\left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}\right) \times \cdots \times \left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}\right)}_{p \text{ fois}} \\ &= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \times p \text{ fois}} \\ &= x^{n \times p} \end{aligned}$$

Remarques.

1. Ce résultats concerne les puissances d'un même nombre a.
2. Ce résultat sera très important pour développer les expressions algébriques faisant intervenir des lettres qu'il est impossible d'évaluer numériquement : $x^2(x-1) = x^2(x^1-1) = x^2 \times x - x^2 \times 1 = x^{2+1} - x^2 = x^3 - x^2$.
3. Il n'y a pas de résultat équivalent avec l'addition. Par exemple : $3^2 + 3^3 = 36$ et $3^{2+3} = 243$. Les puissances d'une somme s'obtiennent avec des formules comme la distributivité, la double distributivité, les identités remarquables.
4. Ces propriétés sont encore valables pour des exposants négatifs en utilisant les résultats sur le quotients (confer infra).

Puissance de produit ou quotient.

Proposition 2

Soient a et b deux nombres, et n un entier naturel.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

et si b est non nul :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Démonstration 2

* Par définition de la puissance :

$$(a \times b)^n = (a \times b) \times (a \times b) \times \cdots \times (a \times b)$$

Le produit étant associatif :

$$= a \times b \times a \times b \times \cdots \times a \times b$$

Le produit étant commutatif nous pouvons écrire les facteurs dans l'ordre qui nous convient :

$$\begin{aligned}(a \times b)^n &= a \times a \times \cdots \times a \times b \times b \times \cdots \times b \\ &= a^n \times b^n\end{aligned}$$

* $\frac{a}{b} = a \times \frac{a}{b}$ donc en appliquant le précédente résultat

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^n &= a^n \times \left(\frac{1}{b}\right)^n \\ &= a^n \times \left(b^{-1}\right)^n\end{aligned}$$

D'après la proposition précédente :

$$\begin{aligned}&= a^n \times b^{-1\times n} \\ &= a^n \times \left(b^n\right)^{-1} \\ &= a^n \times \frac{1}{b^n} \\ &= \frac{a^n}{b^n}\end{aligned}$$

Remarques.

1. Ce résultat concerne une même puissance de différents nombres.
2. Ce résultat ne fonctionne pas pour une somme ou une soustraction : $(5+3)^2 \neq 5^2 + 3^2$.

Exercices.

Exercice 1.
Exercices 11 à 14 page 98 du manuel Indice.

Exercice 2.
Exercices 47 page 100 à 58 page 101 du manuel Indice.

III Priorités opératoires.

Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets (voire accolades). S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction joue le même rôle que des parenthèses : les numérateurs et dénominateurs sont considérés entre parenthèses.

Priorité 2 Les exposants (puissances).

Priorité 3 Les multiplications et division en ligne (÷ ou /) en allant de gauche à droite.

Priorité 4 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

IV Manipuler les expressions fractionnaires.

Rappelons tous d'abord qu'il est impossible de diviser par 0, ou pour le dire autrement 0 n'est pas inversible.

Par conséquent les quantités qui apparaissent aux dénominateurs dans ce chapitre sont toutes supposées non nulles.

Une simplification et une astuce.

$$\frac{a}{1} = a.$$

Nous nous servirons de cette égalité dans les deux sens : pour simplifier ou pour écrire un nombre sous forme de fraction lorsque nécessaire.

Produit.

$$\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = \frac{a \times x}{b \times y}$$

Simplification par facteur commun.

Nous déduisons de ce qui précède une méthode de simplification d'écriture d'une expression fractionnaire ; il est possible de simplifier un facteur commun aux numérateur et dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{a \times c}{b \times c} &= \frac{a}{b} \times \frac{c}{c} \\ &= \frac{a}{b} \times 1 \\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}.$$

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{a\times 1}{1\times b}\\ &= \frac{a}{1}\times\frac{1}{b}\\ &= a\times\frac{1}{b}\end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} = a\times\frac{1}{b}.$$

Inverse.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\times\frac{b}{a} &= \frac{ab}{ba}\\ &= \frac{ab}{ab}\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Expression fractionnaire et signe.

Nous essaierons, si possible, de n'écrire des expressions fractionnaires que positives (si le nombre est négatif le signe moins est mis en évidence devant) :

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$$

Somme.

