

Table des matières

1	Rappels.	3
I	Calcul numérique. Évaluer une expression littérale.	4
2	Algèbre.	10
I	Expressions fractionnaires.	11
II	Puissances.	23
III	Identités remarquables.	34
IV	Développer des expressions polynomiales.	40
V	Équations du premier degré.	48
VI	Racine carrée.	59
VII	Équation produit-nul.	68
VIII	Inégalités.	76
IX	Factoriser une expression polynomiale.	83
X	Équations quotients.	89
XI	Systèmes linéaires.	94
3	Ensembles.	107
I	Généralités sur les ensembles.	108
II	Les entiers.	115
III	Les rationnels.	122
IV	Intervalles.	126
V	Les décimaux et l'écriture décimale.	134
4	Statistiques.	136
5	Probabilité.	136
I	Modéliser les probabilités avec des ensembles.	137
II	La loi uniforme discrète.	145
6	Analyse.	167
I	Généralités sur les fonctions.	168
II	Fonctions de référence.	184
III	Signe des fonctions et inéquations.	193
IV	Monotonie des fonctions.	209
7	Géométrie plane.	238
I	Vecteurs (introduction par les coordonnées).	239
II	Quadrilatères.	262
III	Colinéarité et droites.	271
IV	Équations cartésiennes de droites.	300

	V	Représentation paramétrique d'une droite.	307
	VI	Équations réduites de droites.	309
8		Géométrie dans l'espace.	316
9		Économétrie.	316
10		Arithmétique.	316
	I	Diviseurs et multiples.	317

Partie 1. Rappels.

I Calcul numérique. Évaluer une expression littérale.

Les résultats présentés sont des rappels. Ils sont l'occasion de pratiquer le calcul numérique sans calculatrice.

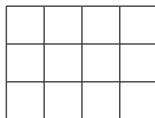
Priorité opératoire dans les calculs numériques avec additions, multiplications et parenthèses.

L'addition est l'opération qui correspond à la mise en commun de deux paquets distincts. Elle est aussi utilisée pour signifier une variation.

Cette année il faudra prendre l'habitude de considérer la soustraction comme l'addition de l'opposé : $3 - 4 = 3 + (-4)$. Cela facilite de nombreux calculs. Cependant la soustraction à pour objet d'évaluer la différence, l'écart, les variations.

La traduction géométrique (une traduction toujours très importante en mathématique et source de nouveaux résultats) de la multiplication est le calcul d'aire d'un rectangle.

Ainsi 3×4 est le nombre de carrés unités recouvrant un rectangle dont un côté correspond à 3 carrés unités et l'autre à 4 carrés unités.



EXERCICE 1. Effectuez les calculs suivants à la main.

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| a) $2 + 7 + 3$. | b) $2 \times 3 + 7$. | c) $2 + 3 \times 7$. | d) $2 \times 3 \times 7$. |
| e) $(2 + 3) \times 7$. | f) $2 \times (3 + 7)$. | g) $2 \times 3 + 4 \times 5$. | h) $2 \times (3 + 4) \times 5$. |
| i) $2 + (3 + 4) \times 5$. | j) $(2 + 3 \times 4) \times 5$. | k) $2 + 3 \times (4 + 5)$. | l) $(2 + 3) \times (4 + 5)$. |

Remarques.

1. Pour vérifier que vous comprenez les priorités opératoires vous pouvez écrire le programme de calcul. Pour $(3 - 4) \times 6 : 3 \xrightarrow{-4} -1 \xrightarrow{\times 6} -6$.

Évaluer une expression littérale.

Une expression littérale est une formule de calcul dans laquelle certains des nombres sont représentés par des lettres.

Il est très courant en mathématique de représenter un objet (droits, ensembles, nombres, fonctions, etc) par une lettre. On utilise une seule lettre pour représenter un objet (hormis cas particulier comme les objets géométriques $[AB]$). Si on souhaite appeler plusieurs nombres x pour les différencier on utilise une notation en indice : $x_1, x_2, \dots$. Les nombres sous la ligne d'écriture ne sont pas des calculs mais une simple numérotation.

Évaluer une expression littérale c'est effectuer le calcul indiqué par l'expression en remplaçant les lettres par des nombres.

EXERCICE 2. Évaluer la valeur de $f(x)$ pour la valeur x proposée.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| a) $x = 2$ et $f(x) = 3x + 1$. | b) $x = -1$ et $f(x) = -2x + 3$. |
| c) $x = 1$ et $f(x) = 3(x + 1) - 7$. | d) $x = -1$ et $f(x) = 3(1 - x)$. |
| e) $x = 5$ et $f(x) = 6x - 8x + 12$. | f) $x = 6$ et $f(x) = x^2 + 1$. |
| g) $x = 2$ et $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. | h) $x = -2$ et $f(x) = x^2 + 7$. |
| i) $x = -3$ et $f(x) = 4 - x^2$. | j) $x = 5$ et $f(x) = 2 - 3x^2 + x$. |

Égalité avec expressions littérales : l'équation.

Une équation est une égalité comportant des expressions littérales. *Vérifier si un nombre a est solution d'une équation* consiste à évaluer les expressions littérales avec le nombre a et vérifier si on a, ou pas, l'égalité.

EXERCICE 3. Déterminez si le nombre a est solution de l'équation (E) .

- | | |
|---|---|
| a) $a = 2$ et $(E) : x - 3 = -1$. | b) $a = 1$ et $(E) : x - 1 = 0$. |
| c) $a = 3$ et $(E) : 2x + 3 = 9$. | d) $a = -2$ et $(E) : x^2 + 4 = 0$. |
| e) $a = -3$ et $(E) : 2x^2 - 16 = 2$. | f) $a = 25$ et $(E) : 13x - 300 = 25$. |
| g) $a = 2$ et $(E) : (x - 2)(2x - 4) = 0$. | |

Simplifier une écriture.

En mathématique on essaie, autant que possible, de n'écrire que ce qui est indispensable : aucune fioriture. Donner l'écriture la plus simple d'une expression s'appelle *simplifier*. Ce n'est pas vraiment du calcul mais une ré-écriture comportant uniquement les informations. Cette aspiration à la simplicité fait partie de ce que l'on considère comme une rédaction élégante en mathématique.

Exemples.

1. Comme $(-3) \times 2$ et -3×2 donnent le même résultat on écrit uniquement le plus simple : -3×2 .

EXERCICE 4. Dans les expressions suivantes supprimez les parenthèses inutiles.

- | | |
|--|---|
| a) $((4 \times 9) + (3 \times 5))$. | b) $(3 + 5) \times (5 \times 9)$. |
| c) $(3 + 5) + (5 \times 9)$. | d) $(5 - (3 + 1))$. |
| e) $(2 \times 10) + ((10 \times 15) + (15 \times 20))$. | f) $((9 \div 8) \times 5 + (8 \times 7))$. |
| g) $2 \times (3 + (5 \times 4))$. | h) $(2 \times (3 \times (5 \times (6 + 7))))$. |

EXERCICE 5. Simplifiez les écritures suivantes.

- | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|-----------------------|
| a) $2 \times a$. | b) $a \times 7$. | c) $a \times b \times 2$. | d) $a \times 2 \times 3$. | e) $a \times 2b$. | f) $2a \times 3b$. |
| g) $2 \times a \times a$. | h) $a \times b \times 3$. | i) $5 \times 2ab$. | j) $3a \times 5b$. | k) $a \times 5 \times 2ab$. | l) $3t \times 2,5t$. |

Reconnaître la dernière opération.

Dans certaines situations on préférera avoir une addition qu'une multiplication ou le contraire. Pour passer de l'un à l'autre on développe et on factorise. Mais pour cela il faut être capable de reconnaître le (dernier) calcul auquel on a à faire.

Les différences peuvent être confondues avec les sommes et les quotients avec les produits : seuls les sommes et produits nous intéressent. Le quotient est la multiplication par l'inverse et la différence c'est la somme par l'opposé.

EXERCICE 6. Dites si le calcul est un produit ou une somme. Par exemple $2 \times 7 + 3$ est une somme car la dernière opération effectuée (en respectant les priorités opératoires) est une addition.

- | | | | | |
|----------------------------|--------------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------------|
| a) $2 - 3$. | b) 8×7 . | c) $3 + 2$. | d) $2 + 3 \times 4$. | e) $2 \times 3 + 4$. |
| f) $2 \times 3 \times 4$. | g) $(2 + 3) \times 4$. | h) $3 + 6 + 7$. | i) $(3 + 2)(2 + 5)$. | j) $\frac{1}{3}$. |
| k) $\frac{1}{3 + 5}$. | l) $\frac{2 - 3}{4 + 2} - 1$. | m) $\frac{2 + 8}{3}$. | n) $\frac{2}{5} + 7$. | o) $4 \times \frac{3}{7}$. |

EXERCICE 7. Dites si le calcul est un produit ou une somme. Par exemple $2x + 3$ est une somme car la dernière opération effectuée (en respectant les priorités opératoires) est une addition.

- | | | | |
|--|-------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| a) $2x$. | b) $x + 4$. | c) $7 - x$. | d) $\frac{x}{12}$. |
| e) $2 + 3 \times 7$. | f) $3y + 4x$. | g) $\frac{3+x}{2}$. | h) $\frac{x}{2+y} - 4$. |
| i) $(3x + y) \times 4 + \frac{1}{x}$. | j) $(3x + 1)(4 - 2x)$. | k) $\frac{(x+1)x}{2x^2 + 1}$. | l) $(2x - 7)^2$. |
| m) $(3 - 2x)^2 - 4$. | n) $x^2 - \alpha^2$. | o) $3x^2 + x$. | p) $x \times \frac{2}{3+x}$. |
| q) $x^2 + 3x + 4$. | r) $3(x - 2)^2 + 1$. | | |

Lorsqu'on travail, sans calculette, avec une fraction il faut autant que possible utiliser son écriture avec les plus petits nombres : la forme irréductible.

EXERCICE 8. Donnez la forme irréductible des fractions suivantes. Par exemple : $\frac{42}{70} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 5 \times 7} = \frac{3}{5}$.

- | | | | | | | | | | |
|----------------------|------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $\frac{27}{18}$. | b) $\frac{35}{98}$. | c) $\frac{66}{42}$. | d) $\frac{26}{52}$. | e) $\frac{17}{11}$. | f) $\frac{28}{56}$. | g) $\frac{24}{36}$. | h) $\frac{180}{200}$. | i) $\frac{112}{64}$. | j) $\frac{198}{462}$. |
| k) $\frac{18}{78}$. | l) $\frac{340}{210}$. | | | | | | | | |

Rappel des règles de calcul sur les fractions.

- Pour additionner ou soustraire des fractions il faut absolument qu'elles soient au même dénominateur. Si c'est le cas on additionne ou soustrait uniquement les numérateurs.
- Pour le produit de deux fractions il suffit de diviser le produit des numérateurs par le produit des dénominateurs.
- Pour faire un quotient (division) de fractions il suffit de faire le produit de la fraction au numérateur par l'inverse de la fraction au dénominateur.

EXERCICE 9. Calculez à la main et donnez le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

- | | | | | |
|---|--|--|--|---|
| a) $\frac{13}{7} + \frac{18}{7}$. | b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{7}$. | c) $\frac{4}{3} + 17$. | d) $\frac{28}{4} - \frac{32}{12}$. | e) $\frac{4}{6} \times \frac{12}{32}$. |
| f) $\frac{1}{2} \times 248$. | g) $\frac{3 \times 28}{280}$. | h) $\frac{13}{2} \times \frac{6}{11}$. | i) $\frac{23}{17} \times \frac{3}{4}$. | j) $\frac{\frac{25}{12}}{\frac{35}{12}}$. |
| k) $\frac{\frac{12}{4}}{\frac{1}{4}}$. | l) $\frac{\frac{2+3}{4}}{\frac{8}{2+1}}$. | m) $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{11} \right)$. | n) $\frac{3}{7} + 3 + \frac{1}{4} \times 28$. | o) $-\frac{3}{7} + \frac{5}{14} \times 2$. |
| p) $\frac{2}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{2}$. | q) $3 \times \frac{1}{3} + 14$. | r) $\frac{88}{288} + 3$. | s) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. | t) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)^2$. |

EXERCICE 10. Calculez.

- | | | | | | | |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------|----------------------|--------------------------|---------------------|-------------------------|
| a) 3^2 . | b) 2^3 . | c) $(2^2)^3$. | d) $(-5)^2$. | e) 0^{15} . | f) $(-1)^{18}$. | g) $(-1)^{13}$. |
| h) $(-18)^3$. | i) 1^{13} . | j) 4^2 . | k) 2^5 . | l) $0,1^{-1}$. | m) 9^0 . | n) $\frac{3^5}{3^2}$. |
| o) $\frac{2^4}{2^{11}}$. | p) $\frac{7^{11}}{7^{11}}$. | q) $\frac{6^2}{6^0}$. | r) $\frac{9}{9^3}$. | s) $7^5 \times 7^{-3}$. | t) $9^2 \times 9$. | u) $10^6 \times 10^7$. |
| v) $2^{-4} \times 2^{-1}$. | w) $5^8 \times 5^{10}$. | | | | | |

EXERCICE 11. Écrivez sous forme d'une seule fraction.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$. b) $\left(\frac{-5}{2}\right)^2$. c) $\left(\frac{6}{8}\right)^3$. d) $\left(\frac{1}{7}\right)^3$.

L'écriture scientifique est importante pour les valeur approchées et la détermination des ordres de grandeur chers aux physiciens.

EXERCICE 12. Donnez la notation scientifique des nombres suivants.

a) 1 985. b) $314\,159 \times 10^{-5}$. c) 12 milliards.
d) $7,3 \times 10^4$. e) 52. f) 320 millions.
g) 91 000. h) $0,15 \times 10^{-7}$. i) $0,013 \times 10^{-4}$.
j) $2 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^2$. k) $7 \cdot 10^5 \times 11 \cdot 10^{-2}$. l) $\frac{4}{3} \times 3,141 \times (10^{-1})^3$.
m) $6,02 \cdot 10^{23} \times 238$. n) $-1,602 \times 10^{-19} \times 37$. o) $(4,1 \times 10^{-3})^2$.
p) $(5 \cdot 10^{-6})^2 \times 3 \cdot 10^{-6}$. q) $(8 \cdot 10^{-4})^3 \times 2^{15}$.

Calcul manuel et mental.

Dans la mesure ou les calculs manuel et mental reviennent au goût du jour rappelons certaines choses : les multiplications par 25 se font en regroupant les 25 par 4, les divisions par 4 se font en divisant deux fois par 2, multiplier par 5 c'est multiplier par 10 puis diviser par 2.

EXERCICE 13. Calculez les produits suivants :

a) 1×25 . b) 2×25 . c) 3×25 . d) 4×25 . e) 6×25 . f) 9×25 . g) 12×25 . h) 26×25 .

EXERCICE 14. Calculez les produits suivants.

a) 23×5 . b) 34×5 . c) 37×5 . d) 39×5 . e) 47×5 . f) 51×5 . g) 67×5 . h) 63×5 .
i) 87×5 . j) 93×5 .

Le calcul manuel ou mental se fait, en général sur des nombres entiers. Pour calculer avec des décimaux le plus simple et de se ramener à des entiers le plus petit possible via une écriture semblable à l'écriture scientifique (autrement dit calculer avec les entiers puis déplacer la virgule) : $1,2 \times 0,8 = 1,2 \times 10^{-1} \times 8 \times 10^{-1} = 12 \times 8 \times 10^{-1-1} = 96 \times 10^{-2} = 0,96$.

EXERCICE 15. Donnez le résultat du calcul sous forme décimale.

a) $0,8 \times 0,016$ b) $32 \times 0,04$. c) $0,6 \times 3$. d) $\frac{0,24}{0,06}$. e) $\frac{3,24}{200}$. f) $\frac{0,7 \times 1,8}{0,06}$.

Exercices.

EXERCICE 16. Calculez $f(a)$ sous forme d'une fraction irréductible pour la valeur proposée pour a .

a) $f(x) = 3x + 2$ et $a = -1$. b) $f(x) = x^2 - 3$ et $a = -2$.
c) $f(x) = -2x^3 + 1$ et $a = 2$. d) $f(x) = \frac{-2x + 1}{5x}$ et $a = -7$.

Corrections.

Exercice 1.

- a) $2 + 7 + 3 = 12$. b) $2 \times 3 + 7 = 13$. c) $2 + 3 \times 7 = 23$. d) $2 \times 3 \times 7 = 42$.
e) $(2 + 3) \times 7 = 35$. f) $2 \times (3 + 7) = 20$. g) $2 \times 3 + 4 \times 5 = 26$. h) $2 \times (3 + 4) \times 5 = 70$.
i) $2 + (3 + 4) \times 5 = 37$. j) $(2 + 3 \times 4) \times 5 = 70$. k) $2 + 3 \times (4 + 5) = 29$. l) $(2 + 3) \times (4 + 5) = 45$.

Exercice 2.

- a) $f(2) = 3 \times 2 + 1 = 7$. b) $f(-1) = -2 \times (-1) + 3 = 5$. c) $f(1) = 3(1 + 1) - 7 = -1$.
d) $f(-1) = 3(1 - (-1)) = 6$. e) $f(5) = 6 \times 5 - 8 \times 5 + 12 = 2$. f) $f(6) = 6^2 + 1 = 37$.
g) $f(2) = 3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 5 = 13$. h) $f(-2) = (-2)^2 + 7 = 11$. i) $f(-3) = 4 - (-3)^2 = -5$.
j) $f(5) = 2 - 3 \times 5^2 + 5 = -68$.

Exercice 3.

- a) Oui. b) Oui. c) Oui. d) Non. e) Oui. f) Oui. g) Oui.

Exercice 4.

- a) $4 \times 9 + 3 \times 5$. b) $(3 + 5) \times 5 \times 9$. c) $3 + 5 + 5 \times 9$.
d) $5 - (3 + 1)$. e) $2 \times 10 + 10 \times 15 + 15 \times 20$. f) $9 \div 8 \times 5 + 8 \times 7$.
g) $2 \times (3 + 5 \times 4)$. h) $2 \times 3 \times 5 \times (6 + 7)$.

Exercice 5.

- a) $2a$. b) $7a$. c) $2ab$. d) $6a$. e) $2ab$. f) $6ab$. g) $2a^2$. h) $3ab$. i) $10ab$.
j) $15ab$. k) $10a^2b$. l) $7,5t^2$.

Exercice 6.

- a) Somme (différence). b) Produit. c) Somme. d) Somme.
e) Somme. f) Produit. g) Produit. h) Somme.
i) Produit. j) Produit (quotient). k) Produit (quotient). l) Somme (différence).
m) Produit (quotient). n) Somme. o) Produit.

Exercice 7.

- a) Produit. b) Somme. c) Différence. d) Quotient. e) Somme. f) Somme.
g) Quotient. h) Différence. i) Somme. j) Produit. k) Quotient. l) Produit.
m) Différence. n) Différence. o) Somme. p) Produit. q) Somme. r) Somme.

Exercice 8.

- a) $\frac{27}{18} = \frac{3^3}{2 \times 3^2} = \frac{3}{2}$. b) $\frac{35}{98} = \frac{5 \times 7}{2 \times 7^2} = \frac{5}{14}$. c) $\frac{66}{42} = \frac{2 \times 3 \times 11}{2 \times 3 \times 7} = \frac{11}{7}$. d) $\frac{26}{52} = \frac{2 \times 13}{2^2 \times 13} = \frac{1}{2}$.
e) $\frac{17}{11}$. f) $\frac{28}{56} = \frac{2^3 \times 7}{2^3 \times 7} = \frac{1}{2}$. g) $\frac{24}{36} = \frac{2^3 \times 3}{2^2 \times 3^2} = \frac{2}{3}$. h) $\frac{180}{200} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2^3 \times 5^2} = \frac{9}{10}$.
i) $\frac{112}{64} = \frac{2^4 \times 7}{2^6} = \frac{7}{4}$. j) $\frac{198}{462} = \frac{2 \times 3^2 \times 11}{2 \times 3 \times 7 \times 11} = \frac{3}{7}$. k) $\frac{195}{78} = \frac{5}{2}$. l) $\frac{340}{210} = \frac{34}{21}$.

Exercice 9.

- a) $\frac{13}{7} + \frac{18}{7} = \frac{31}{7}$. b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{13}{21}$. c) $\frac{4}{3} + 17 = \frac{55}{3}$. d) $\frac{28}{52} - \frac{32}{12} = \frac{52}{12} = \frac{13}{3}$.
e) $\frac{4}{6} \times \frac{12}{32} = \frac{1}{4}$. f) $\frac{1}{5} \times 248 = 124$. g) $\frac{\frac{3 \times 28}{280}}{\frac{12}{10}} = \frac{3}{10}$. h) $\frac{\frac{13}{2} \times \frac{6}{11}}{\frac{2+3}{8}} = \frac{39}{11}$.
i) $\frac{23}{17} \times \frac{3}{4} = \frac{69}{61}$. j) $\frac{\frac{25}{12}}{\frac{35}{30}} = \frac{7}{30}$. k) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 16$. l) $\frac{\frac{4}{8}}{\frac{2+1}{3}} = \frac{10}{3}$.
m) $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{11} \right) = \frac{7}{11}$. n) $\frac{3}{7} + 3 + \frac{1}{4} \times 28 = \frac{73}{7}$. o) $-\frac{3}{7} + \frac{5}{14} \times 2 = \frac{2}{7}$. p) $\frac{2}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{18}$.
q) $3 \times \frac{1}{3} + 14 = 15$. r) $\frac{88}{288} + 3 = \frac{119}{36}$. s) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$. t) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{49}{144}$.

Exercice 10.

- a) $3^2 = 9$. b) $2^3 = 8$. c) $(2^2)^3 = 64$. d) $(-5)^2 = 25$. e) $0^{15} = 0$.
 f) $(-1)^{18} = 1$. g) $(-1)^{13} = -1$. h) $(-18)^3 = 5832$. i) $1^{13} = 1$. j) $4^2 = 16$.
 k) $2^5 = 32$. l) $0,1^{-1} = 10$. m) $9^0 = 1$. n) $\frac{3^5}{3^2} = 9$. o) $\frac{2^{11}}{2^{11}} = \frac{1}{128}$.
 p) $\frac{7^{11}}{7^{11}} = 1$. q) $\frac{6^2}{6^0} = 36$. r) $\frac{9}{9^3} = \frac{1}{81}$. s) $7^5 \times 7^{-3} = 7^2$. t) $9^2 \times 9 = 729$.
 u) $10^6 \times 10^7 = 10^{13}$. v) $2^{-4} \times 2^{-1} = \frac{1}{32}$. w) $5^8 \times 5^{10} = 5^{18}$.

Exercise 11.

- a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$. b) $\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. c) $\left(\frac{6}{8}\right)^5 = \frac{206}{512}$. d) $\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}$.

Exercise 12.

- a) $1985 = 1,985 \times 10^3$. b) $314\,159 \times 10^{-5} = 3,14159$.
 c) $12 \text{ milliards} = 1,2 \times 10^{10}$. d) $7,3 \times 10^4$.
 e) $52 = 5,2 \times 10$. f) $320 \text{ millions} = 3,2 \times 10^8$.
 g) $91\,000 = 9,1 \times 10^4$. h) $0,15 \times 10^{-7} = 1,5 \times 10^{-8}$.
 i) $0,013 \times 10^{-4} = 1,3 \times 10^{-6}$. j) $2 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^2 = 1 \times 10^6$.
 k) $7 \cdot 10^5 \times 11 \cdot 10^{-2} = 7,7 \times 10^4$. l) $\frac{4}{3} \times 3,141 \times (10^{-1})^3$.
 m) $6,02 \cdot 10^{23} \times 238 = 1,43276 \times 10^{26}$. n) $-1,602 \times 10^{-19} \times 37 = 5,9274 \times 10^{-18}$.
 o) $(4,1 \times 10^{-3})^2 = 1681 \times 10^{-5}$. p) $(5 \cdot 10^{-6})^2 \times 3 \cdot 10^{-6} = 7,5 \times 10^{-17}$.
 q) $(8 \cdot 10^{-4})^3 \times 2 \cdot 10^{15} = 1,024 \times 10^6$.

Exercise 13.

- a) $1 \times 25 = 25$. b) $2 \times 25 = 50$. c) $3 \times 25 = 75$.
 d) $4 \times 25 = 100$. e) $6 \times 25 = (1 \times 4 + 2) \times 25 = 150$. f) $9 \times 25 = (2 \times 8 + 1) = 225$.
 g) $12 \times 25 = 3 \times 4 \times 25 = 300$. h) $26 \times 25 = (6 \times 24 + 2) \times 50 = 650$.

Exercise 14.

- a) $23 \times 5 = 115$. b) $34 \times 5 = 170$. c) $37 \times 5 = 185$. d) $39 \times 5 = 195$. e) $47 \times 5 = 235$. f) $51 \times 5 = 255$.
 g) $67 \times 5 = 335$. h) $63 \times 5 = 315$. i) $87 \times 5 = 435$. j) $93 \times 5 = 465$.

Exercise 15.

- a) $0,8 \times 0,016 = 8 \times 16 \times 10^{-1-3} = 0,0128$. b) $32 \times 0,04 = 32 \times 4 \times 10^{-2} = 1,28$.
 c) $0,6 \times 3 = 1,8$. d) $\frac{0,24}{0,06} = \frac{24}{6} = 4$.
 e) $\frac{3,24}{200} = \frac{324}{2} \times 10^{-2-2} = 0,0162$. f) $\frac{0,7 \times 1,8}{0,06} = \frac{7 \times 18}{6} \times 10^{-1-2-(-2)} = 21$.

Exercise 16.

- a) $f(-1) = 3 \times (-1) + 2 = -1$. b) $f(-2) = (-2)^2 - 3 = 1$. c) $f(2) = -2 \times 2^3 + 1 = -15$.
 d) $f(-7) = \frac{-2 \times (-7) + 1}{5 \times (-7)} = -\frac{3}{7}$.

Partie 2. Algèbre.

I Expressions fractionnaires.

Nous rappelons ici les règles de manipulation d'expressions fractionnaires mais pour les utiliser, non pas avec des fractions (division d'entiers), mais avec des expressions littérales. Aucune des règles n'est à appliquer à chaque fois selon ce dont on a besoin on les utilisera ou pas.

Pour les exercices purement numériques (pas d'expressions littérales) vous avez l'occasion de vous entraîner à manipuler votre nouvelle calculatrice pour vérifier vos réponses.

Division.

La division de 6 par 2 s'écrit : $\frac{6}{2} = 2$.

- Les nombres $\frac{6}{3}$ ou 2 sont appelés le *quotient* de la division.
- 6 est appelé le *numérateur* et 3 le *dénominateur*.
- Si l'écriture fractionnaire est l'écriture usuelle au lycée il est encore possible de trouver les symboles $\div$, $/$, ou $:$ qui se lisent « **divisé par** » (le symbole $:$ concerne plutôt les ratios et doit donc être évité, même si c'est l'affichage de votre calculatrice de collège). $\div$ est appelé obélus.
- La division n'est ni commutative, ni associative et elle n'admet pas d'élément neutre.
- Les règles ne sont pas les mêmes selon qu'on utilise une écriture en ligne ou fractionnaire. En effet l'écriture fractionnaire sous-entend des parenthèses autour du numérateur et du dénominateur qui ne sont pas écrites.

Exemples.

1. Pour écrire 63 divisé par 9 on écrit $\frac{63}{9} = 7$ plutôt que $63 \div 9$.
2. $(x + 1) \div x + 5,2 = \frac{x+1}{x} + 5,2$.
3. Si $x \neq 0$ alors $\frac{x}{x} = 1$.

EXERCICE 17. Passez de l'écriture fractionnaire à l'écriture en ligne de la division ou réciproquement.

a) $-\frac{x}{3}$.

b) $\frac{3+x}{4}$.

c) $\frac{4}{2x+7}$.

d) $\frac{x}{3} \times 7$.

e) $3 + 4 \div x$.

f) $3 \div 4 + x$.

g) $(-6 - x) \div 8$.

h) $x \div (8 - x)$.

Division par 0.

Rappelons tout d'abord qu'il est impossible de diviser par 0, ou pour le dire autrement 0 n'est pas inversible.

En effet si 0 possédait un inverse s alors nous aurions $0 \times s = 1$ ce qui contredirait le caractère absorbant de 0 (0 fois n'importe quel nombre égale 0).

Par conséquent les quantités qui apparaissent aux dénominateurs dans ce chapitre sont toutes supposées non nulles.

Une simplification et une astuce.

$$\frac{a}{1} = a.$$

Nous nous servons de cette égalité dans les deux sens : pour simplifier ou pour écrire un nombre sous forme d'une fraction lorsque nécessaire.

Exemples.

$$1. 15,16 = \frac{15,16}{1}.$$

$$2. x^2 + x + 1 = \frac{x^2+x+1}{1}.$$

3. On n'écrit jamais $\frac{5}{1}$ mais 5 sauf pour mettre en évidence que l'on peut l'écrire sous forme fractionnaire.

Produit.

$$\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = \frac{a \times x}{b \times y}.$$

Exemples.

$$1. \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}.$$

$$2. \frac{x^2+1}{3x+2} \times \frac{-x+7}{13} = \frac{(x^2+1)(-x+7)}{(3x+2)13}.$$

EXERCICE 18. Calculez sous forme d'une fraction.

$$a) \frac{1}{7} \times \frac{3}{5}. \quad b) \frac{3}{13} \times \frac{9}{4}. \quad c) \frac{8}{10} \times \frac{100}{50}. \quad d) \frac{8}{7} \times 8. \quad e) 11 \times \frac{8}{7}.$$

En tenant compte de la précédente formule et de l'astuce $a = \frac{1}{\frac{1}{a}}$ on pourra utiliser :

$$a \frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{a}{\frac{c}{b}}.$$

Remarques.

1. On pourra retenir que le produit et le quotient se combinent facilement (contrairement au produit et à la somme) car ce sont deux aspects d'une même opération.

Exemples.

$$1. 3 \times \frac{7}{13} = \frac{3 \times 7}{13} = \frac{21}{13}.$$

$$2. 3 \times \frac{7}{13} = \frac{3}{13} \times 7.$$

$$3. 2 + x \times \frac{3}{4} = 2 + \frac{3x}{4}.$$

$$4. (2+x) \times \frac{x^2-3}{7} = \frac{(2+x)(x^2-3)}{7}$$

EXERCICE 19. Calculez.

$$a) 8 \times \frac{3}{24}. \quad b) \frac{1}{25} \times 225. \quad c) 3 \times \frac{8}{12}. \quad d) \frac{7}{14} \times 4.$$

EXERCICE 20. Écrivez (directement, sans étapes, sans calculs) l'expression littérale sous forme fractionnaire.

$$a) 3 \times \frac{x}{8}. \quad b) \frac{-6}{x} \times (-3). \quad c) (x+2) \times \frac{2}{x+1}. \quad d) x \times \frac{x+1}{2}. \quad e) x^2 \times \frac{3}{x+1}. \\ f) (x+1) \times \frac{2x+1}{-2x+7}.$$

Simplification par facteur commun.

Nous déduisons de ce qui précède une méthode de simplification d'écriture d'une expression fractionnaire; il est possible de simplifier un facteur commun aux numérateur et dénominateur : $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$. Ainsi :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}.$$

Une importante conséquence est que l'écriture d'un nombre n'est pas unique sous forme fractionnaire.

Exemples.

1. $\frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{3}{7}$.
2. $\frac{24}{28} = \frac{6 \times 4}{7 \times 4} = \frac{6}{7}$.
3. $\frac{(-2) \times (-3)}{-5 \times 3} = -\frac{2 \times 3}{5 \times 3} = -\frac{2}{5}$.

EXERCICE 21. Simplifiez autant que possible avant de calculer sous forme d'une fraction.

- a) $\frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 3 \times 11 \times 5}$. b) $\frac{2 \times 7 \times 17}{3 \times 7}$. c) $\frac{9 \times 23}{6 \times 9 \times 8}$. d) $\frac{3 \times 5^2 \times 11}{2 \times 5 \times 11}$.
- e) $\frac{2^3 \times 3^2 \times (-5) \times 7}{2 \times 3^3 \times 7}$. f) $\frac{3 \times (-5) \times (-6)}{(-2)^2 \times (-3) \times 6}$.

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

Rappelons que l'inverse d'un nombre x non nul est le nombre noté x^{-1} qui vérifie $x \times x^{-1} = 1$ et l'inverse de x égale $\frac{1}{x}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 1}{1 \times b} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$
 Résumons :

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

Remarques.

1. Quand une expression fractionnaire ne fait pas intervenir de somme, le plus souvent, on préfère l'écrire sous forme d'un produit en séparant le littéral du numérique. Ainsi l'énergie cinétique s'écrit en général $\frac{1}{2}mv^2$ et non $\frac{mv^2}{2}$. De la même façon on écrira $\frac{2}{3}x^2$ plutôt que $\frac{2x^2}{3}$ (et dans ce cas $\frac{2}{3}$ n'est pas vu comme un calcul mais comme un nombre).
2. Ce n'est pas une démarche à faire systématiquement mais lorsque cela est pertinent selon le contexte.
3. Lorsque sont utilisées des expressions fractionnaires d'expressions fractionnaires c'est le signe égale (ou différent) qui indique la barre de fraction principale. Ainsi $\frac{\frac{2}{3}}{5} \neq \frac{2}{\frac{3}{5}}$.
Écrivez clairement le $=$ à la hauteur de la barre de fraction principale.

Exemples.

1. $\frac{3x}{7} = \frac{1}{7} \times 3x$.
2. $\frac{x}{x+3} = \frac{1}{x+3} \times x$.

EXERCICE 22. Écrivez $f(x)$ sous la forme ax^n où a est un nombre réel et n un entier naturel.

a) $\frac{x^2}{3}$.

b) $\frac{x^3}{7}$.

c) $\frac{x^5}{\frac{1}{3}}$.

d) $\frac{x^7}{\frac{7}{7}}$.

e) $\frac{x^6}{\frac{1}{11}}$.

f) $\frac{x^4}{\frac{1}{13}}$.

Inverse.

$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = 1$. Donc $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Exemples.

1. $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$.

3. $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{5}$.

EXERCICE 23. Donnez les inverses des nombres suivants.

a) $\frac{1}{3}$.

b) 11.

c) $\frac{2}{3}$.

d) $\frac{7}{11}$.

e) $\frac{2}{\frac{3}{5}}$.

f) $\frac{3}{\frac{2}{5}}$.

g) $\frac{5}{\frac{7}{2}}$.

Expression fractionnaire et signe.

Remarquons que $\frac{-a}{b} = \frac{-1 \times a}{b} = -1 \times \frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$. De même : $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Nous essaierons, si possible, de n'écrire des expressions fractionnaires que positives (si le nombre est négatif le signe moins est mis en évidence devant) :

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Exemples.

1. $\frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$.

2. $\frac{6-14}{7} = -\frac{8}{7}$.

3. $\frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$.

4. $\frac{-6}{-13} = \frac{6}{13}$.

5. $\left(\frac{-2}{23}\right)^{-1} = -23$.

EXERCICE 24. Calculez sous forme d'une fraction (sans forcément donner la forme irréductible).

a) $\frac{-3}{2} \times \frac{7}{8}$.

b) $\frac{2-7}{-3} \times \frac{-1}{11}$.

c) $\frac{5-3 \times 2}{-3} \times \frac{-7}{3}$.

d) $\frac{-11}{3} \times \left(-\frac{4}{-2}\right)$.

e) $\frac{-3^2}{4} \times \frac{-5+10}{-2-5}$.

f) $\frac{-3-4}{-5} \times \frac{9}{-11}$.

EXERCICE 25. Calculez sous forme d'une fraction (sans forcément donner la forme irréductible).

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left(\frac{3}{-7}\right)^{-1} & \text{b) } \left(\frac{-2}{\frac{-3}{7}}\right)^{-1} & \text{c) } \left(\frac{-1}{7}\right)^{-1} & \text{d) } \left(\frac{2-5}{3-11}\right)^{-1} \quad \text{e) } \left(\frac{2}{-5} \times \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^{-1} \\ \text{f) } \left(\frac{-11}{2}\right)^{-1} \times \frac{-2}{7} \end{array}$$

Somme.

Pour additionner deux expressions fractionnaires il faut les mettre au même dénominateur.

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{a \times y}{b \times y} + \frac{b \times x}{b \times y}.$$

Si cette écriture donne du sens à la démarche celle qui suit est plus expéditive :

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay + bx}{by}.$$

C'est une méthode très générale qui fonctionne y compris lorsque nous manipulons d'autres objets que des nombres.

Exemples.

$$\begin{array}{l} 1. \quad \frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{2 \times 7 + 3 \times 5}{3 \times 7} = \frac{29}{21}. \\ 2. \quad \frac{2}{3} + 7 = \frac{2}{3} + \frac{7}{1} = \frac{2 \times 1 + 3 \times 7}{3 \times 1} = \frac{23}{3}. \\ 3. \quad -\frac{3}{4} + \frac{7}{11} = \frac{-3}{4} + \frac{7}{11} = \frac{-3 \times 11 + 4 \times 7}{4 \times 11} = -\frac{5}{44}. \\ 4. \quad \frac{x+1}{2} + \frac{7}{x} = \frac{(x+1) \times x + 2 \times 7}{2 \times x} = \frac{x^2 + x + 14}{2x}. \end{array}$$

EXERCICE 26. Donnez la somme sous forme d'une fraction.

$$\text{a) } \frac{2}{11} + \frac{5}{3}. \quad \text{b) } \frac{8}{9} + \frac{5}{7}. \quad \text{c) } \frac{8}{7} + \frac{6}{5}. \quad \text{d) } \frac{9}{7} + \frac{4}{8}. \quad \text{e) } \frac{-2}{11} + \frac{4}{-5}. \quad \text{f) } \frac{-7}{3} + \frac{11}{2}. \quad \text{g) } \frac{6}{7} + \frac{-8}{3}.$$

EXERCICE 27. Donnez la somme sous forme d'une expression fractionnaire.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{2}{x} + \frac{3}{2x-3}. \quad \text{b) } \frac{x}{7} + \frac{5}{x}. \quad \text{c) } \frac{-x}{7} + \frac{4x}{3}. \quad \text{d) } \frac{x+1}{11} + \frac{x}{2}. \quad \text{e) } \frac{x-1}{7} + \frac{x+2}{3}. \\ \text{f) } \frac{x+1}{x} + \frac{-7x}{5}. \end{array}$$

Nous utiliserons souvent la formule de la somme dans l'autre sens :

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Exemples.

$$\begin{array}{l} 1. \quad \frac{3+7}{11} = \frac{3}{11} + \frac{7}{11}. \\ 2. \quad \frac{4x+8}{2} = \frac{4x}{2} + \frac{8}{2} = \frac{1}{2}x + 4 = 2x + 2. \end{array}$$

EXERCICE 28. Soit x un nombre. Écrivez les expressions suivantes comme des fonctions affines (forme $ax + b$ où a et b sont des nombres à préciser).

$$\text{a) } \frac{6x}{2}. \quad \text{b) } \frac{2x}{8}. \quad \text{c) } \frac{3x+9}{3}. \quad \text{d) } \frac{8x+12}{6}. \quad \text{e) } \frac{-33x+27}{3}. \quad \text{f) } \frac{3,2x+4,2}{4}.$$

Différence.

Il s'agit d'une combinaison des deux précédents résultats : $\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{-x}{y} = \frac{a \times y}{b \times y} + \frac{b \times (-x)}{b \times y} = \frac{ay - bx}{by}$. En résumé :

$$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{ay - bx}{by}.$$

Exemples.

$$1. \frac{x+1}{x+2} - \frac{-2x+1}{4} = \frac{(x+1) \times 4 - (-2x+1) \times (x+2)}{(x+2) \times 4} = \frac{4x+4 - (-2x^2-3x+2)}{4x+8} = \frac{2x^2+7x+2}{4x+8}.$$

EXERCICE 29. Exprimez sous forme d'une unique expression fractionnaire.

$$a) \frac{x}{x+1} - \frac{3}{x}.$$

$$b) \frac{2}{x} - \frac{x+1}{3}.$$

$$c) \frac{-x+1}{4} - \frac{x+4}{x}.$$

$$d) \frac{6x^2}{x+1} - \frac{x}{-7x-8}.$$

$$e) -\frac{(x+1)^2}{x} - \frac{-6x+7}{5}.$$

$$f) \frac{x+3}{x+1} - \frac{4x+2}{3x-7}.$$

Quotient.

Découle des règles sur les inverses : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \div \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \times \frac{y}{x}$. Ainsi :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \times \frac{y}{x}.$$

Forme irréductible d'une fraction.

Rappelons qu'un entier naturel est dit *premier* si et seulement si il a exactement deux diviseurs distincts positifs.

Exemples.

- 12 n'est pas un nombre premier puisqu'il est divisible par 2 et 3.
- Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

Théorème 1. - théorème fondamental de l'arithmétique Tout entier naturel supérieur ou égale à 2 admet une décomposition en facteurs premiers unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration. Hors programme.

Exemples.

- 12 = 2 × 2 × 3 et 2 et 3 sont bien des nombres premiers.
- 16 = 2 × 2 × 2 × 2 = 2⁴.
- 36 = 2 × 2 × 3 × 3 = 2² × 3².

Remarques.

- Pour que l'écriture de la décomposition soit unique la convention est d'écrire une seule fois chaque facteur premier à la puissance convenable et d'écrire les facteurs dans l'ordre croissant. On n'écrit pas 3 × 2 × 3 mais 2 × 3².
- D'après ce théorème tous les résultats sur les nombre entiers naturels peuvent se ramener à des résultats sur les nombres premiers.

Le nombre $\frac{1}{2}$ peut encore s'écrire $\frac{2}{4}$. L'écriture fractionnaire d'un nombre n'est pas unique. Ceci pouvant produire de la confusion les mathématiciens ont retenu une écriture fractionnaire qui est unique : *la forme irréductible d'une fraction*.

Proposition 1. Tout nombre rationnel s'écrit de façon unique comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur n'ont pas d'autre commun diviseur que 1 (ou -1), et dont le dénominateur est positif. Cette fraction est dite irréductible.

Exemples.

1. $\frac{1}{3}$ est une forme irréductible.
2. $\frac{14}{21}$ n'est pas une forme irréductible puisque 14 et 21 admettent 7 pour diviseur commun : $\frac{14}{21} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{2}{3}$.
3. En toute rigueur la forme irréductible de l'entier 5 devrait s'écrire $\frac{5}{1}$ cependant l'usage veut que nous usions de l'écriture la plus simple : 5.

Remarques.

1. Des nombres entiers qui n'ont pas de diviseur commun autre que 1 ou -1 sont dits *premiers entre eux*.
2. Pour trouver la forme irréductible d'une fraction il faut rechercher le plus grand facteur commun au numérateur et au dénominateur qu'on appelle le P.G.C.D. (plus grand commun diviseur). Le P.G.C.D. s'obtient grâce à l'algorithme d'Euclide.
3. Dans la pratique pour trouver la forme irréductible nous utiliserons des décompositions en facteurs premiers.
4. Les calculs manuels ou mentaux se ramènent souvent à manipuler des fractions. Dans ce cas il faut systématiquement se ramener à la forme irréductible des fractions pour manipuler des entiers les plus petits possibles.

Exemples.

1. $\frac{3}{12} - \frac{14}{21} = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1 \times 3 - 4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{-5}{2^2 \times 3} = -\frac{5}{12}$.
2. $\frac{2100}{42} \times \frac{11}{1815} = \frac{2100 \times 11}{42 \times 1815} = \frac{2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11}{2 \times 3 \times 7 \times 3 \times 5 \times 11^2} = \frac{2 \times 5}{3 \times 11} = \frac{10}{33}$.

EXERCICE 30. Calculez sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{14}{35} \times \frac{21}{11}$. b) $\frac{24}{25} + \frac{1}{3}$. c) $\frac{7}{36} - \frac{2}{5}$. d) $\frac{48}{63} \times \frac{54}{36}$. e) $\frac{-12}{15} + \frac{9}{8}$. f) $\frac{81}{56} \times \frac{77}{21}$.

Exercices.

EXERCICE 31. Donnez les expressions irréductibles des nombres rationnels suivants.

a) $A = \frac{2}{7} \times \frac{9}{4}$. b) $B = 5 \times \frac{7}{15}$. c) $C = \frac{36}{35} \times \frac{21}{12}$.
d) $D = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{15}\right) \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)$. e) $E = \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{8} - 1\right)$. f) $F = \frac{\frac{-3}{4} \times \frac{9}{9}}{1 - \frac{7}{12}}$.

EXERCICE 32. Simplifiez, calculez.

a) $1 - \frac{1 + \pi}{2}$. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{1}{\frac{3}{2}}$. d) $\frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{3}}$. e) $\frac{4 - \frac{2}{3}}{4}$. f) $\frac{-3 \times 2}{2 \times (-5)}$.

EXERCICE 33.

a) Calculez $x - \frac{1}{x}$ pour $x = \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$. b) Calculez $\frac{2y - 3x}{2x - 3y}$ pour $x = \frac{5}{6}$ et $y = \frac{3}{4}$.

EXERCICE 34. Soit x un nombre. Écrivez chaque expression littérale sous forme d'une seule expression fractionnaire.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & A = 2x - \frac{x}{5}. & \text{b)} & B = \frac{3}{2}x - 5. & \text{c)} & C = 5 \times \frac{4x-1}{3}. & \text{d)} & D = \frac{2x-3}{4} - 1. \\ \text{e)} & E = 2 - \frac{3x+2}{3}. & \text{f)} & F = \frac{x}{6} - \frac{5x-4}{4}. & \text{g)} & G = x + \frac{x-4}{2}. & \text{h)} & H = 3 - \frac{x-1}{4}. \\ \text{i)} & I = \frac{3x-2}{8} - \frac{5x+1}{6}. & & & & & & \end{array}$$

EXERCICE 35. Soit x un nombre. On supposera que les dénominateurs des expressions fractionnaires considérés sont tous non nuls. Écrivez chaque expression littérale sous forme d'une seule expression fractionnaire.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x+1}. & \text{b)} & \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}. & \text{c)} & \frac{x}{4} - \frac{4}{x} & \text{d)} & \frac{x}{x+2} - \frac{x}{x+3}. & \text{e)} & \frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x}. \\ \text{f)} & \frac{x}{x-1} - x. & & & & & & & & \end{array}$$

EXERCICE 36. Simplifiez en une expression fractionnaire.

$$\text{a)} \quad 1 - \frac{x+1}{2}; \quad \text{b)} \quad \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}.$$

EXERCICE 37. Sommez dans l'expression de $f(x)$ pour obtenir une unique expression fractionnaire.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = 3 + \frac{1}{x-2}. \\ \text{b)} & f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}. \\ \text{c)} & f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}. \\ \text{d)} & f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{3x-1}. \\ \text{e)} & f(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{x-1}{x-1}. \\ \text{f)} & f(x) = \frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}. \\ \text{g)} & f(x) = \frac{x-2}{3x-1} - \frac{x+1}{3x+1}. \\ \text{h)} & f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{4}{(x-1)(x-5)}. \end{array}$$

EXERCICE 38. Écrivez avec une unique expression fractionnaire l'expression proposée.

$$\text{a)} \quad \frac{x+1}{x} - \frac{x^2+1}{x}. \quad \text{b)} \quad 2 + \frac{1}{2-x}. \quad \text{c)} \quad \frac{4x+1}{5} + \frac{3-x}{2}. \quad \text{d)} \quad \frac{3}{x+1} + \frac{x}{x-1}.$$

EXERCICE 39. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Montrez que : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.
- Déduisez-en $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

EXERCICE 40. Soient a, b, c, d, e et f six nombres non nuls, tels que $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.

- Montrez que $\frac{a}{d} = \frac{a+b+c}{d+e+f}$.
- Déduisez-en les valeurs de a, b et c sachant que $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ et que $a + b + c = 7$.

EXERCICE 41. Soient a, b et c trois réels non nuls.

- Écrivez $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ sous forme d'une seule fraction.
- Montrez que si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, alors $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Le vérifier pour $a = 2, b = 2$ et $c = -1$.
- La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

EXERCICE 42. Soit un triangle ABC tel que $AB = 4, BC = 6, AC = 5$. M est un point du segment $[AB]$. On pose $AM = x$. On projette : M en N sur (AC) parallèlement à (BC) , N en O sur (BC) parallèlement à (AB) et O en P sur (AB) parallèlement à (AC) . Calculez AP en fonction de x et déduisez-en que P est le symétrique de M par rapport au milieu I de $[AB]$. Déduisez-en que, si l'on reprend la construction précédente à partir de P , alors on la terminera en M .

Corrections.

Exercice 17. Passez de l'écriture fractionnaire à l'écriture en ligne de la division ou réciproquement.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad -\frac{x}{3} = -x \div 3. & \text{b)} \quad \frac{3+x}{4} = (3+x) \div 4. & \text{c)} \quad \frac{4}{2x+7} = 4 \div (2x+7). \\ \text{d)} \quad \frac{x}{3} \times 7 = x \div 3 \times 7. & \text{e)} \quad 3 + 4 \div x = 3 + \frac{4}{x}. & \text{f)} \quad 3 \div 4 + x = \frac{3}{4} + x. \\ \text{g)} \quad (-6-x) \div 8 = \frac{-6-x}{8}. & \text{h)} \quad x \div (8-x) = \frac{x}{8-x}. \end{array}$$

Exercice 18. Calculez sous forme d'une fraction.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{6 \times 5} = \frac{3}{30}. & \text{b)} \quad \frac{3}{13} \times \frac{9}{4} = \frac{3 \times 9}{13 \times 4} = \frac{27}{52}. & \text{c)} \quad \frac{8}{10} \times \frac{100}{50} = \frac{8 \times 100}{10 \times 50} = \frac{800}{500}. \\ \text{d)} \quad \frac{6}{7} \times 8 = \frac{6}{7} \times \frac{8}{1} = \frac{8 \times 6}{7 \times 1} = \frac{64}{7}. & \text{e)} \quad 11 \times \frac{8}{7} = \frac{11}{1} \times \frac{8}{7} = \frac{11 \times 8}{1 \times 7} = \frac{88}{7}. \end{array}$$

Exercice 19.

$$\text{a)} \quad 8 \times \frac{3}{24} = \frac{8 \times 3}{24} = 1. \quad \text{b)} \quad \frac{1}{25} \times 225 = \frac{225}{25} = 9. \quad \text{c)} \quad 3 \times \frac{8}{12} = \frac{3 \times 8}{12}. \quad \text{d)} \quad \frac{7}{14} \times 4 = \frac{7 \times 4}{14} = 2.$$

Exercice 20.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad 3 \times \frac{x}{8} = \frac{3x}{8}. & \text{b)} \quad \frac{-6}{x} \times (-3) = \frac{-6 \times (-3)}{x}. & \text{c)} \quad (x+2) \times \frac{2}{x+1} = \frac{2(x+2)}{x+1}. \\ \text{d)} \quad x \times \frac{x+1}{2} = \frac{x(x+1)}{2}. & \text{e)} \quad x^2 \times \frac{3}{x+1} = \frac{3x^2}{x+1}. & \text{f)} \quad (x+1) \times \frac{2x+1}{-2x+7} = \frac{(x+1)(2x+1)}{-2x+7}. \end{array}$$

Exercice 21.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 11 \times 5} = \frac{21}{22}. & \text{b)} \quad \frac{2 \times 7 \times 17}{3 \times 7} = \frac{34}{3}. & \text{c)} \quad \frac{9 \times 23}{6 \times 9 \times 8} = \frac{23}{48}. \\ \text{d)} \quad \frac{3 \times 5^2 \times 11}{2 \times 5 \times 11} = \frac{15}{2}. & \text{e)} \quad \frac{2^3 \times 3^2 \times (-5) \times 7}{2 \times 3^3 \times 7} = -\frac{20}{3}. & \text{f)} \quad \frac{3 \times (-5) \times (-6)}{(-2)^2 \times (-3) \times 6} = -\frac{5}{4}. \end{array}$$

Exercice 22.

$$\text{a)} \quad \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}x^2. \quad \text{b)} \quad \frac{x^3}{7} = \frac{1}{7}x^3. \quad \text{c)} \quad \frac{x^5}{3} = 3x^5. \quad \text{d)} \quad \frac{x^7}{7} = 7x^7. \quad \text{e)} \quad \frac{x^6}{11} = 11x^6. \quad \text{f)} \quad \frac{x^4}{13} = 13x^4.$$

Exercice 23.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3. & \text{b)} \quad 11^{-1} = \frac{1}{11}. & \text{c)} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}. \\ \text{d)} \quad \left(\frac{7}{11}\right)^{-1} = \frac{11}{7}. & \text{e)} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2} \times 2 = \frac{10}{3}. & \text{f)} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{5}{2} \times 3 = \frac{15}{2}. \\ \text{g)} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{14}. \end{array}$$

Exercice 24.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{-3}{2} \times \frac{7}{8} = -\frac{21}{16}. & \text{b)} \quad \frac{2-7}{-3} \times \frac{-1}{11} = -\frac{5}{33}. & \text{c)} \quad \frac{5-3 \times 2}{-3} \times \frac{-7}{3} = -\frac{7}{9}. \\ \text{d)} \quad \frac{-11}{3} \times \left(-\frac{4}{-2}\right) = -\frac{44}{6}. & \text{e)} \quad \frac{-3^2}{4} \times \frac{-5+10}{-2-5} = -\frac{45}{28}. & \text{f)} \quad \frac{-3-4}{-5} \times \frac{9}{-11} = -\frac{63}{55}. \end{array}$$

Exercice 25.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \left(\frac{3}{-7}\right)^{-1} = -\frac{7}{3}. & \text{b)} \quad \left(\frac{-2}{-3}\right)^{-1} = \frac{14}{3}. & \text{c)} \quad \left(\frac{-1}{7}\right)^{-1} = -7. \\ \text{d)} \quad \left(\frac{2-5}{3-11}\right)^{-1} = \frac{8}{3}. & \text{e)} \quad \left(\frac{2}{-5} \times \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^{-1} = \frac{20}{2} = 10. & \text{f)} \quad \left(\frac{-11}{2}\right)^{-1} \times \frac{-2}{7} = \frac{4}{77}. \end{array}$$

Exercice 26.