Pour additionner deux expressions fractionnaires il faut les mettre au même dénominateur.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{x}{y} &= \frac{a\times y}{b\times y}+\frac{b\times x}{b\times y}\\ &= \frac{ay+bx}{by}\end{aligned}$$

C'est une méthode très générale qui fonctionne y compris lorsque nous manipulerons d'autres objets que des nombres.

Différence.

Il s'agit d'une combinaison des deux précédents résultats :

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}-\frac{x}{y} &= \frac{a}{b}+\frac{-x}{y}\\ &= \frac{a\times y}{b\times y}+\frac{b\times(-x)}{b\times y}\\ &= \frac{ay-bx}{by}\end{aligned}$$

Quotient.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} &= \frac{a}{b}\div\frac{x}{y}\\ &= \frac{a}{b}\times\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\\ &= \frac{a}{b}\times\frac{y}{x}\end{aligned}$$

Forme irréductible d'une fraction.

Un entier naturel est dit *premier* si et seulement si il a exactement deux diviseurs distincts positifs.

Exemples.

1. 12 n'est pas un nombre premier puisqu'il est divisible par 2 et 3.
2. Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
3. 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

Théorème 1 - théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier naturel supérieur ou égale à 2 admet une décomposition en facteurs premiers unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration 3

Hors programme.

Exemples.

1. $12 = 2 \times 2 \times 3$ et 2 et 3 sont bien des nombres premiers.
2. $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.
3. $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$.

Remarques.

1. Pour que l'écriture de la décomposition soit unique la convention est d'écrire une seule fois chaque facteur premier à la puissance convenable et d'écrire les facteurs dans l'ordre croissant. On n'écrira pas $3 \times 2 \times 3$ mais 2×3^2.
2. D'après ce théorème tous les résultats sur les nombre entiers naturels peuvent se ramener à des résultats sur les nombres premiers.

Exercice 3.

Déterminez la décomposition en facteurs premiers de 180.

Correction exercice 3

Pour cette question nous pouvons nous contenter d'exhiber la réponse. Regardons le travail à faire au brouillon.

Nous divisons autant de fois que possible par les nombres premiers en allant du plus petit au plus grand.

Étape 1 • 180 est divisible par 2 donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & \end{array}$$

Étape 2 • 90 est divisible par 2 donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & \end{array}$$

Étape 3 • 45 n'est pas divisible par 2, nous essayons donc avec le nombre premier suivant 3. 45 est bien divisible par 3 puisque $4 + 5 = 9$ donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & \end{array}$$

En procédant ainsi de proche en proche nous obtenons finalement

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi : $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.
Finalement nous écrirons uniquement

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

Le nombre $\frac{1}{2}$ peut encore s'écrire $\frac{2}{4}$. L'écriture fractionnaire d'un nombre n'est pas unique. Ceci pouvant produire de la confusion les mathématiciens ont retenu une écriture fractionnaire qui est unique : *la forme irréductible d'une fraction*.

Corollaire 1

Tout nombre rationnel s'écrit de façon unique comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur n'ont pas d'autre commun diviseur que 1 (ou -1).

Exemples.

1. $\frac{1}{3}$ est une forme irréductible.
2. $\frac{14}{21}$ n'est pas une forme irréductible puisque 14 et 21 admettent 7 pour diviseur commun : $\frac{14}{21} = \frac{2\times7}{3\times7} = \frac{2}{3}$.
3. En toute rigueur la forme irréductible de l'entier 5 devrait s'écrire $\frac{5}{1}$ cependant l'usage veut que nous usions de l'écriture la plus simple : 5.

Remarques.

1. Des nombres entiers qui n'ont pas de diviseur commun autre que 1 ou -1 sont dits *premiers entre eux*.
2. Pour trouver la forme irréductible d'une fraction il faut recherche le plus grand facteur commun au numérateur et au dénominateur qu'on appelle le P.G.C.D. (plus grand commun diviseur). Le P.G.C.D. s'obtient grâce à l'algorithme d'Euclide.
3. Dans la pratique pour trouver la forme irréductible nous utiliserons des décompositions en facteurs premiers.

Exercice 4.

Donnez la forme irréductible du nombre rationnel $\dfrac{120}{300}$.

Correction exercice 4

$\frac{120}{300} = \frac{2}{5}$.

Formulaire.

Exercices.

Exercice 5.

Exercices 7 à 10 page 98 du manuel Indice.

Exercice 6.

Exercices 37 à 46 page 100 du manuel Indice.