$$a) \frac{2}{11} + \frac{5}{3} = \frac{2 \times 3 + 11 \times 5}{11 \times 3} = \frac{61}{33}.$$

$$c) \frac{8}{7} + \frac{6}{5} = \frac{8 \times 5 + 7 \times 6}{7 \times 5} = \frac{82}{35}.$$

$$e) \frac{-2}{11} + \frac{4}{-5} = \frac{(-2) \times (-5) + 11 \times 4}{11 \times (-5)} = -\frac{54}{55}.$$

$$g) \frac{6}{7} + \frac{-8}{3} = \frac{6 \times 3 + 7 \times (-8)}{7 \times 3} = -\frac{38}{21}.$$

$$b) \frac{8}{9} + \frac{5}{4} = \frac{8 \times 4 + 9 \times 5}{9 \times 4} = \frac{101}{36}.$$

$$d) \frac{7}{9} + \frac{1}{8} = \frac{9 \times 8 + 7 \times 4}{7 \times 8} = \frac{100}{56}.$$

$$f) \frac{-7}{3} + \frac{11}{2} = \frac{-7 \times 2 + 3 \times 11}{3 \times 2} = \frac{19}{6}.$$

Exercise 27.

$$a) \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{5}{x}.$$

$$c) \frac{-x}{7} + \frac{4x}{3} = \frac{-x \times 3 + 7 \times 4x}{7 \times 3} = \frac{25x}{21} = \frac{25}{21}x.$$

$$e) \frac{x-1}{7} + \frac{x+2}{3} = \frac{(x-1) \times 3 + 7 \times (x+2)}{7 \times 3} = \frac{10x+11}{21}.$$

$$b) \frac{x}{7} + \frac{5}{x} = \frac{x \times x + 7 \times 5}{7 \times x} = \frac{x^2 + 35}{7x}.$$

$$d) \frac{x+1}{11} + \frac{x}{2} = \frac{(x+1) \times 2 + 11 \times x}{11 \times 2} = \frac{13x+2}{22} = \frac{13}{22}x + \frac{1}{11}.$$

$$f) \frac{2x-3}{x} + \frac{-7x}{5} = \frac{(2x-3) \times 5 + x \times (-7x)}{x \times 5} = \frac{-7x^2 + 10x - 15}{5x}.$$

Exercise 28.

$$a) \frac{6x}{2} = 3x.$$

$$b) \frac{2x}{3} = \frac{1}{4}x.$$

$$c) \frac{3x+9}{3} = x+3.$$

$$d) \frac{-33x+27}{3} = \frac{4}{3}x+2.$$

$$e) \frac{-33x+27}{3} = -11x+9. \quad f) \frac{3,2x+4,2}{4} = 0,8x+1,05.$$

Exercise 29.

$$a) \frac{x}{x+1} - \frac{3}{x} = \frac{x \times x - (x+1) \times 3}{(x+1) \times x} = \frac{x^2 - 3x - 3}{x^2 + 2}.$$

$$c) \frac{-x+1}{4} - \frac{x+4}{x} = \frac{(-x+1) \times x - 4 \times (x+4)}{4 \times x} = \frac{-x^2 - 3x - 16}{4x}.$$

$$e) \frac{-(x+1)^2}{x} - \frac{-6x+7}{5}.$$

$$b) \frac{2}{x} - \frac{x+1}{3} = \frac{2 \times 3 - x \times (x+1)}{x \times 3} = \frac{-x^2 - x + 6}{3x}.$$

$$d) \frac{6x^2}{x+1} - \frac{x}{-7x-8} = \frac{6x^2 \times (-7x-8) - (x+1) \times x}{(x+1) \times (-7x-8)}.$$

$$f) \frac{x+3}{x+1} - \frac{4x+2}{3x-7}.$$

Exercise 30.

$$a) \frac{14}{35} \times \frac{21}{11} = \frac{2 \times 7 \times 3 \times 7}{5 \times 7 \times 11} = \frac{2 \times 3 \times 7}{5 \times 11} = \frac{42}{55}.$$

$$b) \frac{25}{42} + \frac{1}{5} = \frac{25 \times 5 + 42 \times 1}{25 \times 5} = \frac{97}{125}.$$

$$c) \frac{42}{36} - \frac{2}{5} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2^2 \times 3^2} - \frac{2}{5} = \frac{7}{6} - \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5 - 6 \times 2}{6 \times 5} = \frac{23}{30}.$$

$$d) \frac{48}{63} \times \frac{54}{36} = \frac{2^4 \times 3 \times 2 \times 3^3}{3^2 \times 7 \times 2^2 \times 3^2} = \frac{2^4}{7} = \frac{8}{7}.$$

$$e) \frac{-12}{15} + \frac{9}{8} = \frac{-2 \times 3}{3 \times 5} + \frac{3^2}{2^3} = \frac{-4}{5} + \frac{9}{8} = \frac{-4 \times 8 + 5 \times 9}{5 \times 8} = \frac{13}{5 \times 8} = \frac{13}{40}.$$

$$f) \frac{81}{56} \times \frac{77}{21} = \frac{3^4 \times 7 \times 11}{2^3 \times 7 \times 3 \times 7} = \frac{3^3 \times 11}{2^3 \times 7} = \frac{297}{56}.$$

Exercise 31.

$$a) A = \frac{2 \times 3^2}{2^2 \times 7} = \frac{3^2}{2 \times 7} = \frac{9}{14}.$$

$$b) B = \frac{5 \times 7}{3 \times 5} = \frac{7}{3}.$$

$$c) C = \frac{2^2 \times 3^2 \times 3 \times 7}{5 \times 7 \times 3 \times 2^2} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}.$$

$$d) D = \left(\frac{3 \times 4}{3 \times 5} - \frac{1}{15} \right) \frac{4+6}{4 \times 6} = \frac{11}{15} \times \frac{10}{24} = \frac{11 \times 3 \times 5}{2 \times 5 \times 2^3 \times 3} = \frac{11}{2^4} = \frac{11}{16}.$$

$$e) E = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{8h} - \frac{8}{8} \right).$$

$$f) F = \frac{-3^2 \times 5}{\frac{2^2 \times 3^2}{12} - \frac{7}{12}} = \frac{-5}{\frac{4}{12}} = -\frac{5}{4} \times \frac{12}{5} = -\frac{12}{4} = -3.$$

Exercise 32.

$$a) 1 - \frac{1+\pi}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1+\pi}{2} = \frac{2-(1+\pi)}{2} = \frac{1-\pi}{2};$$

$$c) \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$e) \frac{4-\frac{2}{3}}{4} = \frac{\frac{4 \times 3 - 1 \times 2}{1 \times 3}}{4} = \frac{\frac{10}{3}}{4} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

$$b) \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6};$$

$$d) \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{3}{3}} = \frac{1}{\frac{1 \times 3 + 2 \times 1}{2 \times 3}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5};$$

$$f) \frac{-3 \times 2}{2 \times (-5)} = \frac{3 \times 2}{2 \times 5} = \frac{3}{5}.$$

Exercise 33.

- a) Commençons par un calcul intermédiaire : $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3 \times 6 - 4 \times 5}{4 \times 6} = -\frac{2}{24} = -\frac{2}{2^3 \times 3} = -\frac{1}{12}$.
 Bien que les parenthèses ne servent à rien dans le cas présent, lorsqu'on remplace dans une expression il faut se montrer prudent.
 $\left(-\frac{1}{12}\right) - \frac{1}{-\frac{1}{12}} = -\frac{1}{12} + 12 = \frac{12 \times 12 - 1 \times 1}{12 \times 1} = \frac{132}{12} = 11$.
- b) D'une part : $2 \times \frac{3}{4} - 3 \times \frac{5}{6} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1$, d'autre part : $2 \times \frac{5}{6} - 3 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{3} - \frac{9}{4} = \frac{5 \times 4 - 3 \times 9}{3 \times 4} = -\frac{7}{12}$
 d'où : $\frac{-1}{-\frac{7}{12}} = \frac{12}{7}$.

Exercice 34.

- a) $A = \frac{9x}{5}$. b) $B = \frac{3x-10}{2}$. c) $C = \frac{20x-5}{2}$. d) $D = \frac{2x-7}{4}$.
 e) $E = \frac{-3x+4}{3}$. f) $F = \frac{-13x+12}{12}$. g) $G = \frac{3x-4}{2}$. h) $H = \frac{-x+13}{4}$.
 i) $I = \frac{-11x-10}{24}$.

Exercice 35.

- a) $\frac{2}{x+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{-x+2}{x+1}$. b) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$. c) $\frac{x}{4} - \frac{4}{x} = \frac{x^2-16}{4x}$. d) $\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x+3} = \frac{x}{(x+2)(x+3)}$.
 e) $\frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x} = \frac{3x^2+x-1}{x(x+1)}$ f) $\frac{x}{x-1} - x = \frac{-x^2+2x}{x-1}$.

Exercice 36.

- a) $1 - \frac{x+1}{2} = \frac{1 \times 2 - 1 \times (x+1)}{2} = \frac{2-x-1}{2} = \frac{1-x}{2}$;
 b) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1 \times (x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{1 \times (x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1-(x-1)-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2-1}$.

Exercice 37.

- a) $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2} = \frac{3 \times (x-2) + 1 \times 1}{1 \times (x-2)} = \frac{3x-5}{x-2}$.
 b) $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{1} - \frac{1}{x} = \frac{(2x-1) \times x - 1 \times 1}{1 \times x} = \frac{2x^2-x-1}{x}$.
 c) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1 \times (x+1) - (x-1) \times 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1-x+1}{x^2-1^2} = \frac{2}{x^2-1}$.
 d) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{3x-1} = \frac{2 \times (3x-1) - x \times 1}{x \times (3x-1)} = \frac{5x-2}{3x^2-x}$.
 e) $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{x-1}$.
 f) $f(x) = \frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$.
 g) $f(x) = \frac{x}{3x-1} - \frac{1}{3x+1}$.
 h) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{4}{(x-1)(x-5)}$.

Exercice 38.

- a) $\frac{x+1}{x} - \frac{x^2+1}{x} = \frac{x+1-(x^2+1)}{x} = \frac{-x^2+x}{x} = -x+1$. b) $2 + \frac{1}{2-x} = \frac{2 \times (2-x) + 1 \times 1}{1 \times (2-x)} = \frac{-2x+5}{-x+2}$.
 c) $\frac{4x+1}{5} + \frac{3-x}{2} = \frac{(4x+1) \times 2 + 5 \times (3-x)}{5 \times 2} = \frac{3x+17}{10}$. d) $\frac{3}{x+1} + \frac{x}{x-1} = \frac{3 \times (x-1) + (x+1) \times x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+4x-3}{x^2-1}$.

Exercice 39.

1. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1 \times (n+1) - n \times 1}{n \times (n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.
 2. $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Exercice 40.

1. $\frac{a}{d} = \frac{a(d+e+f)}{d(d+e+f)} = \frac{ad+ae+af}{d(d+e+f)}$ or, avec des produit en croix on obtient $ae = db$ et $af = dc$ donc
 $\frac{a}{d} = \frac{da+db+dc}{d(d+e+f)} = \frac{d(a+b+c)}{d(d+e+f)} = \frac{a+b+c}{d+e+f}$.
 2. $\frac{a}{2} = \frac{7}{2+3+4}$ donc $a = 2 \times \frac{7}{9} = \frac{14}{9}$. De même : $b = \frac{7}{3}$ et $c = \frac{28}{9}$.

Exercice 41.

1. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ac+ab}{abc}$.

2. Si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ alors, d'après la question précédente, nécessairement, $bc + ac + ab = 0$.
 Or $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ac + ab)$ donc, si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ alors $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
 On vérifie : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{-1} = 1$ et $(2+2-1)^2 = 9$ et $2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 9$.
3. Oui.

Exercice 42.

- * D'après le théorème de Thalès : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$, i.e. $\frac{5-NC}{5} = \frac{x}{4}$ et donc $NC = 5 - \frac{5}{4}x$.
- * D'après le théorème de Thalès : $\frac{ON}{AB} = \frac{CN}{CA}$ i.e. $\frac{ON}{4} = \frac{5-\frac{5}{4}x}{5}$.
- * $APON$ est un parallélogramme puisque, par construction, $(ON) \parallel (AP)$ et $(AN) \parallel (PO)$ donc $AP = ON$.
- * En substituant : $\frac{AP}{4} = \frac{5-\frac{5}{4}x}{5}$ et enfin $AP = 4 - x$.
- * Donc P est le symétrique de M par rapport à I le milieu de $[AB]$.
- * Par symétrie si on part de P on arrive sur M .

II Puissances.

Définition.

Définition 1. Si x est un nombre et n un entier naturel, alors x^n , qui se lit « x puissance n » ou « x exposant n », est le nombre $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$.

Remarques.

1. $x^0 = 1$ et $x^1 = x$. Étrangement, en particulier, $0^0 = 1$, malgré le pouvoir absorbant du 0.
2. Lorsque l'exposant est 2 comme dans x^2 on dit « x au carré ».
3. Lorsque l'exposant est 3 comme dans x^3 on dit « x au cube ».
4. Par convention, si x est non nul, nous noterons son *inverse* $x^{-1} = \frac{1}{x}$. En généralisant nous noterons pour n entier naturel $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.
5. D'après cette définition et du fait de la règle du signe d'un produit : lorsque l'exposant n est pair x^n est positif et lorsque l'exposant n est impair x^n est du même signe que x .
Cette idée se généralise à des fonctions que nous dirons paires ou impaires. Ainsi les fonctions linéaires sont impaires alors que les fonction affines qui ne sont pas linéaires ne sont ni paires ni impaires.
6. Le terme exposant fait référence à la position d'écriture : dans a_k^m , k est en *indice* et m en *exposant*.

Exemples.

1. $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} = \frac{8}{27}$.
3. $(-2)^{1254} = 2^{1254}$ car la puissance est paire et $(-8)^{979} = -(8^{979}) = -8^{979}$ car la puissance est impaire. On peut se passer des dernières parenthèses du fait des priorité opératoires comme indiqué ci-après.

EXERCICE 43. Calculez.

- a) 2^3 . b) 3^3 . c) 2^{-2} . d) 2^{-3} . e) 7^2 . f) 8^2 . g) 2^6 .

Priorités opératoires.

Les règles de priorités pour l'instant se limitent à :

Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction joue le même rôle que des parenthèses.

Priorité 2 Les exposants (puissances).

Priorité 3 Les multiplications et division ($\div$) en allant de gauche à droite.

Priorité 4 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

Exemples.

1. $5 \times 2^3 = 5 \times 8 = 40$ alors que $(5 \times 2)^3 = 10^3 = 1000$.

EXERCICE 44. Calculez.

- a) 2×3^2 . b) $3 \times 2 \times 5^2$. c) $16 + 2 \times 7^2$. d) $8 \div 2^2$. e) $8^2 \div 2$. f) $\frac{8^2}{4}$.
g) $\frac{12}{3 \times 2^6}$. h) $(2 + 5)^2$. i) $3 \times (2 \times 3)^2$. j) $2^3 \times 7$. k) $\left(\frac{27}{2+1}\right)^2$. l) $2^{-3} \times 2^9$.

Produits et quotients de puissances d'un même nombre.

Que se passe-t-il si on multiplie ou divise des puissances entre-elles ?

Proposition 2. Soient a un nombre, n et p deux entiers relatifs. $a^n \times a^p = a^{n+p}$ et $(a^n)^p = a^{n \times p}$.

Démonstration. Ce résultat se démontre en utilisant la définition de la puissance.

$$\begin{aligned}x^n \times x^p &= \left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \right) \times \left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{p \text{ fois}} \right) \\&= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{p \text{ fois}} \\&= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n+p \text{ fois}} \\&= x^{n+p}\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}(x^n)^p &= \underbrace{\left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \right) \times \cdots \times \left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \right)}_{p \text{ fois}} \\&= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \times p \text{ fois}} \\&= x^{n \times p}\end{aligned}$$

Remarques.

1. Ce résultat concerne les puissances d'un même nombre a .
2. Ce résultat sera très important pour développer les expressions algébriques faisant intervenir des lettres qu'il est impossible d'évaluer numériquement : $x^2(x-1) = x^2(x^1 - 1) = x^2 \times x - x^2 \times 1 = x^{2+1} - x^2 = x^3 - x^2$.
3. Il n'y a pas de résultat équivalent avec l'addition. Par exemple : $3^2 + 3^3 = 36$ et $3^{2+3} = 243$. Les puissances d'une somme s'obtiennent avec des formules comme la distributivité, la double distributivité, les identités remarquables.

Exemples.

1. Exprimons sous forme d'une seule puissance : $7^{1245} \times 7^{852} = 7^{1245+852} = 7^{2097}$. Face à ce calcul votre calculatrice ne peut donner qu'une valeur approchée car les nombres concernés sont trop grands pour elle.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^4 \times x^{-17} = x^{4-17} = x^{-13}$.
3. $(2^5)^{-14} = 2^{5 \times (-14)} = 2^{-70}$.
4. Écrivons le nombre $2^3 \times (2^4)^{32}$ sous forme d'une puissance de deux (situation rencontrée notamment avec les décompositions en facteurs premiers). $2^3 \times (2^4)^{32} = 2^3 \times 2^{4 \times 32} = 2^3 \times 2^{128} = 2^{3+128} = 2^{131}$

EXERCICE 45. Simplifiez les expressions suivantes en justifiant :

$$\text{a) } 12^4 \times 12^{-7} \quad \text{b) } (3^2)^7 \quad \text{c) } 3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{d) } \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{10}{3}\right)^4$$

Vérifiez vos calculs en entrant exactement les formules dans votre calculatrice.

Puissance de produits et quotients.

Que se passe-t-il si on applique une puissance à un produit ou un quotient ?

Proposition 3. Soient a et b deux nombres, et n un entier naturel. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ et si b est non nul : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Démonstration.

$$(a \times b)^n = \underbrace{a \times b \times a \times b \times \cdots \times a \times b}_{n \text{ fois le produit } a \times b}$$

Par commutativité du produit :

$$\begin{aligned}(a \times b)^n &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_n \times \underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_n \\ &= a^n \times b^n\end{aligned}$$

Remarques.

1. Ce résultat concerne une même puissance de différents nombres.
2. Ce résultat est utile pour manipuler des expressions littérales ou des nombres dont l'ordre de grandeur rend impossible l'écriture décimale, mais face à une expression numérique simple il faut effectuer le calcul en respectant les priorités opératoires.

Exemples.

1. $(3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$.
2. $\left(\frac{x+1}{x^6}\right)^{13} = \frac{(x+1)^{13}}{(x^6)^{13}} = \frac{(x+1)^{13}}{x^{69}}$.

EXERCICE 46. Complétez les égalités suivantes (en justifiant) :

- a) $7^2 \times (3 \times 7)^5 = 3^? \times 7^?$. b) $\left(\frac{4^2}{5}\right)^3 = 4^? \times 5^?$. c) $\frac{11^2 \times 7}{2 \times 3} = 2^? \times 3^? \times 7^? \times 11^?$.
- d) $10^? \times 10^{-2} = 1$. e) $2^3 \times 2^{-8} \times (2^3)^{100} = 2^?$. f) $\frac{2^7 \times 3^{-2}}{2^{123}} = 2^? \times 3^?$.

Puissances et sommes (ou différence).

Nous ne détaillerons pas ici les résultats mais nous savons le cas du carré d'une somme qui conduit à une identité remarquable.

Exemples.

1. $(4 + 3)^2 = 7^2 = 49$ mais $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$.

Exercices.

EXERCICE 47. Combien valent -2^4 , $(-2)^4$, $(-2)^3$, -2^3 , 2^{-3} , $(-2)^{-3}$, $\frac{4^6}{2^4}$, $10^2 \times 10^{-3}$, $10^2 + 10^{-3}$, $\frac{10^{-2}}{10^{-3}}$, $\frac{10^{-3}}{10^3}$?

EXERCICE 48. Combien vaut $2x^3$ pour x égale à $-\frac{1}{2}$, 3×10^{-5} , $4,2 \times 10^3$, $-1,3 \times 10^{-2}$?

EXERCICE 49. Simplifiez pour x réel non nul, les écritures de $(-2x)^2$, $(-2x)^3$, $(2x)^3 + 3x^3$, $x^2 \times x^{-3}$, $2(x^2)^3$, $(2x^2)^3$, $\frac{x^3}{x^{-2}}$.

EXERCICE 50. Déterminez la forme irréductible de la fraction $\frac{138600}{147420}$.

EXERCICE 51. Calculez sous forme de fraction irréductible :

- a) $5^4 \times (3^{-2})^2$. b) $\left(\frac{7}{3}\right)^3 \div \left(\frac{4}{10}\right)^4$

EXERCICE 52. Soit x un réel non nul. Écrivez chacun des nombres suivants sous la forme x^n , où n est un nombre entier relatif.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & x^4 \times (x^{-2})^3 \times x^5. & \text{b)} & \frac{x^7}{x^8 \times x^{-5}}. & \text{c)} & \frac{x^{-3} \times x^5}{(x^2)^3} \end{array}$$

EXERCICE 53. Écrivez les nombres sous la forme a^n avec a et n des nombres entiers relatifs.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & 5^3 \times 5^8. & \text{b)} & 7^{-4} \times 7^{-5}. & \text{c)} & (-3)^6 \times (-3)^9. & \text{d)} & \frac{4^7}{4^4}. \\ \text{e)} & \frac{10^{14}}{10^{20}}. & \text{f)} & \frac{9^{-5}}{9^{11}}. & & & & \end{array}$$

EXERCICE 54. Écrivez les nombres sous la forme 10^n avec n un nombre entier relatif.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{10^7}{10^3 \times 10^2}. & \text{b)} & \frac{10^{-7} \times 10^8}{10^5}. & \text{c)} & \frac{(10^{-2})^4}{10^{14}}. \end{array}$$

EXERCICE 55. Soient a et b des nombres réels non nuls. Écrivez les expressions littérales suivantes sous la forme $a^n \times b^p$ avec n et p des nombres entiers relatifs.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & A = \left(\frac{a}{b}\right)^3. & \text{b)} & B = \frac{(ab)^5}{a^4}. & \text{c)} & C = \frac{a^4}{a^3 \times b^{-7}}. \\ \text{d)} & D = \left(\frac{b}{a}\right)^4 \times a^2. & \text{e)} & E = (a^3 \times b)^2. & \text{f)} & F = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \times a^{-2}. \\ \text{g)} & G = (a^{-5} \times b^{-2})^{10}. & \text{h)} & H = \left(\frac{a}{b^2}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{a^3}\right)^5. & & \end{array}$$

EXERCICE 56. Écrivez chacun des nombres suivants sous la forme 3^p , où p est un nombre entier relatif.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & 27 \times 9^5. & \text{b)} & \frac{81^4 \times 9^{-2}}{27^{-3}}. & \text{c)} & 9^{-3} \times 81^2. \end{array}$$

EXERCICE 57. Écrivez chacun des nombres suivants sous la forme 2^p , où p est un nombre entier relatif.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & A = 2^n \times 2^{n-1}. & \text{b)} & B = \frac{2^{3-n} \times 2^{n+2}}{2^{-4n}}. & \text{c)} & C = (2^{n-1})^3 \times 2^{-n}. \end{array}$$

EXERCICE 58. Factorisez les expressions suivantes pour n entier naturel non nul.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & 3^n + 2 \times 3^{n+2}. & \text{b)} & 7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2}. & \text{c)} & (13^n)^2 + 13^n. \end{array}$$

EXERCICE 59. Procédez au changement de variable $y = 2x^3$ puis simplifiez les expressions.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & y^{-3}. & \text{b)} & 3y^2 + y. & \text{c)} & \frac{1}{y^{12}} & \text{d)} & \frac{1+y}{y^{-2}}. \end{array}$$

Écriture scientifique.

L'écriture décimale infinie d'un nombre comporte un grand nombre de chiffres zéros. Par exemple $2 = \dots 0002,000\dots$. Or, dans cet exemple, il n'y a qu'un seul chiffre qui contienne de l'information ; nous dirons que 2 est *significatif*.

Les physiciens ont adoptés une écriture des nombres qui prend en compte la notion de chiffre significatif :

Définition 2. La *notation scientifique* (ou *écriture scientifique*) d'un nombre décimal est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$, le nombre a est tel que $1 \leq a < 10$ et n un entier.

Exemples.

1. $1\,234,567\,8 = 1,234\,567\,8 \times 10^3$.
2. La vitesse de la lumière est de l'ordre de $300\,000\text{ km/s}$ c'est-à-dire $3 \times 10^8\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
3. La charge électrique élémentaire est de l'ordre de $1,6 \times 10^{-9}\text{ C}$.
4. La distance de la Terre au Soleil est de l'ordre de 15 millions de kilomètres, c'est-à-dire $1,5 \times 10^7\text{ km}$.

Remarques.

1. La notation scientifique sert essentiellement à présenter des valeurs approchées dans les sciences expérimentales (lecture facilitée de l'ordre de grandeur et du nombre de chiffres significatifs). Elle se retrouve également, plus ou moins, en informatique les ordinateurs ne pouvant gérer des nombres irrationnels.

EXERCICE 60.

1. Donnez la notation scientifique des quatre nombres $123\,400\,000$ et $0,000\,123$ et 451 et $92\,384$.
2. Déterminez, sans calculatrice, l'écriture en notation scientifique du nombre $\frac{2 \times 10^3 \times 2,4 \times 10^{-6}}{1,2 \times 10^{-10} \times 8 \times 10^{12}}$.
3. Arrivés en fin de vie, certaines étoiles explosent violemment. Ce phénomène, appelé supernova, entraîne une forte augmentation de l'intensité lumineuse de l'astre qui peut briller comme 200 millions de soleils pendant plusieurs semaines.
Exprimez en notation scientifique et sans user de la calculatrice, le rapport maximal entre l'intensité lumineuse d'une supernova et celle du soleil.

EXERCICE 61. Donner la notation scientifique de $x + y$, $x - y$, $x \times y$, $\frac{x}{y}$ pour $x = 3,25 \times 10^{25}$ et $y = 8 \times 10^{23}$.

EXERCICE 62. La distance de la Terre au Soleil est de 150 millions de kilomètres ; la vitesse de la lumière est de $300\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; la Terre décrit autour du Soleil une trajectoire assimilable à un cercle en 365 jours.

1. Combien de temps un rayon de Soleil met-il pour arriver sur Terre ?
2. Quelle est la vitesse de la rotation de la Terre autour du Soleil ?

Analyse dimensionnelle.

L'*analyse dimensionnelle* est un outil qui permet d'étudier les égalités ou les formules faisant intervenir des grandeurs physiques, et donc des unités différentes.

Rappelons quelques grandeurs et unités du système international.

Grandeur	Dimension	Unité du SI
Masse	M	kilogramme (kg)
Temps	T	seconde (s)
Longueur	L	mètre (m)
Température	θ	kelvin (K)
Intensité électrique	I	ampère (A)
Quantité de matière	N	mole (mol)
Intensité lumineuse	J	candela (cd)

À partir de ces unités de base il est possible de construire des unités dérivées. Ainsi la vitesse v , dans le système international, s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, que nous pourrions aussi noter m/s ou $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

EXERCICE 63. Monsieur Piti, professeur des écoles à Tahiti, organise un voyage scolaire au Chili avec ses élèves. Le vol Papeete - Santiago du Chili fait une escale sur l'Île de Pâques, où ils passeront quelques jours.

Dans l'avion, l'écran du passager indique les informations du vol en direct, en différentes langues et unités. Monsieur Piti compare les données en anglais et en espagnol au même moment :

<i>Anglais</i>	<i>Espagnol</i>	<i>Traduction de M. Piti</i>
Ground speed : 530 mph	Velocidad : 853 km/h	Vitesse
Altitude : 35 000 ft	Altura : 10 668 m	Altitude
Outside air temperature : -58° F	Temperatura exterior : -50° C	Température extérieure
Distance to destination : 2497 mi	Distancia asta el destino : 4018 km	Distance restante
Local time at destination : 3 : 43 pm	La hora a la destinacion : 15 : 43	Heure locale à destination

Monsieur Piti a traduit les mots en français (dernière colonne), mais les unités sont différentes.

1. Quelle est la longueur d'un pied (1 ft) en millimètre ?
2. Si l'avion gardait cette vitesse constante, à quelle heure arriverait-il ?

Nous pourrions également créer des sous-unités $\text{cm} = \frac{1}{100} \text{ m}$.

EXERCICE 64. Un fabricant de sauce tomate utilise des boîtes de conserve de forme cylindrique de diamètre 99 mm et de hauteur 118 mm. Le format de ces boîtes est appelé $\frac{4}{4}$. Rappel du volume d'un cylindre : $V = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$. Dans tout cet exercice, on négligera l'épaisseur du métal.

1. Calculer le volume, en cm^3 , d'une boîte de conserve $\frac{4}{4}$. Arrondir le résultat à l'unité.
2. La contenance affichée sur la boîte est 850 mL. Vérifier qu'une boîte remplie à 95 % contient bien au moins 850 mL de sauce tomate.
3. On considère une nouvelle boîte de même hauteur et dont le diamètre est le double de la précédente. Le volume de la nouvelle boîte est-il le double du volume d'une boîte $\frac{4}{4}$? Justifier la réponse.

Il est toujours possible de multiplier ou diviser entre elles des unités pour créer de nouvelles unités, par contre il n'est possible d'additionner et soustraire que des unités identiques.

EXERCICE 65. Sachant que l'accélération d'un objet est donnée par la formule $a = \frac{v}{t}$ où v désigne la vitesse de l'objet et t le temps écoulé, donnez l'unité du système international qui permet de mesurer cette accélération.

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier l'homogénéité d'une formule ou d'une égalité en s'assurant que la dimension est la même des deux côtés de l'égalité.

EXERCICE 66. Un élève propose l'équation suivante pour calculer la distance parcourue, x , par un objet : $x = vt^2$ où v désigne la vitesse de l'objet et t le temps écoulé. Vérifiez l'homogénéité (cohérence des unités) de cette équation (en cherchant l'unité des membres de gauche puis de droite de l'égalité).

Un résultat incontournable de la mécanique :

EXERCICE 67. Le *principe fondamental de la dynamique* (ou *deuxième loi de Newton*) indique qu'un objet subit une accélération a qui est donné par $a = \frac{F}{m}$ où F est la force, exprimée en newton (N) (unité qui mesure l'intensité d'une force), qui s'applique à l'objet et m la masse de cet objet. Exprimez le newton (N) avec des unités du système international.

Un autre résultat de la physique qui de plus est au programme de seconde.

EXERCICE 68. La force d'interaction gravitationnelle entre deux corps de masses m_1 et m_2 distants de d (la Terre et la Lune par exemple) est donnée par la relation $F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$ où G est une constante appelée *constante gravitationnelle*. Exprimez l'unité de la constante gravitationnelle avec les unités du système international.

EXERCICE 69. Cherchez l'erreur dans le raisonnement en 4 étapes suivant.

1. Prenez d'abord : 1 kilogramme égale 1000 grammes et 2 kilogrammes égale 2000 grammes.
2. Multiplions chaque masse en kilo entre elles puis de même pour celles en grammes. On a donc l'égalité : $1 \times 2 \text{ kg} = 1000 \times 2000 \text{ g}$.
3. Ce qui fait donc : $2 \text{ kg} = 2\,000\,000 \text{ g}$
4. Soit en changeant d'unité $2 \text{ kg} = 2000 \text{ kg}$.

EXERCICE 70. Le nombre d'or est obtenu comme le rapport de la largeur sur la longueur d'un certain rectangle. Quelle est la dimension du nombre d'or ? Quelle est l'unité du système international qui permet de l'exprimer ?

Corrections.

Exercice 43.

- a) $2^3 = 8$. b) $3^3 = 27$. c) $2^{-2} = 0,25$. d) $2^{-3} = 0,125$. e) $7^2 = 49$. f) $8^2 = 64$.
g) $2^6 = 64$.

Exercice 44.

- a) $2 \times 3^2 = 18$. b) $3 \times 2 \times 5^2 = 150$. c) $16 + 2 \times 7^2 = 114$. d) $8 \div 2^2 = 2$.
e) $8^2 \div 2 = 32$. f) $\frac{8^2}{4} = 16$. g) $\frac{12}{3 \times 2^6} = \frac{1}{2}$. h) $(2 + 5)^2 = 49$.
i) $3 \times (2 \times 3)^2 = 108$. j) $2^3 \times 7 = 56$. k) $\left(\frac{27}{2+1}\right)^2 = 9$. l) $2^{-3} \times 2^9 = 64$.

Exercice 45.

- a) $12^{4+(-7)} = 12^{-3}$. b) $3^{2 \times 7} = 3^{14}$.
c) $3^2 \times 3^{-6 \times 2} = 3^2 \times 3^{-12} = 3^{2+(-12)} = 3^{-10}$. d) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{10}{3}\right)^4 = \left(\frac{3}{5} \times \frac{10}{3}\right)^4 = 2^4$.

Exercice 46.

- a) $7^2 \times (3 \times 7)^5 = 7^2 \times 3^5 \times 7^5 = 3^5 \times 7^2 \times 7^5 = 3^5 \times 7^{2+5} = 3^5 \times 7^7$.
b) $\left(\frac{4^2}{5}\right)^3 = \frac{(4^2)^3}{5^3} = 4^{2 \times 3} \times 5^{-3} = 4^6 \times 5^{-3}$.
c) $\frac{11^2 \times 7}{2 \times 3} = 2^{-1} \times 3^{-1} \times 7^1 \times 11^2$.
d) $10^7 \times 10^{-2} = 1$.
e) $2^3 \times 2^{-8} \times (2^3)^{100} = 2^{295}$.
f) $\frac{2^7 \times 3^{-2}}{2^{123}} = 2^{-116} \times 3^{-2}$.

Exercice 47. $-2^4 = -16$, $(-2)^4 = 16$, $(-2)^3 = -8$, $-2^3 = -8$, $2^{-3} = 0,125$, $(-2)^{-3} = -0,125$, $\frac{4^6}{2^4} = \frac{2^{12}}{1^4} = 2^8 = 256$, $10^2 \times 10^{-3} = 0,1$, $10^2 + 10^{-3} = 100,001$, $\frac{10^{-2}}{10^{-3}} = 10$, $\frac{10^{-3}}{10^3} = 0,000001$

Exercice 48. Si $x = -\frac{1}{2}$ alors $2x^3 = -\frac{1}{4}$. Si $x = 3 \times 10^{-5}$ alors $2x^3 = 54 \times 10^{-15}$. Si $x = 1,1 \times 10^3$ alors $2x^3 = 2662 \times 10^6$. Si $x = -1,3 \times 10^{-2}$ alors $2x^3 = -2 \times 2197 \times 10^{-9} = -4394 \times 10^{-9}$.

Exercice 49. $(-2x)^2 = 4x^2$, $(-2x)^3 = -8x^3$, $(2x)^3 + 3x^3 = 11x^3$, $x^2 \times x^{-3} = x^{-1}$, $2(x^2)^3 = 2x^6$, $(2x^2)^3 = 8x^6$, $\frac{x^3}{x^{-2}} = x^5$.

Exercice 50. **Déterminons la forme irréductible d'une fraction.**

En décomposant en facteurs premiers les numérateurs et dénominateurs nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{138\,600}{147\,420} &= \frac{2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11}{2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 13} \\ &= \frac{2 \times 5 \times 11}{3^2 \times 13}\end{aligned}$$

La forme irréductible recherchée est $\frac{110}{11}$.

Exercice 51.

a)

$$\begin{aligned}A &= 5^4 \times (3^{-2})^2 \\ &= 5^4 \times 3^{-2 \times 2} \\ &= 5^4 \times 3^{-4} \\ &= \frac{5^4}{3^4}\end{aligned}$$

Comme nous avons des décompositions en facteurs premiers des numérateurs et dénominateurs nous pouvons affirmer que la forme irréductible de A est

$$A = \frac{625}{81}.$$

b)

$$\begin{aligned}B &= \left(\frac{7}{3}\right)^3 \div \left(\frac{4}{10}\right)^4 \\ &= \left(\frac{7}{3}\right)^3 \div \left(\frac{2}{5}\right)^4 \\ &= \frac{7^3}{3^3} \div \frac{2^4}{5^4} \\ &= \frac{7^3}{3^3} \times \frac{5^4}{2^4} \\ &= \frac{7^3 \times 5^4}{3^3 \times 2^4}\end{aligned}$$

$$B = \frac{214\,375}{144}.$$

Exercice 52.

a) $x^4 \times (x^{-2})^3 \times x^5 = x^3$.

b) $\frac{x^7}{x^8 \times x^{-5}} = x^6$.

c) $\frac{x^{-3} \times x^5}{(x^2)^3} = x^{-4}$.

Exercice 53.

- a) $5^{3+8} = 5^{11}$.
 c) $(-3)^{6+9} = (-3)^{15}$.
 e) $10^{14} \times 10^{-20} = 10^{14+(-20)} = 10^{-6}$.
 b) $7^{-4+(-5)} = 7^{-9}$.
 d) $4^7 \times 4^{-4} = 4^{7+(-4)} = 4^3$.
 f) $9^{-5} \times 9^{-11} = 9^{-5+(-11)} = 9^{-16}$.

Exercice 54.

- a) $A = 10^2$.
 b) $B = 10^{-4}$.
 c) $C = 10^{-22}$.

Exercice 55.

- a) $A = a^3 b^{-3}$.
 c) $C = ab^7$.
 e) $E = a^6 b^2$.
 g) $G = a^{-50} b^{-20}$.
 b) $B = ab^5$.
 d) $D = a^{-2} b^4$.
 f) $F = ab^{-3}$.
 h) $H = a^{-17} b^4$.

Exercice 56.

- a) $27 \times 9^5 = 3^{13}$.
 b) $\frac{81^4 \times 9^{-2}}{27^{-3}} = 3^{21}$.
 c) $9^{-3} \times 81^2 = 3^2$.

Exercice 57.

- a) $A = 2^{2n-1}$.
 b) $B = 2^{4n+5}$.
 c) $C = 2^{2n-3}$.

Exercice 58.

- a) $3^n + 2 \times 3^{n+2} = 3^n(1 + 2 \times 3^2) = 19 \times 3^n$.
 b) $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} = 7^n(1 + 7 + 7^2) = 57 \times 7^n$.
 c) $(13^n)^2 + 13^n = 13^n(13^n + 1)$.

Exercice 59.

- a) $y^{-3} = (2x^3)^{-3} = 2^{-3} \times (x^3)^{-3} = 0,125x^{3 \times (-3)} = 0,125x^{-9}$.
 b) $3y^2 + y = 3(2x^3)^2 + 2x^3 = 12x^6 + 2x^3$.
 c) $\frac{1}{y^{12}} = \frac{1}{(2x^3)^{12}} = 2^{-12} x^{-36}$.
 d) $\frac{1+y^5}{y^{-2}} = \frac{1+(2x^3)^5}{(2x^3)^{-2}} = \frac{1+32x^{15}}{2^{-2}x^{-6}} = 4x^6(1 + 32x^{15})$.

Exercice 60.

- $123\,400\,000 = 1,234 \times 10^8$ et $0,000\,123 = 1,23 \times 10^{-4}$ et $451 = 4 \times 10^2$ et $92\,384 = 9,2384 \times 10^4$.
- $\frac{1}{2} \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-6}$.
- $200 \times 10^6 = 2 \times 10^8$.

Exercice 61. Si $x = 3,25 \times 10^{25}$ et $y = 8 \times 10^{23}$ alors $x + y = 3,33 \times 10^{25}$, $x - y = 3,17 \times 10^{25}$, $x \times y = 2,6 \times 10^{49}$, $\frac{x}{y} = 4,625 \times 10^1$.

Exercice 62.

- En secondes $\frac{150 \times 10^6}{300000} = \frac{15 \times 10^7}{3 \times 10^5} = 5 \times 10^{-2}$.
- En kilomètre par jour : $\frac{2\pi 15 \times 10^7}{365} \approx 2,582 \times 10^6$.

Exercice 63.

- Exprimons un pied en millimètre.
 D'après l'énoncé :

$$35\,000 \text{ ft} = 10\,668 \text{ m}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{35\,000 \text{ ft}}{35\,000} = \frac{10\,668 \text{ m}}{35\,000}$$

$$\frac{35\,000}{35\,000} \text{ ft} = \frac{10\,668}{35\,000} \text{ m}$$

$$1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ ft} = 0,3048 \times 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ ft} = 304,8 \text{ mm}.$$

2. Déterminons l'heure d'arrivée.

Nous connaissons la vitesse de l'avion et la distance qu'il doit parcourir, par conséquent la durée du trajet restant est

$$\begin{aligned} d_r &= \frac{4018 \text{ km}}{853 \text{ km/h}} \\ &= \frac{4018}{853} \frac{\text{km}}{\text{km} \cdot \text{h}^{-1}} \\ &= \frac{4018}{853} \text{ h} \\ &= \left(4 + \frac{606}{853}\right) \text{ h} \\ &= (4 \text{ h}) + \left(\frac{606}{853} \times 60 \text{ min}\right) \\ &\approx (4 \text{ h}) + (43 \text{ min}) \end{aligned}$$

Par conséquent l'heure à l'arrivée sera, en arrondissant à la minute :

$$\begin{aligned} (15 \text{ h}) + (43 \text{ min}) + (4 \text{ h}) + (43 \text{ min}) &= [(15 + 4) \text{ h}] + [(43 + 43) \text{ min}] \\ &= (19 \text{ h}) + (86 \text{ min}) \\ &= (19 \text{ h}) + [(1 \times 60 + 26) \text{ min}] \\ &= (19 \text{ h}) + (1 \text{ h}) + (26 \text{ min}) \end{aligned}$$

Finalement :

Lorsqu'ils arriveront l'heure locale sera : 19 h et 26 min.

Exercice 64.

1. Calculons le volume V_1 de la boîte.

Puisque la base de ce cylindre est un disque de rayon $\frac{99}{2}$ mm, d'après la formule qui nous est rappelée :

$$\begin{aligned} V_1 &= \left[\pi \left(\frac{99}{2} \text{ mm} \right)^2 \right] \times (118 \text{ mm}) \\ &= \pi \times \left(\frac{99}{2} \right)^2 \times 118 \text{ mm}^2 \cdot \text{mm} \\ &= 289\,129,5\pi \text{ mm}^3 \\ &= 289\,129,5\pi \left(\frac{1}{10} \text{ cm} \right)^3 \\ &= 289\,129,5\pi \times \frac{1}{1000} \text{ cm}^3 \\ &\approx 908,327\,11 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$V_1 \approx 908 \text{ cm}^3.$$

2. Calculons le volume V_2 correspondant à 95 % du volume de la boîte précédente.

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{95}{100} \times V_1 \\ &= \frac{95}{100} \times 289,129\,5\pi \text{ cm}^3 \\ &= \frac{95}{100} \times 289,129\,5\pi \text{ mL} \\ &\approx 862,9107 \text{ mL} \end{aligned}$$

Nous avons bien $V_2 > 850 \text{ mL}$.

La boîte contient au moins 850 mL.

3. Nous pourrions faire les calculs numériques pour comparer les volumes de boîtes mais nous allons démontrer que ce résultat est inexacte pour tous les cylindres.

Démontrons que doubler le diamètre ne signifie pas doubler le volume.

Notons d le diamètre de la base du cylindre et h sa hauteur. Alors son volume est :

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \times h \\ &= \frac{1}{4} \pi d^2 h \end{aligned}$$

Le volume obtenu en doublant le diamètre est :

$$\begin{aligned} V_4 &= \pi \left(\frac{2d}{2} \right)^2 \times h \\ &= \pi d^2 h \end{aligned}$$

Nous remarquons que : $4V_3 = V_4$ et donc (hormis dans le cas de volumes nuls) :

lorsque le diamètre double le volume du cylindre ne double pas.

Exercice 65. $\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{s}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Exercice 66. x est en mètres. v s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et t^2 en s^2 donc vt s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}$. L'équation n'est pas homogène. Elle est donc fausse.

Exercice 67. $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Exercice 68. $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Exercice 69. Ce n'est pas $1 \times 2 \text{ kg} = 1000 \times 2000 \text{ g}$ qu'il faut écrire mais $1 \text{ kg} \times 2 \text{ kg} = 1000 \text{ g} \times 2000 \text{ g}$. Et donc l'égalité ne concerne pas des masses mais des masses au carré (?).

Exercice 70. Le nombre d'or est une proportion donc un nombre sans unité.

III Identités remarquables.

Une identité est une égalité qui est toujours vraie (contrairement par exemple à une équation). Par exemple : $2(x + 3) = 2x + 6$ est une identité remarquable.

Les identités à connaître par cœur.

Proposition 4. Pour tous nombres a et b : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

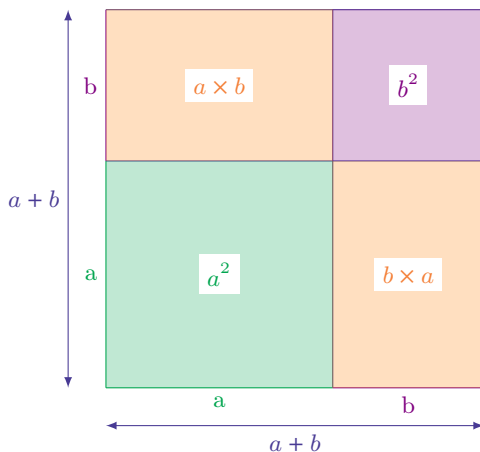
Démonstration. Soient a et b des nombres réels (sous-entendu quelconque).

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \times (a + b) \\ &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Remarques.

1. Une interprétation géométrique de cette identité avec des aires de rectangles.



L'aire du grand carré $(a + b)^2$ est obtenue comme la somme des aires des deux petits carrés a^2 et b^2 ainsi que de celle des rectangles $a \times b$ et $b \times a$.

2. L'intérêt des identités remarquables réside surtout dans la possibilité de factorisations qui sans cela seraient difficiles. La factorisation permettra la résolution d'équation, l'étude du signe de fonction, la résolution d'inéquations...

Exemples.

1. Utilisation pour trouver une forme développée réduite et ordonnée d'un polynôme : $(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$. Pour montrer par exemple que deux formules littérales sont égales.
2. Utilisation pour factoriser : $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = (3x + 1)^2$. Nous utiliserons la factorisation pour résoudre des équations produit-nul, puis, plus généralement pour étudier le signe d'une expression. Ainsi : $9x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

Proposition 5. Pour tous nombres a et b : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Démonstration. Soient a et b des nombres réels (sous-entendu quelconque).

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b) \times (a - b) \\ &= a \times a + a \times (-b) + (-b) \times a + (-b) \times (-b) \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\text{Pour tous } a, b \in \mathbb{R}, (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Proposition 6. Pour tous nombres a et b : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Démonstration. Soient a et b des réels.

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b) \\ &= a^2 - ab + ab + b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

$$\text{Pour tous } a, b \in \mathbb{R}, (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

EXERCICE 71. Développez les expressions polynomiales suivantes.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } (x + 6)^2. & \text{b) } (x - 11)^2. & \text{c) } (x + 3^2)(x - 3^2). & \text{d) } (2x - 3)^2. \\ \text{e) } (-7x + 3)^2. & \text{f) } (3x - 6)(3x + 6). & \text{g) } (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}). & \text{h) } x(5x - 7)^2. \end{array}$$

EXERCICE 72. Factorisez les expressions polynomiales suivantes.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } x^2 + 6x + 9. & \text{b) } x^2 - 4x + 4. & \text{c) } x^2 + 16x + 64. & \text{d) } x^2 - x + \frac{1}{4}. \\ \text{e) } x^2 + 2x + 1. & \text{f) } x^2 - 8. & \text{g) } x^4 - 49. & \text{h) } 49x^2 - 14x + 1. \end{array}$$

EXERCICE 73. Résolvez les équations en mettant en évidence des équations produit-nul.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } x^2 + 6x + 9 = 0. & \text{b) } x^2 - 49 = 0. & \text{c) } x^2 = 81. & \text{d) } 9x^2 - 42x + 49 = 0. \\ \text{e) } x^2 + 4 = 0. & \text{f) } x^4 - 16 = 0. & \text{g) } 3x = -\frac{1}{4}x^2 - 9. & \text{h) } x^2 = 14x - 7. \end{array}$$

Exercices.

EXERCICE 74. Soit $A(x) = (x^2 - 9)^2 - (x + 3)^2$.

1. Développez $A(x)$.
2. Factorisez $A(x)$ par deux méthodes différentes.
3. Calculez $A(x)$ successivement pour $x = 0$, $x = 4$, $x = \sqrt{6}$.

EXERCICE 75. Soit $f : x \mapsto (x + 1)^2 - 4$.

1. Développez $f(x)$.
2. Factorisez $f(x)$.
3. Parmi les trois formes précédentes de $f(x)$, choisissez la plus adaptée pour :
(a) calculez $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{3})$.

- (b) résolvez l'équation $f(x) = 0$.
- (c) résolvez l'équation $f(x) = -4$.
- (d) résolvez l'équation $f(x) = -3$.

EXERCICE 76.

1. Développez $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, pour x non nul.
2. On suppose que $x + \frac{1}{x} = 3$; que vaut alors $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

EXERCICE 77.

1. Démontrez les identités suivantes.

- a) $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$.
- b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$.
- c) $(x^2 + xy)^2 + (y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2)(x + y)^2$.
- d) $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$.

2. Déduisez de d) des entiers relatifs non nul x , y et z vérifiant $x^2 = y^2 + z^2$; vous en donnerez au moins trois exemples.

EXERCICE 78. Résolvez les équations suivantes en vous ramenant à des équations du premier degré en factorisant.

- a) $4x^2 - (x + 1)^2 = 0$.
- b) $(2x + 1)^2 - (x + 2)^2 = 0$.
- c) $(2x + 7)^2 - 9(x + 2)^2 = 0$.
- d) $4(2x + 7)^2 - 9(x + 3)^2 = 0$.
- e) $(4x^2 - 3x - 18)^2 = (4x^2 + 3x)^2$.
- f) $(2x - 3)(x - 1)^2 = 4(2x - 3)$.
- g) $(5x - 10)(x - 3) - 3(x^2 - 4) = 0$.
- h) $(x^2 + 1)(4 - 3x) - 8x + 6x^2 = 0$.

EXERCICE 79. Résolvez les équations suivantes en vous ramenant à des équations du premier degré en factorisant.

- a) $(9x^2 - 1)^2 - 4(3x + 1)^2 = 0$.
- b) $\left(\frac{3x}{5} - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{3}\right)^2 = 0$.
- c) $\left(\frac{2x + 3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5 - 3x}{12}\right)^2$.
- d) $(x^2 - 16)^2 = (x + 4)^2$.
- e) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$.
- f) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$.
- g) $x^3 - 8 - 2(x^2 - 4) = 0$.

Corrections.

Exercice 71.

- a) $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$.
- b) $(x - 11)^2 = x^2 - 22x + 121$.
- c) $(x + 3^2)(x - 3^2) = x^2 - 81$.
- d) $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
- e) $(-7x + 3)^2 = 49x^2 - 42x + 9$.
- f) $(3x - 6)(3x + 6) = 9x^2 - 36$.
- g) $(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) = x^2 - 8$.
- h) $x(5x - 7)^2 = 25x^3 - 70x^2 + 49x$.

Exercice 72.

- a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.
- b) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.
- c) $x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$.
- d) $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.
- e) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.
- f) $x^2 - 8 = (x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$.
- g) $x^4 - 49 = (x^2 - 7)(x^2 + 7)$.
- h) $49x^2 - 14x + 1 = (7x - 1)^2$.

Exercice 73.

- a) $x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.
 b) $x^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 7) = 0 \Leftrightarrow x - 7 = 0$ ou $x + 7 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-7; 7\}$.
 c) $x^2 = 81 \Leftrightarrow x^2 - 9^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 9)(x + 9) = 0 \Leftrightarrow x \in \{9, -9\}$.
 d) $9x^2 - 42x + 49 = 0 \Leftrightarrow (3x)^2 - 2 \times 3x \times 7 + 7^2 = 0 \Leftrightarrow (3x - 7)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$.
 e) $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.
 f) $x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
 g) $3x = -\frac{1}{4}x^2 - 9 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2}x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -6$.
 h) $x^2 = 14x - 7 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 7 + 7 = 0$. Pas de factorisation.

Exercice 74. ✍

1. Développons $A(x)$.

$$A(x) = (x^2 - 9)^2 - (x + 3)^2 = (x^2)^2 - 2 \times x^2 \times 9 + 9^2 - (x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2) = x^4 - 18x^2 + 81 - (x^2 + 6x + 9) = x^4 - 18x^2 + 81 - x^2 - 6x - 9.$$

$$A(x) = x^4 - 20x^2 - 6x + 72.$$

2. Factorisons $A(x)$.

$$* A(x) = (x^2 - 9)^2 - (x + 3)^2 = [(x^2 - 9) - (x + 3)][(x^2 - 9) + (x + 3)].$$

$$A(x) = (x^2 - x - 12)(x^2 + x - 6).$$

$$* A(x) = [(x - 3)(x + 3)]^2 - (x + 3)^2 = (x + 3)^2 [(x - 3)^2 - 1] = (x + 3)^2 [(x - 3 - 1)(x - 3 + 1)]$$

$$A(x) = (x + 3)^2(x - 4)(x - 2).$$

3. * Calculons $A(0)$.

$$\text{Avec } A(x) = x^4 - 20x^2 - 6x + 72$$

$$A(0) = 72.$$

* Calculons $A(4)$.

$$\text{Avec } A(x) = (x + 3)^2(x - 4)(x - 2)$$

$$A(4) = 0.$$

* Calculons $A(\sqrt{6})$.

$$\text{Avec } A(x) = (x^2 - x - 12)(x^2 + x - 6) : A(\sqrt{6}) = (-6 - \sqrt{6})\sqrt{6}$$

$$A(\sqrt{6}) = -36 - 6\sqrt{6}.$$

Exercice 75.

1. $f(x) = x^2 + 2 \times x \times 1^2 - 4 = x^2 + 2x - 3$.
 2. $f(x) = (x + 1)^2 - 2^2 [(x + 1) + 2] \times [(x + 1) - 2] = (x + 3)(x - 1)$.
 3. (a) $f(0) = 0^2 + 2 \times -3 = -3$. $f(1) = (1 + 3)(1 - 1) = 0$. $f(-3) = (-3 + 3)(-3 - 1) = 0$.
 $f(-1) = (-1 + 1)^2 - 4 = -4$. $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} - 3 = 2\sqrt{3}$.
 (b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 1$.

$$(c) f(x) = -4 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 4 = -4 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$(d) f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = -3 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \text{ ou } x = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 0.$$

Exercice 76. ✍

$$1. \text{ Soit } x \in \mathbb{R} \text{ avec } x \neq 0. \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 = 2 \times x \times \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \text{ quel que soit le nombre } x \text{ non nul.}$$

$$2. \text{ Supposons } x + \frac{1}{x} = 3 \text{ et calculons alors } x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{D'après la question précédente : } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2.$$

$$\text{Si } x + \frac{1}{x} = 3 \text{ alors } x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$$

Exercice 77.

1. Démontrez les identités suivantes.

$$a) \text{ D'une part : } (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = x^2 \times a^2 + x^2 \times b^2 + y^2 \times a^2 + y^2 \times b^2, \text{ d'autre part : } (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (ax)^2 + 2 \times ax \times by + (by)^2 + (ay)^2 - 2 \times ay \times bx + (bx)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 \text{ donc } (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2.$$

$$b) \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = ab.$$

$$c) \text{ D'une part : } (x^2 + xy)^2 + (y^2 + xy)^2 = (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times xy + (xy)^2 + (y^2)^2 + 2 \times y^2 \times xy + (xy)^2 = x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 + 2x^2y^2, \text{ d'autre part : } (x^2 + y^2)(x + y)^2 = (x^2 + y^2)(x^2 + 2xy + y^2) = x^2 \times x^2 + x^2 \times 2xy + x^2 \times y^2 + y^2 \times x^2 + y^2 \times 2xy + y^2 \times y^2 = x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 + 2x^2y^2 \text{ donc } (x^2 + xy)^2 + (y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2)(x + y)^2.$$

$$d) \text{ D'une part : } (a^2 + b^2)^2 = (a^2)^2 + 2 \times a^2 \times b^2 + (b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2, \text{ d'autre part : } (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2)^2 - 2 \times a^2b^2 + (b^2)^2 + 4a^2b^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \text{ donc } (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2.$$

$$2. \text{ Avec } a = 3 \text{ et } 5 : (3^2 + 5^2)^2 = (3^2 - 5^2)^2 + (2 \times 3 \times 5)^2 \text{ donc } (34; -16; 30) \text{ est un triplet Pythagoricien.}$$

Exercice 78.

$$a) 4x^2 - (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow [4x - (x+1)][4x + (x+1)] = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(5x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right\}.$$

$$b) (2x+1)^2 - (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow [2x+1-(x+2)][2x+1+(x+2)] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+3) \Leftrightarrow x \in \{1, -1\}.$$

$$c) (2x+7)^2 - 9(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow [2x+7-3(x+2)][2x+7+3(x+2)] = 0 \Leftrightarrow (-x+1)(5x+13) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1, -\frac{13}{5}\right\}.$$

$$d) 4(2x+7)^2 - 9(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow [2(2x+7)-3(x+3)][2(2x+7)+3(x+3)] = 0 \Leftrightarrow (x+5)(7x+23) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-5, -\frac{23}{7}\right\}.$$

$$e) (4x^2 - 3x - 18)^2 = (4x^2 + 3x)^2 \Leftrightarrow [4x^2 - 3x - 18 - (4x^2 + 3x)][4x^2 - 3x - 18 + (4x^2 + 3x)] = 0 \Leftrightarrow (-6x-18)(8x^2-18) = 0 \Leftrightarrow -6(x+3)2(2x-3)(2x+3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-3; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right\}.$$

$$f) (2x-3)(x-1)^2 = 4(2x-3) \Leftrightarrow (2x-3)[(x-1)^2 - 4] = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x-1-2)(x-1+2) = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{3}{2}, 3, -1\right\}.$$

$$g) (5x-10)(x-3) - 3(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow 5(x-2) - 3(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)[5-3(x+2)] = 0 \Leftrightarrow (x-2)(-3x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2; -\frac{1}{3}\right\}.$$

$$h) (x^2+1)(4-3x) - 8x+6x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)(4-3x) - 2x(4-3x) = 0 \Leftrightarrow (4-3x)[x^2+1-2x] = 0 \Leftrightarrow (4-3x)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{4}{3}, 1\right\}.$$

Exercice 79.

- a) $(9x^2 - 1)^2 - 4(3x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x - 1)(3x + 1) - 4(3x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x + 1)[3x - 1 - 4(3x + 1)] = 0 \Leftrightarrow (3x + 1)(-9x - 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{3}, -\frac{5}{9}\right\}.$
- b) $\left(\frac{3x}{5} - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{3x}{5} - \frac{1}{3} - \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{3}\right)\right]\left[\frac{3x}{5} - \frac{1}{3} + \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{3}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{5} - 1\right)\left(\frac{4x}{5} + \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{5}{2}, -\frac{5}{12}\right\}.$
- c) $\left(\frac{2x+3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5-3x}{12}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2x+3}{4} - \frac{5-3x}{12}\right)\left(\frac{2x+3}{4} + \frac{5-3x}{12}\right) \Leftrightarrow \frac{9x-4}{12} \times \frac{3x+14}{12} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{4}{9}, -\frac{14}{3}\right\}.$
- d) $(x^2 - 16)^2 = (x + 4)^2 \Leftrightarrow (x + 4)^2[(x - 4)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow (x + 4)^2(x - 5)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4; 5; 3\}.$
- e) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow 9x^2(x + 2) - (x + 2) = 0 \Leftrightarrow (9x^2 - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (3x - 1)(3x + 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -2\right\}.$
- f) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 2) - 5(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-5, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}.$
- g) $x^3 - 8 - 2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}.$

IV Développer des expressions polynomiales.

Les polynômes.

Les monômes sont des expressions algébriques formées du produit d'un *coefficient* a réel par une puissance d'une *indéterminée* $\mathbf{X}$: $a\mathbf{X}^n$.

Exemples.

1. Exemples de monômes : $4\mathbf{X}^0 = 4$, $-3\mathbf{X}^1 = -3\mathbf{X}$, $\pi\mathbf{X}^2$, $12,5\mathbf{X}^7$ et $0\mathbf{X} = 0$

L'exposant de $\mathbf{X}$ est appelé le *degré* du monôme.

Exemples.

1. $-3\mathbf{X}$ est de degré 1.
2. $\pi\mathbf{X}^2$, est de degré 2.
3. $12,5\mathbf{X}^7$ est de degré 7.
4. 4 est de degré 0.
5. $0\mathbf{X} = 0$ est de degré $-\infty$.

Un *polynôme* est une somme (finie) de monômes.

Exemples.

1. $-3 + 8\mathbf{X}^2 + 4\mathbf{X} - 7\mathbf{X}^3 - 7\mathbf{X} + 10$ est un polynôme.

On dit qu'un polynôme est *réduit* lorsque tout ses monômes sont de degrés distincts.

Exemples.

1. $3\mathbf{X}^2 - 12\mathbf{X}^5 + 2$ est sous forme réduite.
2. $5 + 7\mathbf{X} - 14\mathbf{X}^2 + 8\mathbf{X}$ n'est pas sous forme réduite car les monômes $7\mathbf{X}$ et $8\mathbf{X}$ sont semblables (même degré).

EXERCICE 80. Donnez la forme réduite des polynômes suivants :

- a) $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$ b) $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12$ c) $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12$

Le degré d'un polynôme réduit est le plus grand degré de ses monômes.

Un polynôme réduit est dit *ordonné* lorsque ses monômes sont rangés suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée $\mathbf{X}$.

Remarques.

1. Pour ordonner il faut voir le signe moins comme le symbole de l'opposé : il est accroché au nombre qui le suit : $3 - 2x = 3 + (-2x) = -2x + 3$. Ce qu'on écrira directement : $3 - 2x = -2x + 3$.

Exemples.

1. $-7\mathbf{X}^3 + \mathbf{X} - 3$ est ordonné.
2. $\mathbf{X} - 7\mathbf{X}^2 + 2$ ne l'est pas. Si on l'écrit $-7\mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 2$ il maintenant ordonné.

EXERCICE 81. Donnez la forme ordonnée et réduite des polynômes suivants :

- a) $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X}$ b) $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2$ c) $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9$

Les polynômes ont ceci de merveilleux qu'ils peuvent s'appliquer à un très grand nombre d'objets $\mathbf{X}$ peut désigner des nombres bien sûr mais aussi d'autres polynômes, des fonctions, des transformations géométriques, des tableaux de nombres (matrices), et cetera. Nous utiliserons des expressions polynomiales essentiellement pour les formules algébriques des fonctions (identité, carré, cube,...)

Exemples.

1. $x^2 - x + 3$ est une expression polynomiale sous forme développée, réduite et ordonnée
2. $-x + 3 + x^2$ est une expression polynomiale mais elle n'est pas ordonnée.
3. $x^2 - 2x + x + 5 - 2$ est une expression polynomiale mais elle n'est pas réduite.

4. $x^3(x+1)$ est une expression polynomiale.
5. $\frac{3x^3}{x+1}$ n'est pas une expression polynomiale mais les numérateurs et dénominateurs en sont.
6. $\sqrt{x^2+1}+2x+7$ n'est pas une expression polynomiale.
7. L'expression algébrique d'une fonction affine est une fonction polynomiale.

Dans la suite les indéterminées, $\mathbf{X}$, seront notées comme des variables, x , conformément à l'usage que nous en ferons le plus souvent.

Développer, réduire et ordonner des polynômes.

$x^2(3x-1)$ n'est, a priori, pas un polynôme puisque ce n'est pas une somme de monômes. Cependant en distribuant x^2 :

$$\begin{aligned}x^2(3x-1) &= x^2 3x - x^2 1 \\&= x^2 3x^1 - x^2 \\&= 3x^{2+1} - x^2 \\&= 3x^3 - x^2\end{aligned}$$

Ainsi $x^2(3x-1) = 3x^3 - x^2$ est bien un polynôme de degré 3.

Afin d'identifier chaque polynôme la convention est de l'écrire sous forme développée, réduite et ordonnée car cette écriture est unique.

Définition 3. Deux polynômes sont dits *égaux* lorsqu'ils ont la même expression développée, réduite et ordonnée.

Remarques.

1. La forme développée, ordonnée et réduite permet notamment l'identification polynomiale : si $3x^3 + 4x - 7 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ alors $a = 3$, $b = 0$, $c = 4$ et $d = -7$.

La boîte à outil pour développer.

Proposition 7. Les lettres a, b, c, d désignent des nombres, des expressions algébriques, des fonctions numériques etc.

- (i) *Distributivité* de la multiplication sur l'addition : $a(b+c) = ab+ac$
- (ii) Double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
- (iii) *Identités remarquables* : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.

Démonstration.

- (i) La distributivité n'est pas démontrable. C'est un axiome de la construction de la multiplication de l'ensemble des nombres réels.
- (ii) On applique en deux temps la propriété de distributivité.
- (iii) Les égalités se démontrent en partant du membre de gauche vers faisant :
 - . $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ puis on utilise la double distributivité.
 - . $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ puis on utilise la double distributivité.
 - . En utilisant la double distributivité.

Remarques.

1. Si ces méthodes de développement vont être ici mises en œuvre pour des polynômes il ne faut pas oublier leur grande généralité : nous utiliserons le développement pour d'autres expressions littérales ou numériques.

- La présentation en colonne des étapes de développement peut faciliter leur lecture. Cependant ce n'est pas une obligation car, comme il s'agit d'un calcul, de la ré-écriture d'un même nombre, on peut accumuler les égalités en ligne.
- Nous n'utiliserons le développement que pour des expressions littérales. Pour une expression numérique on se contente de respecter les priorités opératoires. C'est parce que l'évaluation de l'expression littérale est impossible que l'on utilise le développement.

Exemples.

- $2x(7 - 4x) = 2x \times 7 + 2x \times (-4x) = -8x^2 + 14x.$
- $(1 + 2x)(4 - 3x^2) = 1 \times 4 + 1 \times (-3x^2) + 2x \times 4 + 2x \times (-3x^2) = 4 - 3x^2 + 8x - 6x^3 = -6x^3 - 3x^2 + 8x + 4.$
- $(-3x + 5)^2 = (-3x)^2 + 2 \times (-3x) \times 5 + 5^2 = 9x^2 - 30x + 25.$
- $-5(2x - 1)(x + 4) = -5[2x \times x + 2x \times 4 + (-1) \times x + (-1) \times 4] = -5(2x^2 + 7x - 4) = -10x^2 - 35x + 20.$

EXERCICE 82. Développez, ordonnez puis réduisez les expressions suivantes.

- a) $4x(x + 3).$ b) $(3 + x)(2x - 1).$ c) $(x + 3)^2.$ d) $(2x - 4)^2.$
e) $(-x + 5)(-x - 5).$ f) $(10^3 - a)(10^3 + a).$ g) $(a^3 - b^3)(a^3 + b^3).$ h) $(a + b + c)^2.$

Exercices.

EXERCICE 83. Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

- a) $12(x - 3) - 14(x + 4).$ b) $11(x - 9) - 7(x - 1).$ c) $5x(x - 3).$
d) $28x(3x^2 - 4x + 12).$ e) $-2x(3x^2 - x^2 + 2).$ f) $3,2x^2(5x^2 - 12x - 1,1).$
g) $3x^2(2x^2 - x + 4).$ h) $(x - 2)(x^2 + 3) - (x + 2)x^2.$

EXERCICE 84. Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

- a) $(x + 3)(x + 4).$ b) $(3x + 4)(x - 5).$ c) $(2x + 1)(x + 2).$ d) $(3x - 2)(2x + 3).$
e) $(x - 5)(x - 2).$ f) $(2x - 1)(4x + 3).$ g) $(2x - 7)^2.$ h) $(5x - 2)(x + 4).$
i) $(3x + 1,5)(2x - 3).$ j) $(5x - 7)(0,5x - 1,2).$ k) $(2x - 1,1)(x + 4).$ l) $(x - 7)(x + 7).$

EXERCICE 85. Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

- a) $(x - 1)(x - 2)$ b) $(11x - 12)^2$ c) $(x + 5)^2$ d) $(x - 5)^2$ e) $(x + 5)(x - 5)$
f) $(2x - 7)^2$ g) $(3 + 2x)^2$ h) $(11 - x)(11 + x)$ i) $\left(3x + \frac{5}{6}\right)^2$ j) $\left(7x - \frac{1}{3}\right)^2$

EXERCICE 86. Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

- a) $\left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)$ b) $(5 - 11x)^2$ c) $(12 + 13x)^2$ d) $(9x - 4)(4 + 9x)$
e) $\left(10x + \frac{1}{3}\right)^2$ f) $(-x + 1,2)^2$ g) $(0,7 - x)(0,7 + x)$

EXERCICE 87. Démontrez les égalités proposées, valables pour tout x réel.

- a) $(-2x + 8)(x - 7) = -2x^2 + 22x - 56,$ b) $-9 + 6x + 3x^2 = -3(1 - x)(x + 3),$
c) $-3(x - 3)^2 + 3 = -3(x - 4)(x - 2).$

EXERCICE 88. Vérifiez que les trois formes proposées, A , B et C , correspondent à une même expression polynomiale.

- a) $A(x) = (x-3)(x+5)$. $B(x) = x^2 + 2x - 15$. $C(x) = (x+1)^2 - 16$.
 b) $A(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$. $B(x) = (x-3\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. $C(x) = (x-\sqrt{2})^2 - 8$
 c) $A(x) = 2x^2 + 3x - 2$. $B(x) = (2x-1)(x+2)$. $C(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.

EXERCICE 89. Est-il possible que $x^2 - 3x + 4$ s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x+1)(ax+b)$ avec a et b réels ?

EXERCICE 90. Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

- a) $(2x-3)^2$.
 b) $\left[(2x^2 - 2x + 3) - (2x^2 + 3)\right](5x^2 - 4x)$.
 c) $(3x-1)(5x-2) + (x+2)^2$.
 d) $(5x-3)(3x+1) - (2x-4)(-x+5)$.
 e) $(1,5x-5)(1,5x+5) - (x-1)^2$.
 f) $(5x+2)^2 - (x-3)^2$.

EXERCICE 91. Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

- a) $(3x-2)^2 - (5-4x)(4-6x)$.
 b) $(x-1)(2x+3) + (x-1)(x+2)$.
 c) $(2x-5)(2x+5)$.
 d) $(3x+1)(7x-2) + (x-2)^2$.
 e) $(4x-3)(3x+2) - (2x+5)(x-3)$.
 f) $(1,5x-2)(1,5x+2) - (x+3)^2$.

EXERCICE 92. Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

- a) $(3x-2)^2 - (x-4)^2$.
 b) $(3x+1)^2 - (5-4x)(2+3x)$.
 c) $(x-1)(2x+2) + (x-1)(2x+2)$.
 d) $(x+1)(x-3) + (x+1)(3x+1)$.
 e) $(2x-4)(x-1) - (x-2)(3x+2)$.
 f) $(x-3)(x+2) - (x-2)(2x+1)$.

EXERCICE 93. Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

- a) $(x+1)(x-4) - (2x+8)(x+5)$.
 b) $(3x-2)^2 - (5x-4)(2+3x)$.
 c) $(x+2)(2x-3) + (x-1)(x+2)$.

EXERCICE 94. *Algorithme de Horner*. À la calculatrice, une instruction $x \wedge 3$ compte pour 2 multiplications : $x \wedge 3 = x \times x \times x$.

1. Premier exemple.

Soit $f(x) = x^2 + 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$ (forme A).

- (a) Vérifiez que $f(x) = 3 + x(x+4)$ pour tout x réel (forme H).
 (b) Combien d'opérations sont effectuées avec la forme A ? avec la forme H ?
 (c) On programme le calcul de $f(x)$ pour x variant de 0 à 2 avec un pas de 0,1.
 Combien d'opérations sont nécessaires avec chacune des deux formes ?

2. Deuxième exemple.

Reprendre les questions a , b et c de la question 1 pour $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ (forme A) et $f(x) = -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x)))$ (forme H).

3. Troisième exemple.

Soit $f(x) = 4x^7 + 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.

- (a) Proposer la forme H associée.
 (b) Reprendre les questions 1(b) et 1(c).

4. Quel est le gain obtenu en nombre d'opérations pour $f(x) = x^{50} + x^{49} + x^{48} + \dots + x^2 + x + 1$?

On pourra programmer un algorithme pour effectuer un calcul de ce gain.

EXERCICE 95. Soit x un nombre réel différent de 1, démontrez que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1-x^5}{1-x}$.

Corrections.

Exercice 80.

- a) $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2 = -3\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$
- b) $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12 = 7\mathbf{X}^{25} - 14\mathbf{X} + 15$
- c) $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12 = 3\mathbf{X}^2 + 6\mathbf{X} + 12$

Exercice 81.

- a) $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X} = 4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 10\mathbf{X} - 14$
- b) $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 23$
- c) $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9 = 4\mathbf{X}^2 + 12\mathbf{X} + 9$

Exercice 82.

- a) En utilisant la distributivité : $4x(x+3) = 4x \times x + 4x \times 3 = 4x^2 + 12x$.
En utilisant la double distributivité : $(3+x)(2x-1) = (3+x)(2x+(-1)) = 3 \times 2x + 3 \times (-1) + x \times 2x + x \times (-1) = 6x - 3 + 2x^2 - x = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$.
- b) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Avec $a = x$ et $b = 3$.
 $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.
- c) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Avec $a = 2x$ et $b = 4$.
 $(2x-4)^2 = (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 4 + 4^2 = 2^2 x^2 - 16x + 16 = 4x^2 - 16x + 16$.
- d) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Avec $a = -x$ et $b = 5$.
 $(-x+5)(-x-5) = (-x)^2 - 5^2 = x^2 - 15$.
- e) $(10^3 - a)(10^3 + a) = (10^3)^2 - a^2 = -a^2 + 10^6$.
- f) $(a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = (a^3)^2 - (b^3)^2 = a^6 - b^6$.
- g) $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a \times a + a \times b + a \times c + b \times a + b \times b + b \times c + c \times a + c \times b + c \times c = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

Exercice 83.

- a) $12(x-3) - 14(x+4) = -2x - 92$.
- b) $11(x-9) - 7(x-1) = 3x - 92$.
- c) $5x(x-3) = 5x^2 - 15x$.
- d) $28x(3x^2 - 4x + 12) = 84x^3 - 112x^2 + 336x$.
- e) $-2x(3x - x^2 + 2) = 2x^3 - 6x^2 - 4x$.
- f) $3,2x^2(5x^2 - 12x - 1,1) = 16x^4 - 38,4x^3 - 3,52x^2$.
- g) $3x^2(2x^2 - x + 4) = 6x^4 - 3x^3 + 12x^2$.
- h) $(x-2)(x^2+3) - (x+2)x^2 = -4x^2 + 3x - 6$.

Exercice 84.

- a) $(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$.
- b) $(3x+4)(x-5) = 3x^2 - 11x - 20$.
- c) $(2x+1)(x+2) = 2x^2 + 5x + 2$.
- d) $(3x-2)(2x+3) = 6x^2 + 5x - 6$.
- e) $(x-5)(x-2) = x^2 - 7x + 10$.
- f) $(2x-1)(4x+3) = 8x^2 + 2x - 3$.
- g) $(2x-7)^2 = 4x^2 - 49$.
- h) $(5x-2)(x+4) = 5x^2 + 18x - 8$.
- i) $(3x+1,5)(2x-3) = 6x^2 - 6x - 4,5$.
- j) $(5x-7)(0,5x-1,2) = 2,5x^2 - 9,5x + 8,4$.
- k) $(2x-1,1)(x+4) = 2x^2 + 6,9x - 4,4$.
- l) $(x-7)(x+7) = x^2 - 49$.

Exercice 85.

- a) $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$.
- b) $(11x-12)^2 = 121x^2 - 144x + 144$.
- c) $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$.
- d) $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$.
- e) $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$.
- f) $(2x-7)^2 = 4x^2 - 28x + 49$.
- g) $(3+2x)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
- h) $(11-x)(11+x) = -x^2 + 121$.
- i) $\left(3x + \frac{5}{6}\right)^2 = 9x^2 + 5x + \frac{25}{36}$.
- j) $\left(7x - \frac{1}{3}\right)^2 = 49x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{1}{9}$.

Exercice 86.

$$\text{a) } \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{25}{36}.$$

$$\text{c) } (12 + 13x)^2 = 169x^2 + 312x + 144.$$

$$\text{e) } \left(10x + \frac{1}{3}\right)^2 = 100x^2 + \frac{20}{3}x + \frac{1}{9}.$$

$$\text{g) } (0,7 - x)(0,7 + x) = -x^2 + 0,49$$

$$\text{b) } (5 - 11x)^2 = 121x^2 - 110x + 25.$$

$$\text{d) } (9x - 4)(4 + 9x) = 81x^2 - 16.$$

$$\text{f) } (-x + 1,2)^2 = x^2 - 2,4x + 1,44.$$

Exercice 87. ✎ Pour montrer qu'une égalité $A = B$ est vraie, par des méthodes algébriques, on utilise l'une des trois méthodes : on part de A et on transforme (développement, factorisation, simplification,...) pour obtenir B , ou, on part de B et on va vers A , ou, on part de A et on va vers C et on part de B et on va vers C . Le plus souvent, en seconde, nous développerons (reste à trouver quel côté doit être développé).

a) **Démontrons l'égalité.**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$(-2x+8)(x-7) = -2x \times x + (-2x) \times (-7) + 8 \times x + 8 \times (-7) = -2x^2 + 14x + 8x - 56 = -2x^2 + 22x - 56.$$

$$\text{Quel que soit } x \in \mathbb{R} : (-2x+8)(x-7) = -2x^2 + 22x - 56.$$

b) **Démontrons l'égalité.**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$-3(1-x)(x+3) = -3[1 \times x + 1 \times 3 + (-x) \times x + (-x) \times 3] = -3(-x^2 - 2x + 3) = 3x^2 + 6x - 9.$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} : -3(1-x)(x+3) = -3(-x^2 - 2x + 3) = 3x^2 + 6x - 9.$$

c) **Démontrons l'égalité.**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{D'une part : } -3(x-3)^2 + 3 &= -3[x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2] + 3 = -3(x^2 - 6x + 9) + 3 = -3x^2 + 18x - 27 + 3 = -3x^2 + 18x - 24, \\ \text{d'autre part : } -3(x-4)(x-2) &= -3[x \times x + x \times (-2) + (-4) \times x + (-4) \times (-2)] = -3(x^2 - 6x + 8) = -3x^2 + 18x - 24, \text{ donc} \end{aligned}$$

$$\text{quel que soit } x \in \mathbb{R} : -3(x-3)^2 + 3 = -3(x-4)(x-2).$$

Exercice 88.

a) En développant $A(x)$ et $C(x)$ on obtient $B(x)$.

b) En développant $B(x)$ et $C(x)$ on obtient $A(x)$.

c) En développant $B(x)$ et $C(x)$ on obtient $A(x)$.

Exercice 89. ✎ Nous allons faire une démonstration par analyse-synthèse.

$$\text{Notons } f(x) = x^2 - 3x + 4.$$

Analyse.

$$\text{Supposons que } f(x) = (x+1)(ax+b).$$

Comme

$$(x+1)(ax+b) = ax^2 + (a+b)x + b,$$

et donc

$$ax^2 + (a+b)x + ab = x^2 - 3x + 4.$$

L'écriture sous forme développée, réduite et ordonnée étant unique, nous identifions les coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

Et donc : $a = 1$, $b = -4$ et $b = 4$.

Synthèse.

Les seules solutions possibles doivent vérifier à la fois $ab = 1 \times (-4) = -4$ mais aussi $b = 4$ ce qui est impossible donc il n'y a pas de solution au problème.

Il n'est donc pas possible de trouver une écriture de $x^2 - 3x + 4$ de la forme $(x+1)(ax+b)$.

Démonstration plus brève. **Raisonnement par l'absurde.**

Raisonnons par l'absurde en supposant que nous avons trouvé des nombres a et b tels que pour tout x réel $x^2 - 3x + 4 = (x+1)(ax+b)$.

Alors en particulier, pour $x = -1$, $8 = 0$, ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il n'est pas possible de trouver a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 4 = (x+1)(ax+b)$.

Exercice 90.

- a) $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
- b) $[(2x^2 - 2x + 3) - (2x^2 + 3)](5x^2 - 4x) = -10x^3 + 8x^2$.
- c) $(3x-1)(5x-2) + (x+2)^2 = 16x^2 - 7x + 6$.
- d) $(5x-3)(3x+1) - (2x-4)(-x+5) = 17x^2 - 18x + 17$.
- e) $(1,5x-5)(1,5x+5) - (x-1)^2 = \frac{5}{4}x^2 + 2x - 26$.
- f) $(5x+2)^2 - (x-3)^2 = 24x^2 + 14x - 5$.

Exercice 91.

- a) $(3x-2)^2 - (5-4x)(4-6x) = -15x^2 + 34x - 16$.
- b) $(x-1)(2x+3) + (x-1)(x+2) = 3x^2 + 2x - 5$.
- c) $(2x-5)(2x+5) = 4x^2 - 25$.
- d) $(3x+1)(7x-2) + (x-2)^2 = 22x^2 - 3x + 2$.
- e) $(4x-3)(3x+2) - (2x+5)(x-3) = 10x^2 + 9$.
- f) $(1,5x-2)(1,5x+2) - (x+3)^2 = \frac{5}{4}x^2 - 6x - 13$.

Exercice 92.

- a) $(3x-2)^2 - (x-4)^2 = 8x^2 - 4x - 12$.
- b) $(3x+1)^2 - (5-4x)(2+3x) = 21x^2 - x - 9$.
- c) $(x-1)(2x+2) + (x-1)(2x+2) = 4x^2 - 4$.
- d) $(x+1)(x-3) + (x+1)(3x+1) = 5x^2 + 2x - 2$.
- e) $(2x-4)(x-1) - (x-2)(3x+2) = -x^2 - 2x + 8$.
- f) $(x-3)(x+2) - (x-2)(2x+1) = -x^2 + 2x - 4$.

Exercice 93.

- a) $(x+1)(x-4) - (2x+8)(x+5) = -x^2 - 21x - 44$.
- b) $(3x-2)^2 - (5x-4)(2+3x) = -6x^2 - 10x + 12$.
- c) $(x+2)(2x-3) + (x-1)(x+2) = 3x^2 + 2x - 8$.

Exercice 94. Cette méthode qui permet d'économiser les calculs et donc d'accélérer les programme informatiques est appelé l'**algorithme de Hörner**.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 3 + x(x+4) &= 3 + x \times x + x \times 4 \\
 &= 3 + x^2 + 4x \\
 &= x^2 + 4x + 3 \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

- (b) Avec la forme $A : x \times x + 4 \times x + 3$. Il y a donc 4 opérations.
Avec la forme $H : 3 + x \times (x+4)$. Il y 3 opérations.
- (c) Il faut faire les calculs pour 0, 0,1, 0,2, ..., 2. Il faut donc calculer 21 images par f .
Avec la forme H il faudra donc faire 21 fois 4 opérations, c'est-à-dire 81 opérations.
Avec la forme A il faudra donc faire 21 fois 3 opérations, c'est-à-dire 63 opérations.
- 2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
-1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x))) &= -1 + x(4 + x(-3 + x \times 2 + x \times x))) \\
&= -1 + x(4 + x(x^2 + 2x - 3)) \\
&= -1 + x(4 + x \times x^2 + x \times 2x - x \times 3) \\
&= -1 + x(x^3 + 2x^2 - 3x + 4) \\
&= -1 + x \times x^3 + x \times 2x^2 - x \times 3x + x \times 4) \\
&= x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

- (b) Forme A : 13 opérations. Forme H : 7 opérations.
(c) Forme A : 273 opérations. Forme H : 147 opérations.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x^7 + 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 \\
&= -1 + 4x - 3x^2 + 2x^3 - 4x^4 + 3x^5 + 2x^6 + 4x^7 \\
&= -1 + x(4 - 3x + 2x^2 - 4x^4 + 3x^5 + 4x^6) \\
&= -1 + x(4 + x(-3 + 2x - 4x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 4x^5)) \\
&= -1 + x(4 + x(-3 + x(2 - 4x + 3x^2 + 2x^3 + 4x^4))) \\
&= -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x(-4 + 3x + 2x^2 + 4x^3)))) \\
&= -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x(-4 + x(3 + 2x + 4x^2))))) \\
&= -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x(-4 + x(3 + x(2 + 4x))))))
\end{aligned}$$

- (b) Forme A : 35 opérations. Forme H : 14 opérations.
(c) Forme A : 735 opérations. Forme H : 294 opérations.

4.

$1 + x$	1
$1 + x + x \times x$	3
$1 + x + x \times x + x \times x \times x$	6
$1 + x + x \times x + x \times x \times x + x \times x \times x \times x$	10

De proche en proche on obtient : $1 + 2 + 3 + 4$.

Il faut donc calculer $S = 1 + 2 + \dots + 50$.

Nous utilisons l'astuce usuelle pour la somme des entiers naturels. Nous écrivons deux fois la somme et nous additionnons terme à terme

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & +2 & +3 & +\dots & +48 & +49 & +50 \\
50 & +49 & +48 & +\dots & +3 & +2 & +1 \\
\hline
51 & +51 & +51 & +\dots & +51 & +51 & +51
\end{array}$$

Ainsi $2S = 50 \times 51$. Enfin : $S = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$.

Exercice 95. Il est possible d'utiliser le produit en croix.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Démontrer : $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1-x^5}{1-x}$ équivaut à démontrer : $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(1-x) = \frac{1-x^5}{1-x}(1-x)$. Or : $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(1-x) = 1 \times x^4 + 1 \times x^3 + 1 \times x^2 + 1 \times x + 1 \times 1 - x \times x^4 + x \times x^3 - x \times x^2 - x \times x - x \times 1 = 1 - x^5$.

V Équations du premier degré.

Généralités sur les équations.

Une *équation* est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des *inconnues* ou *variables*) qui représentent des nombres (expression littérale).

Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie.

Exemples.

1. $3x^2 + 2$ n'est pas une équation, c'est une expression littérale.
2. $x = 2$ est une équation (qui est dite résolue en x).
3. $y = 2x$ est une équation avec deux inconnues.
4. $3x - 12 = 0$ est une équation de degré 1 (car l'inconnue est à la puissance 1).
5. $x^2 = 16$ est une équation de degré 2.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie. Une valeur qui rend une équation vraie est appelée une *solution* de l'équation.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations.

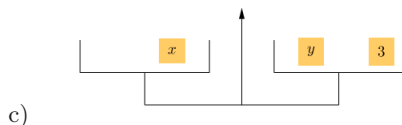
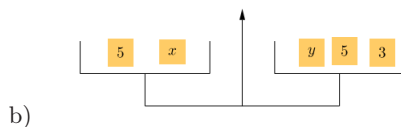
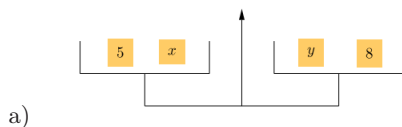
Nous apprendrons certaines de ces méthodes.

Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

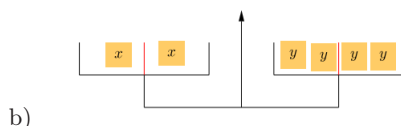
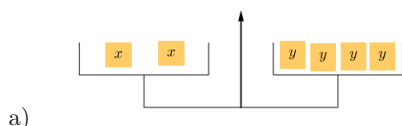
Exemple de la balance.

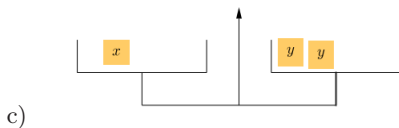
l'égalité obtenue avec une équation n'est pas semblable à cette qui apparaît dans un calcul. Pour illustrer et imaginer ceci il faut se représenter l'égalité comme l'équilibre obtenu avec une balance.

EXERCICE 96. Trouvez le poids de x en fonction de celui de y grâce aux trois étapes suivantes.



EXERCICE 97. Même objectif :





Modifications autorisées sur les équations.

Théorème 2. On ne modifie pas les solutions d'une équation en additionnant (respectivement en soustrayant, respectivement en multipliant, respectivement en divisant) par un même nombre non nul des deux côtés de l'égalité.

Démonstration. Par exemple pour l'addition. En logique, pour toutes quantités a et b , et pour toute expression $F(x)$, si $a = b$ alors $F(a) = F(b)$.

En particulier lorsque $F(x) = x + c$, nous obtenons $F(a) = F(b)$ et donc $a + c = b + c$.

La réciproque n'est pas évidente.

Remarques.

1. Attention lorsque vous divisez de vérifier que vous ne divisez pas par zéro.
2. On ne peut multiplier par zéro sans modifier les résultats de l'équation. Le pouvoir absorbant du zéro fait disparaître l'information contenue dans l'équation.
3. Ce résultat constitue une boîte à outils. Il indique des transformations autorisées sur une équation pour en trouver les solutions.
4. Il faut beaucoup s'entraîner pour savoir quelles transformations utiliser pour résoudre telle ou telle équation.
5. Il est bien sûr toujours possible d'ajouter ou soustraire 0 mais c'est sans intérêt.
6. Deux équations qui ont le même ensemble de solutions sont dites *équivalentes*.

Exemples.

1. $x^3 + x^2 - 7 = 2x^3 + x^2 - 7$ et $x^3 = 2x^3$ ont le même ensemble de solutions. Elles sont équivalentes et on peut noter $x^3 + x^2 - 7 = 2x^3 + x^2 - 7 \Leftrightarrow x^3 = 2x^3$.

Équations du premier degré.

Définition 4. Une *équation du premier degré* (ou équation linéaire, ou équation polynomiale de degré 1) est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax + b = 0$ avec a et b des nombres fixés et x un nombre variable.

Remarques.

1. Les équations linéaires de degré 1 comportent des x mais pas de x^2 ou de x^3 , ni de $\sqrt{x}$ ou de division par x .
2. Pour identifier l'équation du premier degré on regroupe tous les termes d'un même côté de l'égalité. Autrement dit il faut se ramener à une égalité à 0.
3. La résolution des équations du premier degré consiste à « isoler le x ». Supposons que a n'est pas nul.

$$ax + b = 0$$

équivaient successivement à

$$\begin{aligned} ax + b - b &= 0 - b \\ ax &= -b \\ \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a}, \text{ car } a \neq 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $ax + b = 0$ est $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

4. Pour isoler le x dans une équation comme $3x - 5 = 0$ on déconstruit le calcul en procédant dans le sens contraire des priorités opératoires. Le « fois 3 » est prioritaire sur le « moins 5 » donc c'est le « moins 5 » dont on s'occupe en premier en faisant l'opération réciproque : « plus 5 ».
5. Nous pouvons aussi voir la résolution de l'équation $3x - 5 = 0$ comme l'inversion d'un programme de calcul (programme qui s'obtient en respectant les priorités opératoires).
 $x \xrightarrow{3 \times \dots} 3x \xrightarrow{\dots - 5} 3x - 5 = 0$. En inversant le programme de calcul : $3x - 5 = 0 \xrightarrow{\dots + 5} 3x = 5 \xrightarrow{\dots \div 3} x = \frac{5}{3}$.

Exemples.

1. Résolvons $7 - 3x = -7x + 8$ dans l'ensemble des réels.

Méthodologie. La première étape, qui paraît évidente dans le contexte est de vérifier si on reconnaît une équation du premier degré. Ensuite on regroupe les termes (ce qui s'ajoute) en x d'un côté du signe égale. Enfin on déconstruit le calcul appliqué au x .

$$\begin{aligned} 7 - 3x &= -7x + 8 \Leftrightarrow 7 - 3x + 7x = -7x + 8 + 7x \\ &\Leftrightarrow 7 + 4x = 8 \\ &\Leftrightarrow 7 + 4x - 7 = 8 - 7 \\ &\Leftrightarrow 4x = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{4x}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}.$$

2. $x^2 + 2x - 7 = 0$ et $\frac{3}{x+1} = 4x$ ne sont pas des équations du premier degré et la méthode vue ici ne peut s'appliquer directement.

EXERCICE 98. Résolvez les équations du premier degré suivantes d'inconnue x :

- a) $x + 4 = 7$ b) $3x = 12$ c) $-3x + 4 = 13$ d) $-3x + 4 = 14x - 7$

EXERCICE 99. Résolvez l'équation d'inconnue x : $\frac{2x}{3} = \frac{5x}{7}$.

EXERCICE 100.

- a) $2x - 3 = 5$, b) $x + 4 = 5x - 2$, c) $3(x + 1) = 5x - 1$,
d) $-2(4 - x) + 1 = 2$, e) $\frac{2}{3}x = 4$, f) $-3x = 4$,
g) $-6x = \frac{2}{3}$, h) $-\frac{t}{3} = 2$, i) $2(3x - 1) - 5 = x + 1$,
j) $-3x + 4 = 2\left(x + \frac{2}{5}\right)$, k) $3(x - 2) - 1 = -2(x + 4)$, l) $2(4 - 3x) = -(x + 5)$,

$$\begin{aligned} \text{m)} \quad & 2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x - \frac{1}{3}, \\ \text{p)} \quad & \frac{x-3}{2} = 2x + 1. \end{aligned}$$

$$\text{n)} \quad \frac{x-5}{7} = -3,$$

$$\text{o)} \quad \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2},$$

EXERCICE 101. Identifiez puis résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations linéaires parmi les équations d'inconnue x suivantes :

$$\text{a)} \quad x^2 = 3x - 1$$

$$\text{b)} \quad -4x + 2 = 10$$

$$\text{c)} \quad \sqrt{x} + 1 = 3$$

$$\text{d)} \quad 9x - 1 = 2x - 15$$

$$\text{e)} \quad \frac{1}{x} + 3 = 1$$

$$\text{f)} \quad \frac{1}{3} = \frac{3x}{6} - 7$$

$$\text{g)} \quad 5x - 7 - x = 4x$$

$$\text{h)} \quad \sqrt{7}x - 2 = -\pi$$

Exercices.

EXERCICE 102. Résolvez l'équation en x .

$$\text{a)} \quad x + 2 = 0.$$

$$\text{b)} \quad x + 7 = 0.$$

$$\text{c)} \quad 2 \times x = 0.$$

$$\text{d)} \quad 4x = 0.$$

$$\text{e)} \quad x \div 3 = 0.$$

$$\text{f)} \quad \frac{x}{2,3} = 0.$$

$$\text{g)} \quad x - 3 = 0.$$

$$\text{h)} \quad x - 12 = 0.$$

$$\text{i)} \quad x - 1,3 = 0.$$

$$\text{j)} \quad 3,7x = 0.$$

$$\text{k)} \quad x + 3,7 = 0.$$

$$\text{l)} \quad x + \frac{1}{2} = 0.$$

$$\text{m)} \quad x - \frac{13}{12} = 0.$$

$$\text{n)} \quad \frac{4}{3}x = 0.$$

$$\text{o)} \quad \frac{x}{\frac{7}{7}} = 0.$$

$$\text{p)} \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{7}} = 0.$$

$$\text{q)} \quad 3 - x = 0.$$

$$\text{r)} \quad -6 - x = 0.$$

$$\text{s)} \quad -x + 1 = 0.$$

$$\text{t)} \quad -x + \frac{1}{3} = 0.$$

EXERCICE 103. Résolvez l'équation en x .

$$\text{a)} \quad x + 12 = 0.$$

$$\text{b)} \quad x + \pi = 0.$$

$$\text{c)} \quad \sqrt{2} \times x = 0.$$

$$\text{d)} \quad 2,7x = 0.$$

$$\text{e)} \quad x \div \sqrt{7} = 0.$$

$$\text{f)} \quad \frac{x}{10^3} = 0.$$

$$\text{g)} \quad x - 5 = 0.$$

$$\text{h)} \quad x - 14 = 0.$$

$$\text{i)} \quad x - 2,71 = 0.$$

$$\text{j)} \quad 8,2x = 0.$$

$$\text{k)} \quad x + 1,05 = 0.$$

$$\text{l)} \quad x + \frac{3}{11} = 0.$$

$$\text{m)} \quad x - \frac{2}{6} = 0.$$

$$\text{n)} \quad \frac{10^3}{12\,345}x = 0.$$

$$\text{o)} \quad \frac{x}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} = 0.$$

$$\text{p)} \quad \frac{\frac{x}{2}}{\frac{3}{3}} = 0.$$

$$\text{q)} \quad 17 - x = 0.$$

$$\text{r)} \quad -24 - x = 0.$$

$$\text{s)} \quad -x + 23 = 0.$$

$$\text{t)} \quad -x + \frac{\pi}{2} = 0.$$

EXERCICE 104. Résolvez l'équation en x en fonction de α , μ et y qui désignent des nombres non nuls.

$$\text{a)} \quad 3x + 6 = 0.$$

$$\text{b)} \quad 4x - 8 = 0.$$

$$\text{c)} \quad -2x + 4 = 0.$$

$$\text{d)} \quad -7x - 63 = 0.$$

$$\text{e)} \quad 8x - 2 = 0.$$

$$\text{f)} \quad 6x - 7 = 0.$$

$$\text{g)} \quad -5x + 9 = 0.$$

$$\text{h)} \quad -13x - 1 = 0.$$

$$\text{i)} \quad 1,5x + 3 = 0.$$

$$\text{j)} \quad 2,7x - 1,2 = 0.$$

$$\text{k)} \quad -3,14x + 12 = 0.$$

$$\text{l)} \quad -1,32x - 7,1 = 0.$$

$$\text{m)} \quad \frac{1}{2}x + 3 = 0.$$

$$\text{n)} \quad \frac{2}{7}x - \frac{5}{4} = 0.$$

$$\text{o)} \quad -\frac{3}{11}x + \frac{2}{5} = 0.$$

$$\text{p)} \quad -\frac{13}{4}x - \frac{1}{7} = 0.$$

$$\text{q)} \quad \alpha x + 1 = 0.$$

$$\text{r)} \quad \mu x - y = 0.$$

EXERCICE 105. Résolvez l'équation en x en fonction de α , μ et y qui désignent des nombres non nuls.

$$\text{a)} \quad 4x + 16 = 0.$$

$$\text{b)} \quad 8x - 64 = 0.$$

$$\text{c)} \quad -6x + 18 = 0.$$

$$\text{d)} \quad -11x - 121 = 0.$$

$$\text{e)} \quad 8x - 2 = 0.$$

$$\text{f)} \quad 8x - 9 = 0.$$

$$\text{g)} \quad -5x + 12 = 0.$$

$$\text{h)} \quad -17x - 6 = 0.$$

$$\text{i)} \quad 0,14x + 35 = 0.$$

$$\text{j)} \quad 12,1x - 1,21 = 0.$$

$$\text{k)} \quad -6,53x + 89 = 0.$$

$$\text{l)} \quad -3,65x - 67,4 = 0.$$

$$\text{m)} \quad \frac{7}{9}x + 2 = 0.$$

$$\text{n)} \quad \frac{4}{3}x - \frac{5}{8} = 0.$$

$$\text{o)} \quad -\frac{4}{6}x + \frac{2}{4} = 0.$$

$$\text{p)} \quad -\frac{2}{23}x - \frac{1}{9} = 0.$$

$$\text{q)} \quad 3\alpha x + 7 = 0.$$

$$\text{r)} \quad \frac{2}{2}\mu x - y = 0.$$

EXERCICE 106. Résolvez l'équation en x en fonction de α , μ et y qui désignent des nombres non nuls.

- a) $3x + 6 = 4x$. b) $4x - 8 = 6x$. c) $-2x + 4 = 3x$. d) $-7x - 63 = -4x$.
e) $8x - 2 = 2x$. f) $6x - 7 = x$. g) $-5x + 9 = -3x$. h) $-13x - 1 = -2x$.
i) $1,5x + 3 = 1,2x$. j) $2,7x - 1,2 = -2,1x$. k) $-3,14x + 12 = 7x$. l) $-1,32x - 7,1 = 8x$.
m) $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{3}{2}x$. n) $\frac{2}{7}x - \frac{5}{4} = -\frac{3}{7}x$. o) $-\frac{3}{11}x + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}x$. p) $-\frac{13}{4}x - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}x$.
q) $\alpha x + 1 = -3x$. r) $\mu x - y = \mu$.

EXERCICE 107. Résolvez l'équation en x en fonction de α , μ et y qui désignent des nombres non nuls.

- a) $4x + 16 = 2x$. b) $8x - 64 = -4x$. c) $-6x + 18 = -x$. d) $-11x - 121 = -10x$.
e) $8x - 2 = 4x$. f) $8x - 9 = -7x$. g) $12 - 5x = -11x$. h) $-17x - 6 = -5x$.
i) $35 + 0,14x = 3x$. j) $12,1x - 1,21 = 1,35x$. k) $-6,53x + 89 = -7,1x$. l) $-3,65x - 67,4 = -3x$.
m) $\frac{7}{9}x + 2 = \frac{5}{9}x$. n) $-\frac{5}{8} + \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3}x$. o) $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{4} = \frac{5}{3}x$. p) $-\frac{2}{23}x - \frac{1}{9} = \frac{1}{2}x$.
q) $3\alpha x + 7 = 3x$. r) $\frac{1}{2}\mu x - y = \alpha x$.

EXERCICE 108. Résolvez l'équation en x en fonction de α , μ et y qui désignent des nombres non nuls.

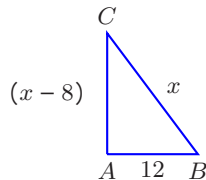
- a) $2x + 4 = x + 6$. b) $3x - 4 = 7 - 6x$. c) $-x + 1 = 3x + 2$.
d) $-7x - 63 = 5 - 4x$. e) $8x - 2 = -3 + 2x$. f) $-7 + 6x = 11 - x$.
g) $-5x + 9 = -3x + 7$. h) $-13x - 1 = -2x + 5$. i) $1,5x + 3 = 4 - 1,2x$.
j) $2,7x - 1,2 = -2,1x - 0,2$. k) $-3,14x + 12 = 7x - 8$. l) $-1,32x - 7,1 = 8x + 0,9$.
m) $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{3}{2}x + 1$. n) $\frac{2}{7}x - \frac{5}{4} = -\frac{3}{7}x - \frac{3}{2}$. o) $-\frac{3}{11}x + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}x + \frac{1}{35}$.
p) $-\frac{13}{4}x - \frac{1}{7} = -\frac{15}{7} + \frac{3}{7}x$. q) $\alpha x + 1 = -3x + t$. r) $\mu x - y = 3t - \mu x$.

EXERCICE 109. Résolvez l'équation en x en fonction de α , μ et y qui désignent des nombres non nuls.

- a) $3x + 3 = x + 9$. b) $2x - 8 = 4 - 2x$. c) $-x + 7 = 2x + 8$.
d) $-3x - 6 = 3 - 2x$. e) $3x - 1 = -2 + x$. f) $-4 + 7x = 7 - x$.
g) $-3x + 12 = -4x + 2$. h) $-5x - 3 = -2x + 7$. i) $2,5x + 5 = 2 - 3,2x$.
j) $4,3x - 2,5 = -2,9x - 0,5$. k) $-3x + 1,1 = 7x - 1,1$. l) $-2,2x - 0,1 = 8x + 0,1$.
m) $\frac{3}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x + 3$. n) $\frac{5}{2}x - \frac{2}{5} = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$. o) $-\frac{6}{11}x + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}x + \frac{1}{3}$.
p) $-\frac{11}{2}x - \frac{3}{3} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2}x$. q) $3\alpha x + 11 = -5\alpha x - t$. r) $-\mu x + y = t + 5\mu x$.

EXERCICE 110.

Trouvez, si possible, les valeurs de x pour que le triangle ABC soit rectangle en A .



EXERCICE 111. Déterminez cinq nombres impairs consécutifs dont la somme est égale à 405.

EXERCICE 112. Calculez la mesure de chacun des angles du triangle MES sachant que $\hat{M} = 2x$, $\hat{E} = 3x$ et $\hat{S} = x$.

EXERCICE 113. Dans un triangle rectangle, l'un des angles aigus a pour mesure 4 fois la mesure de l'autre angle aigu. Calculez la mesure de chaque angle.

EXERCICE 114. La différence des mesures des angles aigus dans un triangle rectangle est de 36° . Calculez la mesure de chaque angle.

EXERCICE 115. Dans un triangle isocèle, la mesure de l'angle au sommet surpasse de 33° la mesure d'un angle à la base. Calculez les mesures de chaque angle du triangle.

EXERCICE 116. Dans une assemblée, quarante personnes ont plus de 40 ans, un quart a entre 30 et 40 ans et un tiers a moins de 30 ans. Quel est le nombre de personnes de cette assemblée ?

EXERCICE 117. Deux trains partent à 4 h du matin, l'un de la ville A vers la ville B , et l'autre de la ville B située à 315 km de A en direction de la ville A . À quelle heure se fera la rencontre, sachant que le premier roule à $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et le second à $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

EXERCICE 118. Un litre d'une boisson contient 7 % de sirop. Quel volume d'eau pure doit-on rajouter pour qu'un litre de cette nouvelle boisson contienne 5 % de sirop ?

EXERCICE 119. $ABCD$ est un carré de côté a (a nombre strictement positif). M est un point du segment $[BC]$. Déterminez le point M de façon que le rapport de l'aire du triangle ABM à celle du trapèze $ADCM$ soit égale à $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 120. ABC est un triangle équilatéral de côté a (a nombre strictement positif). Par le point P symétrique de C par rapport à B on trace une droite (Δ) qui rencontre $[AB]$ en M et $[AC]$ en N . On pose $BM = x$. Déterminez x tel que $CN = \frac{2a}{3}$.

EXERCICE 121.

Un triangle ABC est rectangle en A . Le segment $[AB]$ mesure 3 cm, le segment $[AC]$ mesure 4 cm. Soit M un point de $[AB]$: on pose $AM = x$.

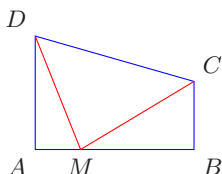
On construit un rectangle $MNPQ$ inscrit dans le triangle comme l'indique la figure ci-contre. Déterminez x pour que $MNPQ$ soit un carré.

EXERCICE 122. *Problème publié dans le Liber Abaci (1202) par Léonard de Pise dit Fibonacci.* Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40 sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps. Quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ?

L'apport principal de *Léonard de Pise* (dit **Fibonacci**) fut l'introduction de la numération décimale dans le traité de comptabilité *Liber abaci* alors que l'Europe utilise encore les chiffres romains. Son nom est resté célèbre jusqu'à nos jours grâce à une suite de nombres qui porte son nom et qui est associée au nombre d'or. Chaque terme de la suite de Fibonacci, qui commence par 0 puis 1, est la somme des deux précédents.

Cette suite est souvent évoquée dans des thématiques ésotérique ou esthétique (comme le roman *Da Vinci code*).

EXERCICE 123. Deux frères héritent d'un terrain ayant la forme d'un trapèze $ABCD$ rectangle en A représenté ci-dessous tel que $AD = 50 \text{ m}$, $BC = 30 \text{ m}$ et $AB = 70 \text{ m}$.



Ils souhaitent que l'un dispose du terrain triangulaire AMD , l'autre du terrain triangulaire BCM , la dernière partie étant revendue.

1. Comment placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que les deux frères disposent de la même surface ?
2. Comment placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que les deux frères disposent de surfaces triangulaires d'hypoténuses de même longueur ?

Corrections.

Exercice 96. $x + 5 = y + 8$ puis $x + 5 - 5 = y + 8 - 5$ et enfin $x = y + 3$.

Exercice 97. $2x = 4y$ puis $\frac{2x}{2} = \frac{4y}{2}$ et enfin $x = 2y$.

Exercice 98.

- $x + 4 = 7 \Leftrightarrow x + 4 - 4 = 7 - 4 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow x \in \{3\}$.
- $3x = 12 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow x \in \{4\}$.
- $-3x + 4 = 13 \Leftrightarrow -3x + 4 - 4 = 13 - 4 \Leftrightarrow -3x = 9 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} = \frac{9}{-3} \Leftrightarrow x = -3 \Leftrightarrow x \in \{-3\}$.
- $-3x + 4 = 14x - 7 \Leftrightarrow -3x + 4 - 14x = 14x - 7 - 14x \Leftrightarrow -17x + 4 = 7 \Leftrightarrow -17x + 4 - 4 = 7 - 4 \Leftrightarrow -17x = 3 \Leftrightarrow \frac{-17x}{-17} = \frac{3}{-17} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{17} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3}{17}\right\}$.

Exercice 99. $\frac{2x}{3} = \frac{5x}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{5}{7}x \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{5}{7}x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{7}\right)x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Exercice 100.

- | | |
|---|--|
| a) $2x - 3 = 5, \mathcal{S} = \{4\}$. | b) $x + 4 = 5x - 2, \mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. |
| c) $3(x + 1) = 5x - 1, \mathcal{S} = \{1\}$. | d) $-2(4 - x) + 1 = 2, \mathcal{S} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$. |
| e) $\frac{2}{3}x = 4, \mathcal{S} = \{6\}$. | f) $-3x = 4, \mathcal{S} = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$. |
| g) $-6x = \frac{2}{3}, \mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{9}\right\}$. | h) $-\frac{t}{3} = 2, \mathcal{S} = \{-6\}$. |
| i) $2(3x - 1) - 5 = x + 1, \mathcal{S} = \left\{\frac{8}{5}\right\}$. | j) $-3x + 4 = 2\left(x + \frac{2}{5}\right), \mathcal{S} = \left\{\frac{16}{25}\right\}$. |
| k) $3(x - 2) - 1 = -2(x + 4), \mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$. | l) $2(4 - 3x) = -(x + 5), \mathcal{S} = \left\{\frac{11}{5}\right\}$. |
| m) $2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x - \frac{1}{3}, \mathcal{S} = \{-5\}$. | n) $\frac{x-5}{7} = -3, \mathcal{S} = \{-16\}$. |
| o) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$. | p) $\frac{x-3}{2} = 2x + 1, \mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$. |

Exercice 101. Toutes les expressions qui ne ressemblent pas à des formules algébriques de fonctions affines ne correspondent pas à des équations linéaires. Concrètement, les expressions $\sqrt{x}, x^2, x^3, \dots, \frac{1}{x}$ ne doivent pas apparaître.

- Ce n'est pas une équation linéaire.
- C'est une équation linéaire et $\mathcal{S} = \{-2\}$.
- Ce n'est pas une équation linéaire.
- C'est une équation linéaire et $\mathcal{S} = \{-2\}$.
- Ce n'est pas une équation linéaire.

f) Il s'agit bien d'une équation linéaire.

$$\frac{1}{3} = \frac{3x}{6} - 7$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{3}{6}x - 7 \\ \frac{1}{3} + 7 &= \frac{3}{6}x - 7 + 7 \\ \frac{22}{3} &= \frac{3}{6}x \\ \frac{6}{3} \times \frac{22}{3} &= \frac{6}{3} \times \frac{3}{6}x \\ \frac{22}{6} &= x \\ \frac{2 \times 11}{2 \times 3} &= x\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{11}{3} \right\}$.

g) Il s'agit bien d'une équation linéaire.

Cependant la situation est un peu particulière comme le montre la résolution de cette équation.
 $5x - 7 - x = 4x \Leftrightarrow 4x - 7 = 4x \Leftrightarrow 4x - 7 - 4x = 4x - 4x \Leftrightarrow -7 = 0$.

Toute la difficulté est d'interpréter cette dernière égalité.

Lorsque nous travaillons par équivalence toutes les phrases mathématiques écrites sont aussi vraies les unes que les autres. Or la dernière phrase que nous avons obtenue est, très clairement, fausse, donc la première est tout aussi fausse. Ainsi l'égalité proposée est toujours fausse, et ce, qu'elle que soit la valeur choisie pour x . Autrement dit il n'y a aucune solution.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \emptyset$.

h) La présence de $\sqrt{7}$ ou de π ne doit pas effrayer : il s'agit juste de nombres.

C'est une équation du premier degré et : $\sqrt{7}x - 2 = -\pi \Leftrightarrow \sqrt{7}x - 2 + 2 = -\pi + 2 \Leftrightarrow \sqrt{7}x = -\pi + 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{7}} = \frac{-\pi + 2}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi + 2}{\sqrt{7}}$. Et il n'y a pas d'écriture plus simple de ce nombre.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-\pi + 2}{\sqrt{7}} \right\}$.

Exercice 102.

- a) $x = -2$. b) $x = -7$. c) $x = 0$. d) $x = 0$. e) $x = 0$. f) $x = 0$. g) $x = 3$.
h) $x = 12$. i) $x = 1,3$. j) $x = 0$. k) $x = -3,7$. l) $x = -\frac{1}{2}$. m) $x = \frac{13}{12}$. n) $x = 0$.
o) $x = 0$. p) $x = 0$. q) $x = 3$. r) $x = -6$. s) $x = 1$. t) $x = \frac{1}{3}$.

Exercice 103.

- a) $x = -12$. b) $x = -\pi$. c) $x = 0$. d) $x = 0$. e) $x = 0$. f) $x = 0$. g) $x = 5$.
h) $x = 14$. i) $x = 2,71$. j) $x = 0$. k) $x = -1,05$. l) $x = -\frac{3}{11}$. m) $x = \frac{1}{3}$. n) $x = 0$.
o) $x = 0$. p) $x = 0$. q) $x = 17$. r) $x = -24$. s) $x = 23$. t) $x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 104.

- a) $x = -2$. b) $x = 2$. c) $x = 2$. d) $x = -9$. e) $x = 4$. f) $x = \frac{7}{6}$. g) $x = \frac{9}{22}$. h) $x = -\frac{1}{13}$.
i) $x = -2$. j) $x = \frac{12}{27}$. k) $x = \frac{1200}{314}$. l) $x = \frac{355}{66}$. m) $x = -6$. n) $x = \frac{35}{8}$. o) $x = \frac{22}{15}$. p) $x = -\frac{4}{91}$.
q) $x = -\frac{1}{\alpha}$. r) $x = \frac{y}{\mu}$.

Exercice 105.

- a) $x = -4$. b) $x = 8$. c) $x = 3$. d) $x = -11$. e) $x = \frac{1}{4}$. f) $x = \frac{9}{8}$. g) $x = \frac{12}{5}$.
h) $x = -\frac{6}{17}$. i) $x = -\frac{3500}{14}$. j) $x = 0,1$. k) $x = \frac{89}{6,53}$. l) $x = -\frac{67,4}{3,65}$. m) $x = -\frac{18}{7}$. n) $x = \frac{15}{32}$.
o) $x = \frac{3}{2}$. p) $x = -\frac{23}{18}$. q) $x = -\frac{7}{3\alpha}$. r) $x = \frac{2y}{\mu}$.

Exercice 106.

- a) $x = 6$. b) $x = -4$. c) $x = \frac{4}{5}$. d) $x = -21$. e) $x = \frac{1}{3}$.
f) $x = \frac{7}{5}$. g) $x = \frac{9}{2}$. h) $x = -\frac{1}{11}$. i) $x = -10$. j) $x = 2$.
k) $x = -\frac{12}{3,86}$. l) $x = -\frac{7,1}{6,68}$. m) $x = 3$. n) $x = \frac{7}{4}$. o) $x = \frac{11}{9}$.
p) $x = -\frac{4}{721}$. q) $x = -\frac{1}{3+\alpha}$. r) $x = 1 + \frac{y}{\mu}$.

Exercice 107.

- a) $x = -8$. b) $x = 16$. c) $x = \frac{18}{5}$. d) $x = -121$. e) $x = \frac{1}{2}$. f) $x = 9$. g) $x = -2$.
h) $x = -\frac{1}{2}$. i) $x = \frac{35}{2,86}$. j) $x = \frac{1,21}{11,75}$. k) $x = -\frac{89}{0,57}$. l) $x = -\frac{67,4}{0,65}$. m) $x = -9$. n) $x = \frac{3}{8}$.
o) $x = \frac{1}{4}$. p) $x = -\frac{46}{243}$. q) $x = -\frac{7}{3(\alpha-1)}$. r) $x = \frac{y}{\frac{1}{2}\mu-\alpha}$.

Exercice 108.

- a) $x = 2$. b) $x = \frac{11}{9}$. c) $x = -\frac{1}{4}$. d) $x = -\frac{68}{3}$. e) $x = -\frac{1}{2}$. f) $x = \frac{18}{7}$.
g) $x = 1$. h) $x = -\frac{6}{11}$. i) $x = -\frac{1}{2,7}$. j) $x = \frac{1}{4,8}$. k) $x = \frac{20}{10,14}$. l) $x = -\frac{8}{6,68}$.
m) $x = 2$. n) $x = -\frac{7}{20}$. o) $x = \frac{141}{126}$. p) $x = -\frac{2}{103}$. q) $x = \frac{t-1}{\alpha+3}$. r) $x = \frac{3t+y}{2\mu}$.

Exercice 109.

- a) $x = 3$. b) $x = 3$. c) $x = -\frac{1}{3}$. d) $x = -9$. e) $x = -\frac{1}{2}$. f) $x = \frac{11}{8}$. g) $x = -10$.
h) $x = \frac{4}{3}$. i) $x = -\frac{30}{7}$. j) $x = \frac{20}{72}$. k) $x = 0,22$. l) $x = -\frac{0,2}{10,2}$. m) $x = 1$. n) $x = -\frac{1}{4}$.
o) $x = \frac{55}{63 \times 6}$. p) $x = \frac{1}{12 \times 7}$. q) $x = -\frac{t+11}{8\alpha}$. r) $x = \frac{y-t}{6\mu}$.

Exercice 110. Déterminons à quelle condition portant sur x , ABC est-il rectangle en A .

ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, d'après le théorème de Pythagore.

Autrement dit il faut et il suffit que : $(x-8)^2 + 12^2 = x^2$. A priori c'est panique à bord car l'équation n'est pas du premier degré mais nous allons nous y ramener.

Cette dernière équation équivaut successivement à :

$$x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2 + 144 = x^2$$

$$x^2 - 16x + 64 + 144 = x^2$$

En se ramenant à une égalité à 0 :

$$\begin{aligned} x^2 - 16x + 208 - x^2 &= x^2 - x^2 \\ -16x + 208 &= 0 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons une équation linéaire :

$$-16x + 208 - 208 = 0 - 208$$

$$-16x = -208$$

$$\frac{-16x}{-16} = \frac{-208}{-16}$$

$$x = 13$$

ABC est rectangle en A si et seulement si $x = 13$.

Exercice 111. Déterminons s'il existe de tels nombres par analyse-synthèse.

Supposons qu'il soit possible de trouver de tels nombres. Soit p le plus petit entier des cinq nombres impairs. Puisque p est impair il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2n + 1$. Dire que la somme égale 405 s'écrit donc $(E) : 2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 + 2n + 7 + 2n + 9 = 405$. $(E) \Leftrightarrow 10n + 25 = 405 \Leftrightarrow 10n = 380 \Leftrightarrow n = 38$.

On vérifie aisément que $2 \times 38 + 1 = 77, 79, 81, 83$ et 85 conviennent.

Les seuls 5 nombres impairs consécutifs dont la somme est 405 sont 77, 79, 81, 83 et 85.

Exercice 112. $2x + 3x + x = 180 \Leftrightarrow x = 30$.

Exercice 113. $90 + x + 4x = 180 \Leftrightarrow x = 18$.

Exercice 114. $x + (x + 36) + 90 = 180 \Leftrightarrow x = 27$.

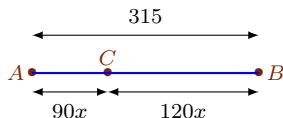
Exercice 115. $x + x + (x + 33) = 180 \Leftrightarrow x = 49$.

Exercice 116. Le plus souvent l'inconnue qu'il est pertinent d'introduire est la grandeur recherchée.

Notons x le nombre de personnes dans l'assemblée.

L'énoncé se traduit alors par l'égalité : $40 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = x$. Il s'agit d'une équation linéaire dont l'unique solution est 96.

Exercice 117. Notons x le temps, en heures, mis par les deux trains pour se croiser.



La distance parcourue par le train partant de A au moment du croisement est (en fonction de x) $90x$. La distance parcourue par le train partant de B au moment du croisement est (en fonction de x) $120x$. Ainsi x doit vérifier l'équation $90x + 120x = 315$. Il s'agit d'une équation linéaire dont l'unique solution est $x = 1,5$.

Autrement dit les trains se croisent à 5 h 30.

Exercice 118. La quantité de sirop avant et après remplissage est la même donc : $\frac{7}{100} \times 1 = \frac{5}{100} \times (x+1)$ d'où $x = \frac{2}{5}$.

Exercice 119. Soit $x = BC$.

$$\mathcal{A}(ABM) = \frac{1}{2}AB \times BM \text{ car } ABM \text{ est rectangle en B. } \mathcal{A}(ABM) = \frac{1}{2}ax.$$

$$\mathcal{A}(ADCM) = \frac{AD+MC}{2}DC = \frac{1}{2}(a + (a-x))a.$$

$$\frac{\mathcal{A}(ABM)}{\mathcal{A}(ADCM)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{ax}{(2a-x)a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = 2a - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}a.$$

Exercice 120. Notons R le point de $[BC]$ de sorte que NCR est un triangle équilatéral. Avec le théorème de Thalès : $\frac{PB}{PR} = \frac{BM}{CN}$ et $CN = \frac{2a}{3}$.

Exercice 121. Notons H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

1. Les triangles ABC et ABH sont semblables donc $AH = \frac{3}{5} \times AC = \frac{3}{5} \times 4$. Configuration des triangles emboîtés : BMQ et BAH . Avec Thalès : $MQ = AH \times \frac{MB}{AB} = \frac{3}{5} \times 4 \times \frac{3-x}{3}x$.
2. Configuration des triangles emboîtés : AMN et ABC . Avec Thalès : $NM = \frac{5}{3}x$.
3. Pour qu'il y ait un carré il faut que $NM = MQ$ et donc : $\frac{15}{12}(3-x) = \frac{5}{3}x$. D'où $x = \frac{36}{37}$.

Exercice 122. Notons x la distance séparant la tour de 30 pas du centre de la fontaine. Puisque les vols des oiseaux sont de la même longueur : $30^2 + x^2 = (50-x)^2 + 40^2 \Leftrightarrow x^2 + 900 = x^2 - 100x + 4100 \Leftrightarrow x = 32$.

Exercice 123. ✎

1. Notons $x = AM$.

Déterminons les valeurs de x pour lesquels $\mathcal{A}(AMD) = \mathcal{A}(MBC)$.

$$\mathcal{A}(AMD) = \mathcal{A}(MBC)$$

équivalent successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}AM \times AD &= \frac{1}{2}MB \times BC \\ \frac{1}{2}x \times 50 &= \frac{1}{2}(70 - x) \times 30 \\ 50x &= 30(70 - x) \\ 80x &= 2100 \\ x &= \frac{2100}{80} \\ x &= 26,25\end{aligned}$$

Pour résoudre une équation linéaire inutile d'avoir une équation produit-nul.

Il faut placer le point M de sorte que $AM = 26,25$ m.

2. Déterminons les valeurs de x pour lesquels $DM = MC$.

$$DM = MC$$

implique successivement :

$$\begin{aligned}AD^2 + AM^2 &= MB^2 + BC^2 \\ 50^2 + x^2 &= (70 - x)^2 + 30^2 \\ 2500 + x^2 &= 70^2 - 2 \times 70 \times x + x^2 + 900 \\ 2500 + x^2 &= 4900 - 140x + x^2 + 900 \\ 140x &= 3300 \\ x &= -\frac{165}{7}\end{aligned}$$

VI Racine carrée.

Définition.

Le nom racine carrée nous vient de l'antiquité grecque. Les nombres étés vus comme des objets géométriques. La racine carré de 2 est de ce point de vue le segment du côté d'un carré dont l'aire est 2.

Définition 5. La *racine carrée* d'un nombre $a \in \mathbb{R}$, si elle existe, est un nombre positif x tel que : $x \times x = x^2 = a$ et on note : $x = \sqrt{a}$.

Exemples.

1. La racine carrée de $a = 4$ est $\sqrt{4} = 2$. En effet $x = 2$ est bien un nombre positif et $x^2 = 2^2 = 2 \times 2 = 4 = a$.
2. De même : $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{100} = 10$ et $\sqrt{121} = 11$.
3. Nous savons, sans l'avoir pour l'instant démontré, que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Nous ne pouvons pas trouver d'écriture décimale finie ou fractionnaire pour ce nombre. C'est pourquoi nous l'écrivons toujours $\sqrt{2}$.

Remarques.

1. Compte tenu de la règle du signe d'un produit on ne peut prendre la racine carrée que d'un nombre n positif (ou nul).
2. Lorsque a est positif il est toujours possible de trouver un tel nombre x et d'autre part il est unique (puisque positif). Nous devons attendre de bien connaître les fonctions pour pouvoir prouver cette existence (ou même attendre après le bac pour l'utilisation de la borne supérieure).
3. Sauf si $n \in \mathbb{N}$ est un carré parfait (1, 4, 9, ...), $\sqrt{n}$ est un nombre qui n'est pas rationnel. Dans ce cas il n'y a pas d'écriture exacte du nombre plus simple que $\sqrt{n}$. L'utilisation de $\sqrt{}$ dans les calculs devient incontournable et, par conséquent, il faut apprendre les règles liant $\sqrt{}$ aux opérations usuelles $+$, $\times$...
4. Clairement : si a est positif $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = a$.
Par contre si $a < 0$ alors $\sqrt{a^2}$ n'existe pas, et $\sqrt{a^2} = -a$.
En résumé, quel que soit le signe de a nous pourrons écrire : $\sqrt{a^2} = |a|$.
5. L'écriture $x = \sqrt{a}$ est la conjonction des trois propriétés suivantes : $x \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$ et $a^2 = x$.
6. Les valeurs approchées données par la calculatrice, notamment pour les racines carrées, sont le fruits de programmes qui, étape après étape, donne des résultats de plus en plus précis. On parle d'algorithme convergeant vers la racine carrée.

EXERCICE 124. Déterminez (à l'aide de la calculatrice) une valeur exacte puis, éventuellement, une valeur approchée de $\sqrt{121}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{2}$.

Propriétés algébriques.

Proposition 8. *Propriétés algébriques de racine carrée.* Soient $a \in [0; +\infty[$, $b \in [0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$.

- (i) $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- (ii) Si $b \neq 0$ alors : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.
- (iii) $\sqrt{a^n} = \sqrt{a^n}$.

Démonstration.

(i) Soit a et b des entiers naturels.

Démontrons que $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est la racine carrée de ab .

Vérifions que le nombre $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est effectivement un nombre positif qui élevé au carré égale ab .

* Par définition de la racine carrée $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif.

*

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \\&= \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\&= \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} \\&= \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2\end{aligned}$$

Par définition de la racine carrée (a et b étant positifs), $\sqrt{a}^2 = a$ et $\sqrt{b}^2 = b$ donc :

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = a \times b$$

Nous avons démontré que quelques soient les entiers naturels a et b ,
 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

(ii) Il suffit de démontrer que $\frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{b}}$.

(iii) En itérant la formule du (i) et celle du (ii) pour n strictement négatif.

Exemples.

1. $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$.

2. $\sqrt{75} = \sqrt{3 \times 25} = \sqrt{3} \times \sqrt{25} = \sqrt{3} \times 5 = 5\sqrt{3}$.

3. $\sqrt{500} = \sqrt{2^2 \times 5^3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{5^2 \times 5} = 2 \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{5} = 2 \times 5\sqrt{5}$.

4. $\sqrt{847}$.

5. D'une part $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et d'autre part $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ donc $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$. Ce contre-exemple établit, qu'en général : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

6. On essaie de ne pas avoir de racine carrée au dénominateur. Souvent on utilise l'astuce :
 $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{2}$.

Remarques.

1. Pas de formule générale pour addition et soustraction.

2. Du point de vu des priorités opératoires la racine carrée joue le même rôle que les parenthèses, les crochets, ou les barres de fraction : ce qui est sous la racine carrée est considéré comme entre parenthèses.

3. Lorsque les dénominateur est de la forme $a + \sqrt{b}$ on utilise la technique de la quantité conjuguée pour ne plus avoir de racine carrée au dénominateur : $\frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$.

EXERCICE 125. Justifiez les égalités.

a) $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

b) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

c) $4\sqrt{27} = 12\sqrt{3}$.

d) $-\sqrt{32} = -4\sqrt{2}$.

EXERCICE 126. Écrivez chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

a) $6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{144}}$.

c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

d) $2\sqrt{3} + \sqrt{\frac{49}{3}}$.

EXERCICE 127.

- a) Évaluez la quantité A en donnant le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers b étant le plus petit possible. $A = \sqrt{3} \times \sqrt{12}$.
- b) Calculez la valeur de B sous la forme $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ avec a , b et c des entiers, $\frac{a}{b}$ étant irréductible et c le plus petit possible. $B = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{63}}$.

EXERCICE 128. Soit $x \in]0; +\infty[$. Écrivez les expressions suivantes sous forme d'une unique expression fractionnaire.

a) $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) $2 - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

Pseudo inégalité triangulaire.

Nous avons déjà remarqué qu'il n'est pas possible d'obtenir des identités remarquables (des égalités) liant la somme et la racine carré. Cependant nous pouvons obtenir une inégalité.

Proposition 9. *Croissance de la racine carrée.* Soient $a \in [0; +\infty[$ et $b \in [0; +\infty[$. Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Démonstration. Supposons $a < b$ et démontrons que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Nous allons en fait démontrer que $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$.

Puisque $a < b : b - a > 0$.

Or, a et b étant positifs,

$$\begin{aligned} b - a &= \sqrt{b^2} - \sqrt{a^2} \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) \end{aligned}$$

donc

$$(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) > 0$$

Et comme $(\sqrt{b} + \sqrt{a}) > 0$:

$$\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})} > \frac{0}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$$

$$\sqrt{b}-\sqrt{a} > 0$$

Ainsi dès que $a < b$ forcément $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Remarques.

1. Nous verrons que ce résultat établit que la fonction racine carrée est strictement croissante (sa courbe représentative ne cesse de monter).
2. Ce résultat constitue une nouvelle façon de transformer une inéquation. Lorsque nous verrons $x^2 + x^4 < 8 + x^2$ alors nous pourrions affirmer que $\sqrt{x^2 + x^4} < \sqrt{8 + x^2}$. Nous pouvons appliquer la racine carrée aux deux membres d'une inégalité pour peu qu'ils soient tous positifs.

Proposition 10. Soient $a \in [0; +\infty[$ et $b \in [0; +\infty[$. $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration. Démontrons dans un premier temps que $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq a + b$.
Soient a et b des réels positifs.

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= \sqrt{a}^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + \sqrt{b}^2 \\ &= a + 2\sqrt{ab} + b\end{aligned}$$

Ainsi : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$, or $\sqrt{ab} \geq 0$ donc, nécessairement :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq a + b.$$

Donc d'après le lemme :

$$\sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \geq \sqrt{a + b}$$

Autrement dit :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}$$

Nous avons démontré que quels que soient les nombres a et b positifs choisis :
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}$.

Démonstration. Considérons ABC rectangle en A avec $AB = \sqrt{a}$ et $AC = \sqrt{b}$. D'après le théorème de Pythagore : $BC = \sqrt{a + b}$. Il ne reste plus qu'à appliquer l'inégalité triangulaire.

Démonstration. En étudiant le signe : $T = (\sqrt{a + b})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = -2\sqrt{ab} < 0$.

Or $T = (\sqrt{a + b} - \sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a + b} + \sqrt{a} + \sqrt{b})$ donc $\sqrt{a + b} - \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$.

Exercices.

EXERCICE 129. Calculez $A = \frac{1 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{1 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$.

EXERCICE 130. Soit $x \in]0; +\infty[$. Simplifiez les expressions suivantes (oui cet énoncé n'est pas clair, faites au mieux).

- | | | | |
|-------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\sqrt{x^2}$. | b) $\sqrt{x^2}$. | c) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$. | d) $\sqrt{x^4}$. |
| e) $\sqrt{x^3}$. | f) $\frac{\sqrt{x}}{x^2}$. | g) $(x + \sqrt{x})^2$. | h) $(x + \sqrt{x})(x - \sqrt{x})$. |

EXERCICE 131. Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers b étant le plus petit possible. Vous pouvez utiliser une décomposition en facteurs premiers. Et en désespoir de cause sachez trouver les valeurs à la calculatrice.

- | | | | |
|----------------|---------------|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $\sqrt{36}$ | b) $\sqrt{8}$ | c) $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$ | d) $\sqrt{7} \times \sqrt{14}$ |
|----------------|---------------|--------------------------------|--------------------------------|

EXERCICE 132. Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers b étant le plus petit possible.

a) $\sqrt{64}$

b) $\sqrt{27}$

c) $\sqrt{15} \times \sqrt{3}$

d) $\sqrt{12} \times \sqrt{6}$

EXERCICE 133. Lorsqu'un calcul comprend des fractions et des racines carrées le résultat doit être présenté sous la forme $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ avec a , b et c des entiers, b étant non nul et c le plus petit possible. Écrivez les calculs suivants sous cette forme :

a) $A = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

b) $B = \frac{\sqrt{7}}{22} \times \frac{11}{\sqrt{7}}$

c) $C = \frac{\sqrt{240}}{\sqrt{85}}$

EXERCICE 134. Un triangle MNP rectangle en P est tel que : $MN = 4$ et $NP = \frac{1}{2}$. Calculez MP .

EXERCICE 135. Un triangle ABC rectangle en A est tel que : $AB = \frac{2}{3}$ et $AC = \frac{3}{2}$. Calculez BC .

EXERCICE 136. Un triangle MNP rectangle en M est tel que : $MN = \frac{7}{3}$ et $MP = 2$. Calculez NP .

EXERCICE 137. Soient ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC = 1$ et $\widehat{A} = 45^\circ$, et H le projeté orthogonal de B sur (AC) . Calculez successivement AH , BH , CH et BC . Calculez l'aire S de ABC et déduisez-en AK où K est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

EXERCICE 138. Écrivez chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$.

b) $7\sqrt{6} - 9\sqrt{6}$.

c) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$.

d) $-\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$.

e) $3\sqrt{27}$.

f) $-\sqrt{8}$.

g) $5\sqrt{12}$.

h) $-3\sqrt{98}$.

EXERCICE 139. Écrivez chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

a) $\sqrt{15} \times \sqrt{20}$.

b) $\sqrt{24} \times \sqrt{2}$.

c) $\sqrt{8} \times \sqrt{56}$.

d) $\sqrt{\frac{5}{16}}$.

e) $\sqrt{\frac{24}{2}}$.

f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}}$.

g) $3\sqrt{5} - \sqrt{20} - 3\sqrt{45}$.

h) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{300}$.

EXERCICE 140. Écrivez chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

a) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}$.

b) $\frac{2}{\sqrt{2}}$.

c) $\frac{21}{\sqrt{7}}$.

d) $\frac{9}{\sqrt{3}}$.

e) $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

EXERCICE 141. Écrivez chaque nombre sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où $a, b \in \mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{N}$, c étant le plus petit possible.

a) $(1 + \sqrt{2})^2$.

b) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$.

c) $(2\sqrt{3} - 4)^2$.

d) $(2 + 3\sqrt{5})^2$.

EXERCICE 142. Simplifiez.

a) $(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 3)$.

b) $\sqrt{3^2 + 4^2}$.

c) $\sqrt{3^2 + \sqrt{4^2}}$.

d) $(\sqrt{5} - 1)^2$.

e) $\sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{8}$.

f) $\sqrt{\sqrt{2} + 1} \times \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

EXERCICE 143. Pour $a = 1 - \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$, calculez : $a + b^2$, $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $5ab^2$, $(5ab)^2$.

EXERCICE 144. Méthode de la quantité conjuguée.

1. Transformez le quotient $Q = \frac{\sqrt{2} + 3}{3\sqrt{2} - 3}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée $3\sqrt{2} + 3$.

2. En utilisant la technique de la quantité conjuguée écrivez les quotients suivants sans racine carrée au dénominateur.

$$\text{a) } R = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 3}. \quad \text{b) } S = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}. \quad \text{c) } T = \frac{\sqrt{5} + 3\sqrt{7}}{2\sqrt{5} - 4\sqrt{7}}.$$

EXERCICE 145. Simplifiez les écritures suivantes.

$$\text{a) } A = \frac{3 + \sqrt{5}}{7 + \sqrt{5}} - \frac{3 - \sqrt{5}}{7 - \sqrt{5}}. \quad \text{b) } B = \frac{1 - \sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}} - \frac{1 + \sqrt{5}}{4 - \sqrt{5}}.$$

EXERCICE 146. Simplifiez.

$$\text{a) } x = \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}. \quad \text{b) } y = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}.$$

$$\text{c) } z = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

EXERCICE 147.

1. Rendez rationnels les dénominateurs des nombres suivants.

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{2} + 1}. \quad \text{b) } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}. \quad \text{c) } \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}.$$

2. Donnez une expression simple de la somme $N = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots +$

$$\frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}}.$$

EXERCICE 148. Résolvez $x^2 = 4$, $x^2 = 5$, $x^2 = -3$, $\frac{x}{2} = \frac{11}{x}$, $(x+1)^2 = 4$.

EXERCICE 149. Montrez que, pour tout réel x , $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Déduisez-en la résolution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

EXERCICE 150. Le nombre d'or est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et est noté ϕ . Comparez $\phi - 1$ et $\frac{1}{\phi}$. Déduisez-en que ϕ est solution de l'équation $x^2 = x + 1$. Déduisez-en ϕ^2 . Montrez que pour tout entier naturel n , ϕ est solution de l'équation $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$. Déduisez-en ϕ^3 et ϕ^4 .

Corrections.

Exercice 124. $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$. Avec la calculatrice : $\sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6,92$ au centième par défaut. Avec la calculatrice : $\sqrt{2} \approx 1,42$ au centième par excès.

Exercice 125.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{28} &= \sqrt{2^2 \times 7} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}. \\ \text{b) } \sqrt{50} &= \sqrt{2 \times 5^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{5^2} = \sqrt{2} \times 5 = 5\sqrt{2}. \\ \text{c) } 4\sqrt{27} &= 4\sqrt{3^2 \times 3} = 4\sqrt{3^2} \times \sqrt{3} = 12\sqrt{3}. \\ \text{d) } -\sqrt{32} &= -\sqrt{2^5} = -\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = -\sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = -4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Exercice 126.

$$\begin{aligned} \text{a) } 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} &= (6 - 4)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}. \\ \text{b) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{144}} &= \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{12}\sqrt{3}. \\ \text{c) } \frac{2}{\sqrt{5}} &= \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}. \\ \text{d) } 2\sqrt{3} + \sqrt{\frac{49}{3}} &= 2\sqrt{3} + \frac{7}{3}\sqrt{3} = \frac{13}{3}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Exercice 127. 

$$a) A = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{3 \times 2^2 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 3^2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} = 2 \times 3.$$

$$A = 6\sqrt{1}.$$

$$b) B = \frac{\sqrt{2 \times 7}}{\sqrt{3^2 \times 7}} = \sqrt{\frac{2 \times 7}{3^2 \times 7}} = \sqrt{\frac{2}{3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$B = \frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

Exercice 128.

$$a) \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x} - 1 \times 1}{1 \times \sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}.$$

$$b) 2 - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x+1})-1 \times 1}{1 \times (\sqrt{x+1})} = \frac{-x+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}.$$

Exercice 129. **Calculons A.**

$$A = \frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3-(2-\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3)}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{6\sqrt{3}}{1}.$$

$$A = 6\sqrt{3}.$$

Exercice 130.

$$a) \sqrt{x^2} = x.$$

$$c) \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = x - \sqrt{x}.$$

$$e) \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}.$$

$$g) (x + \sqrt{x})^2 = x^2 + 2x\sqrt{x} + x.$$

$$b) \sqrt{x^2} = x.$$

$$d) \sqrt{x^4} = x^2.$$

$$f) \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

$$h) (x + \sqrt{x})(x - \sqrt{x}) = x^2 - x.$$

Exercice 131.

$$a) \sqrt{6^2} = 6$$

$$c) \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{2^2 \times 3^2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} = 2 \times 3$$

$$b) \sqrt{2^3} = \sqrt{2 \times 2^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2^2} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

$$d) \sqrt{7 \times 14} = \sqrt{2 \times 7^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{7^2} = 7\sqrt{2}$$

Exercice 132.

$$a) \sqrt{8^2} = 8$$

$$b) \sqrt{3 \times 9} = \sqrt{3} \times \sqrt{3^2} = \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$$

$$c) \sqrt{5 \times 3} \times \sqrt{3} = \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{5} \times \sqrt{3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$d) \sqrt{12 \times 6} = \sqrt{4 \times 3 \times 2 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

Exercice 133.

$$a) A = \frac{\sqrt{2 \times 3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$b) B = \frac{\sqrt{7 \times 11}}{22 \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2} \times 11 \sqrt{7}}{2 \times 11 \sqrt{7}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1}$$

$$c) C = \frac{\sqrt{2^4 \times 3 \times 5}}{\sqrt{5 \times 17}} = \sqrt{2^4} \times \frac{\sqrt{3 \times 5}}{\sqrt{5 \times 17}} = 4 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}} = 4 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 4 \frac{\sqrt{3 \times 17}}{\sqrt{17 \times 17}} = 4 \frac{\sqrt{3 \times 17}}{\sqrt{17^2}} = \frac{4}{17} \sqrt{51}$$

Exercice 134. **Calculons MP.**

MNP est rectangle en P donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$MP^2 + NP^2 = MN^2$$

Or : $MN = 4$ et $NP = \frac{1}{2}$ donc

$$MP^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4^2$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}MP^2 + \frac{1}{4} &= 16 \\MP^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} &= 16 - \frac{1}{4} \\MP^2 &= \frac{63}{4}\end{aligned}$$

Autrement dit $MP = \sqrt{\frac{63}{4}}$ ou $MP = -\sqrt{\frac{63}{4}}$.

Mais MP est une longueur donc est un nombre positif :

$$MP = \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{\sqrt{3^2 \times 7}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

Finalement

$$MP = \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

Exercice 135. ✍ Calculons BC .

ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Donc :

$$\begin{aligned}BC^2 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\BC^2 &= \frac{4}{9} + \frac{9}{4} \\BC^2 &= \frac{97}{36}\end{aligned}$$

BC est une longueur c'est donc un nombre positif :

$$BC = \sqrt{\frac{97}{36}}$$

Donc :

$$BC = \frac{1}{6}\sqrt{97}$$

Exercice 136. $NP = \sqrt{MN^2 + MP^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{85}{9}} = \sqrt{\frac{5 \times 17}{3^2}} = \frac{\sqrt{85}}{\sqrt{3^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{85}$.

Exercice 137. Démonstration utilisant le fait que dans un triangle isocèle la hauteur et la bissectrice issue du sommet d'isocélisme sont confondues. ABH rectangle en H donc : $\frac{AH}{AB} = \cos(45)$ or $\cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\frac{BH}{AB} = \sin(45) \Leftrightarrow BH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ou avec les angles ABH est isocèle en H).

$H \in [AC]$ car $\widehat{A}$ est aigu, donc $CH = AC - BH = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. $BC = \sqrt{HC^2 + HB^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. $S = \frac{1}{2}BH \times AC = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$. $S = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AK \times BC = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow AK = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$ Simplifiant : $AK = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(2^2 - \sqrt{2}^2)\sqrt{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Et c'est donc la valeur de $\cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 138.

- a) $8\sqrt{2}$. b) $-2\sqrt{6}$. c) $-\sqrt{3}$. d) $-5\sqrt{7}$. e) $9\sqrt{3}$. f) $-2\sqrt{2}$. g) $10\sqrt{3}$. h) $-21\sqrt{2}$.

Exercice 139.

- a) $10\sqrt{3}$. b) $4\sqrt{3}$. c) $8\sqrt{7}$. d) $\frac{1}{4}\sqrt{5}$. e) $2\sqrt{3}$. f) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$. g) $-8\sqrt{5}$. h) $9\sqrt{3}$.

Exercice 140.

- a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. b) $\sqrt{2}$. c) $3\sqrt{7}$. d) $3\sqrt{3}$. e) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

Exercice 141. Écrivez chaque nombre sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où $a, b \in \mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{N}$, c étant le plus petit possible.

- a) $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. b) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$.
c) $(2\sqrt{3} - 4)^2 = 28 - 16\sqrt{3}$. d) $(2 + 3\sqrt{5})^2 = 49 + 12\sqrt{5}$.

Exercice 142.

- a) $(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 3) = -7$. b) $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. c) $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} = 7$.
d) $(\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$. e) $\sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{8} = 9\sqrt{2}$. f) $\sqrt{\sqrt{2} + 1} \times \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 1$.

Exercice 143. $a + b^2 = (1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2}^2 = 3 - \sqrt{2}$, $(a + b)^2 = (1 - \sqrt{2} + \sqrt{2})^2 = 1$, $a^2 + b^2 = (1 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2 = 5 - 2\sqrt{2}$, $5ab^2 = 5(1 - \sqrt{2})\sqrt{2}^2 = 10 - 10\sqrt{2}$, $(5ab)^2 = (5(1 - \sqrt{2})\sqrt{2})^2 = (-10 + 5\sqrt{2})^2 = 110 - 100\sqrt{2}$.

Exercice 144.

1. $Q = \frac{\sqrt{2}+3}{3\sqrt{2}-3} = \frac{(\sqrt{2}+3)(3\sqrt{2}+3)}{(3\sqrt{2}-3)(3\sqrt{2}+3)} = \frac{15+12\sqrt{2}}{15} = 1 + \frac{4}{5}\sqrt{2}$.
2. a) $R = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-3} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+3)}{\sqrt{2}^2-3^2} = -\frac{6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{7}$.
b) $S = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} = -\frac{3+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{5}$.
c) $T = \frac{\sqrt{5}+3\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-4\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{5}+3\sqrt{7})(2\sqrt{5}+4\sqrt{7})}{(2\sqrt{5})^2-(4\sqrt{7})^2} = -\frac{94+10\sqrt{35}}{92}$.

Exercice 145.

- a) $A = \frac{(3+\sqrt{5})(7-\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})(7+\sqrt{5})}{(7+\sqrt{5})(7-\sqrt{5})} = \frac{16+4\sqrt{5}-(16-4\sqrt{5})}{49-5} = \frac{8\sqrt{5}}{44} = \frac{2}{11}\sqrt{5}$.
b) $B = \frac{(1-\sqrt{5})(4-\sqrt{5})-(1+\sqrt{5})(4+\sqrt{5})}{(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})} = \frac{9-5\sqrt{5}-(9+5\sqrt{5})}{16-5} = \frac{-10\sqrt{5}}{11} = -\frac{10}{11}\sqrt{5}$.

Exercice 146.

- a) $x = \frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}} = \frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$.
b) $y = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{1} - \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3} - \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = 2\sqrt{2}$.
c) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = ((\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{3}^2)(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (4 + 2\sqrt{10})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 4\sqrt{5} - 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 4\sqrt{5} = 6\sqrt{2}$.

Exercice 147.

1. a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$. b) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. c) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
2. $N = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = \sqrt{100} - 1 = 9$.

Exercice 148. $x^2 = 4 \Leftrightarrow x \in \{-2; 2\}$, $x^2 = 5 \Leftrightarrow x \in \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$, $x^2 = -3 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, $\frac{x}{2} = \frac{11}{x} \Leftrightarrow x \in \{\sqrt{22}, -\sqrt{22}\}$, $(x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x \in 1, -3$.

Exercice 149. Soit $x \in \mathbb{R}$, $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = x^2 + x + 1$. $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Exercice 150. $\phi - 1 - \frac{1}{\phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 0$. $\phi - 1 - \frac{1}{\phi} = 0 \Leftrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0 \Leftrightarrow \phi^2 = \phi + 1$.

Déduisez-en $\phi^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. En itérant : $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$. $\phi^3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$
et $\phi^4 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

VII Équation produit-nul.

Sachant résoudre les équations du premier degré, nous allons étendre cette compétence à des équations plus complexes nous essaieront d'écrire les équations sous forme d'équations produit.

Produit nul de réels.

Proposition 11. Soient a et b deux nombres réels. $ab = 0$ si et seulement si ($a = 0$ ou $b = 0$).

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : supposons que $ab = 0$ et que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Puisque $b \neq 0$: $ab = 0 \Leftrightarrow \frac{ab}{b} = \frac{0}{b} \Leftrightarrow a = 0$ ce qui contredit le fait que $a \neq 0$.

Exemples.

1. Si $3x = 0$ alors nécessairement $x = 0$.
2. Si $(x + 1)a = 0$ alors forcément $x + 1 = 0$ ou $a = 0$.
3. Résolvons l'équation (E) : $2(x + 2)(-3x + 4) = 0$.

(E) équivaut à $x + 2 = 0$ ou $-3x + 4 = 0$. Or $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 - 2 = 0 - 2 \Leftrightarrow x = -2$ et $-3x + 4 = 0 \Leftrightarrow -3x + 4 - 4 = 0 - 4 \Leftrightarrow -3x = -4 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} = \frac{-4}{-3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ donc (E) équivaut à $x = -2$ ou $x = \frac{4}{3}$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{-2; \frac{4}{3}\right\}$.

Remarques.

1. Il est parfois intéressant d'utiliser la négation de cette phrase : $a \cdot b \neq 0$ équivaut à « $a \neq 0$ et $b \neq 0$ »
2. Ce résultat ne s'applique qu'aux nombres. Il n'est, par exemple, pas vrai pour des fonctions. Un produit nul de fonctions ne signifie pas forcément que l'une des fonctions est nulle.

Équation produit-nul

Nous appellerons *équation produit-nul* une équation dont l'un des membres est un produit et l'autre 0.

EXERCICE 151. Identifiez (sans transformer les expressions) les équations produit nul.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|------------------------------|
| a) $(x - 1)(2x + 3) = 0$ | b) $x^2(x + 3) = 0$ | c) $4x^2 + 5x = 0$ |
| d) $(2x + 3)(x + 6) = 1$ | e) $(2x - 5)(x + 1) = 0$ | f) $(2x - 5)(x + 4) - 1 = 0$ |

Factoriser pour se ramener à des équations produit nul.

EXERCICE 152. Écrivez les équations suivantes sous forme d'une équation produit puis résolvez-les.

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) E_1 : $2x^2 = 3x$. | b) E_2 : $12x = 6x^2 + 6$. |
| c) E_3 : $x^2 = 5$. | d) E_4 : $x^2 = y^2$. |
| e) E_5 : $(2x + 3)^2 = (x - 1)^2$. | f) E_6 : $(3x + 1)(x - 5) = 5(5 - x)$. |

Exercices.

EXERCICE 153. Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a) $4x = 0.$ | b) $x(x - 1) = 0.$ | c) $(x - 2)(x - 3) = 0.$ |
| d) $(x + 1)(x - 4) = 0.$ | e) $(2x - 4)(3x + 6) = 0.$ | f) $(-3x + 1)(2x + 7) = 0.$ |

EXERCICE 154. Résolvez les équations suivantes.

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|----------------------------|
| a) $x(x - 2) = 0.$ | b) $(x - 1)(x - 3) = 0.$ | c) $(x - 4)(x - 5) = 0.$ |
| d) $(x - 10)(x - 20) = 0.$ | e) $(x + 1)(x + 2) = 0.$ | f) $(x + 13)(x + 24) = 0.$ |

EXERCICE 155. Résolvez les équations suivantes.

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------|
| a) $(x + 3)(x + 7) = 0.$ | b) $(x + 17)(x + 26) = 0.$ | c) $3(x - 3)(x + 2) = 0.$ |
| d) $-2(x + 1)(x - 3) = 0.$ | e) $12(x - 3)(x + 2) = 0.$ | f) $200(x - 100)(x + 300) = 0.$ |

EXERCICE 156. Résolvez les équations suivantes.

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a) $(3x - 1)(4x - 5) = 0.$ | b) $(7x - 1)(6x - 5) = 0.$ | c) $(13x - 7)(25x - 17) = 0.$ |
| d) $(2x - 5)(3x - 8) = 0.$ | e) $(3x + 2)(4x - 6) = 0.$ | f) $(-8x + 1)(9x + 3) = 0.$ |

EXERCICE 157. Résolvez les équations suivantes.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| a) $(13x + 3)(4x - 12) = 0$ | b) $(13x + 2)(2x - 3) = 0.$ | c) $(-2x - 3)(4x - 7) = 0.$ |
| d) $(3x - 6)(4x + 1) = 0.$ | e) $(x - 13)(x + 1,2) = 0.$ | f) $x(3x - 1)(-7x + 1) = 0.$ |

EXERCICE 158. Deux nombres ont pour somme 314. De combien augmente leur produit si on ajoute 9 à chacun des deux ?

EXERCICE 159. Soit g la fonction définie par $g(x) = -2x^2 + 8x - 8$ sur $[0; +\infty[$ et C_g sa courbe représentative.

1. Démontrez que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g(x) = -2(x - 2)^2$
2. Déterminez le point d'intersection de C_g et de l'axe des ordonnées.
3. Déterminez s'ils existent les points d'intersection de la courbe C_g avec l'axe des abscisses.
4. Déterminez les abscisses des points de C_g ayant pour ordonnée -8 .

EXERCICE 160. Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- | | | | |
|-------------------|----------------------------|--------------------|---------------------|
| a) $x^2 + 1 = 0.$ | b) $(3x - 2)(5x + 4) = 0.$ | c) $x^2 - 2x = 0.$ | d) $(x + 1)^2 = 0.$ |
|-------------------|----------------------------|--------------------|---------------------|

EXERCICE 161. Résolvez les équations suivantes.

- | | | | |
|---------------------------|-----------------------|--------------------|----------------------|
| a) $3x(x - 1) = 5(x - 1)$ | b) $x + (x - 2) = -1$ | c) $x(x + 2) = -1$ | d) $3x^3 + 2x^2 = 0$ |
|---------------------------|-----------------------|--------------------|----------------------|

EXERCICE 162. Résolvez les équations suivantes.

- | | | |
|--------------------|--------------------------|----------------------------|
| a) $4x^2 = 3x$ | b) $(2x - 1)(x + 3) = 0$ | c) $2x + 3 = x^2 + 3$ |
| d) $(x - 2)^2 = 0$ | e) $(2x - 1)(4 - x) = 0$ | f) $(x + 1)^2 - 16x^2 = 0$ |

EXERCICE 163. Résolvez les équations suivantes.

- | | | |
|--------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a) $2x^3 = x^2$ | b) $16x^2 = 24x$ | c) $x(x + 4) = -4$ |
| d) $(x + 1)^3 - (x + 1)^2 = 0$ | e) $4x^2 - 2x = 6(2x - 1)$ | f) $(x + 2)^2 - 3x - 6 = 0$ |

EXERCICE 164. Résolvez les équations suivantes.

a) $9x^2 - 4x = 2x - 1$

b) $(2x + 1)^2 = 4x^2 - 1$

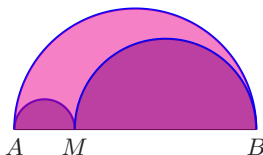
c) $4(x + 1)^2 = 2(x + 1)(2x - 3)$

d) $x^4 - 16 = 0$

EXERCICE 165. Déterminez deux entiers tels que l'un soit le triple de l'autre et dont le produit soit 243.

EXERCICE 166.

Soit M un point du segment $[AB]$. On considère les demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$ comme représentés ci-contre.



On donne $AB = 8$. Nous noterons $AM = 2x$. $f(x)$ désignera l'aire de la partie colorée en violet (i.e. les deux demi-disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$).

1. À quel intervalle appartient x ?
2. Démontrez que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.
3. Les aires des deux parties colorées peuvent-elles être égales ?

EXERCICE 167. Soit $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ quel que soit x réel. Déterminez les zéros de la fonction f .

EXERCICE 168. Proposez une équation ayant pour ensemble des solutions S .

a) $S = \{4\}$

b) $S = \{2; 0\}$

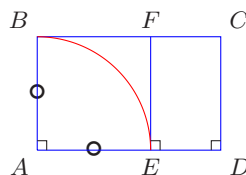
c) $S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

d) $S = \{-2; \frac{2}{3}; 4\}$

EXERCICE 169.

Le rectangle d'or est un rectangle tel que, si on lui enlève un carré construit sur une largeur, on obtient un nouveau rectangle de même forme, c'est-à-dire dont le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est le même.

Ce rapport est alors appelé **nombre d'or** ou « divine proportion ». Il est noté φ .



1. Soit L la longueur de départ et l la largeur de $ABCD$. Calculez le rapport $\frac{DC}{ED}$ en fonction de L et l .
2. Montrez que : $\frac{BC}{BA} = \frac{DC}{ED} \Leftrightarrow L(L - l) = l^2$.
3. En déduire que le rapport $\frac{L}{l}$ est solution de l'équation $x^2 = x + 1$. Le nombre d'or vérifie donc la propriété « si on l'augmente de 1, il est égale à son carré ».
4. Montrez que l'on a $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.
5. En déduire la valeur exacte de φ puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

EXERCICE 170. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 12$ cm. Soient encore D un point de $[AC]$ et G le milieu de $[DC]$. On construit le rectangle $ADEF$ de sorte que $E \in [BC]$ et $F \in [AB]$ puis le rectangle $DGHI$ de sorte que $H \in [BC]$ et $I \in [DE]$. On note $CG = GD = x$.

Le but de l'exercice est de trouver les valeurs de x pour lesquelles les aires de rectangles $DGHI$ et $ADEF$ sont égales.

1. Faites une figure à main lever indiquant toutes les données de l'énoncé.
2. (a) Exprimez GH en fonction de x .
(b) Prouvez que l'aire de $DGHI$ est : $\mathcal{A}(DGHI) = \frac{x^2}{2}$.

3. (a) Prouvez que $ED = x$.
 (b) Déduisez-en l'aire de $ADEF$ en fonction de x .
4. (a) Justifiez que le problème revient à résoudre l'équation $(E) : 5x^2 - 24x = 0$.
 (b) Résolvez alors le problème.

Corrections.

Exercice 151. c, d et f ne sont pas des équations produits car $4x^2 + 5x$ est une somme, $(2x+3)(x+6) = 1$ n'est pas égale à 0 et $(2x-5)(x+4) - 1$ est une différence.

Exercice 152. ✍

- a) Écrivons l'équation sous la forme d'une équation produit nul.

Nous nous ramenons à une égalité à 0.

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 3x - 3x \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0\end{aligned}$$

Il faut à présent factoriser.

$$(E_1) \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0$$

$$(E_1) \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0$$

Résolvons maintenant l'équation produit-nul.

$$\begin{aligned}x(2x - 3) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_1 est $\mathcal{S} = \{0; \frac{3}{2}\}$.

- b) $(E_2) \Leftrightarrow 12x = 6x^2 + 6 \Leftrightarrow 12x - 12x = 6x^2 + 6 - 12x \Leftrightarrow 0 = 6x^2 - 12x + 6 \Leftrightarrow 0 = 6x^2 - 6 \times 2x + 6 \times 1 \Leftrightarrow 0 = 6(x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow 0 = 6(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) \Leftrightarrow 0 = 6(x - 1)^2 \Leftrightarrow 6(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

L'ensemble des solutions de E_2 est $\mathcal{S} = \{1\}$.

- c) $(E_3) \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 5 - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$.

Nous avons ici une démonstration algébrique d'un résultat déjà connu $x^2 = 25$ admet deux solutions : 5 et -5.

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{5} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{5}.$$

L'ensemble des solutions de E_3 est $\mathcal{S} = \{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\}$.

- d) $(E_4) \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = y^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$. Nous verrons plus tard que l'ensemble des solutions (qui est formé de couples (x, y)) peut être interprété comme les coordonnées de points formant deux droites.

$$\begin{aligned} \text{e) } (E_5) &\Leftrightarrow (2x+3)^2 = (x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow (2x+3)^2 - (x-1)^2 = (x-1)^2 - (x-1)^2 \Leftrightarrow (2x+3)^2 - (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow [(2x+3) - (x-1)][(2x+3) + (x-1)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x+3-x+1)(2x+3+x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(3x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(3x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+4=0 \quad \text{ou} \quad 3x+2=0 \Leftrightarrow x=-4 \quad \text{ou} \quad 3x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_5 est $\mathcal{S} = \{-4; -\frac{2}{3}\}$.

$$\begin{aligned} \text{f) } (E_6) &\Leftrightarrow (3x+1)(x-5) = 5(5-x) \Leftrightarrow (3x+1)(x-5) - 5(5-x) = 5(5-x) - 5(5-x) \Leftrightarrow (3x+1)(x-5) - 5(5-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (3x+1)(x-5) + 5(x-5) = 0 \Leftrightarrow [(3x+1)+5](x-5) = 0 \Leftrightarrow [3x+6](x-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x+2)(x-5) = 0 \Leftrightarrow 3(x+2)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \quad \text{ou} \quad x-5=0 \Leftrightarrow x=-2 \quad \text{ou} \quad x=5. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de E_6 est $\mathcal{S} = \{-2; 5\}$.

Exercice 153.

- a) $4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- b) $x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 1\}$.
- c) $(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; 4\}$.
- d) $(x+1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ ou } x-4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 4\}$.
- e) $(2x-4)(3x+6) = 0 \Leftrightarrow 2x-4 = 0 \text{ ou } 3x+6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; -2\}$.
- f) $(-3x+1)(2x+7) = 0 \Leftrightarrow -3x+1 = 0 \text{ ou } 2x+7 = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{1}{3}; -\frac{7}{2}\}$.

Exercice 154.

- a) $\{0; 2\}$.
- b) $\{1; 3\}$.
- c) $\{4; 5\}$.
- d) $\{10; 20\}$.
- e) $\{-1; -2\}$.
- f) $\{-13; -24\}$.

Exercice 155.

- a) $\{-3; -7\}$.
- b) $\{-17; -26\}$.
- c) $\{3; -2\}$.
- d) $\{-1; 3\}$.
- e) $\{3; -2\}$.
- f) $\{100; -300\}$.

Exercice 156.

- a) $\{\frac{1}{3}; \frac{5}{4}\}$.
- b) $\{\frac{1}{7}; \frac{5}{6}\}$.
- c) $\{\frac{7}{13}; \frac{17}{25}\}$.
- d) $\{\frac{5}{2}; \frac{8}{3}\}$.
- e) $\{-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\}$.
- f) $\{\frac{1}{8}; -\frac{1}{3}\}$.

Exercice 157.

- a) $\{-\frac{3}{13}; 3\}$.
- b) $\{-\frac{2}{13}; \frac{3}{2}\}$.
- c) $\{-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\}$.
- d) $\{2; -\frac{1}{4}\}$.
- e) $\{13; -1, 2\}$.
- f) $\{0; \frac{1}{3}, \frac{1}{7}\}$.

Exercice 158. Ici il n'y a pas besoin de résoudre une équation, car il n'y a pas de condition à résoudre, on nous demande d'effectuer un calcul.

$x + y = 314$ et on souhaite calculer $(x+9)(y+9) - xy$ et on obtient 9×323 .

Exercice 159. ✎

1. Nous allons voir deux façons de démontrer le résultat.

Démontrons que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2(x-2)^2$.

Démonstration en factorisant.

Nous devons démontrer un résultat « pour tout x » ou « quelque soit » nous commençons par « fixer » cette variable :

Soit $x \in \mathbb{R}$. $g(x) = -2x^2 + 8x - 8 = -2(x^2 - 4x + 4) = -2(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2) = -2(x-2)^2$.

Nous avons démontré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -2(x-2)^2$$

Démontrons que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2(x-2)^2$.

Démonstration en développant le résultat donné dans l'énoncé.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $-2(x-2)^2 = -2[x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2] = -2(x^2 - 4x + 4) = -2 \times x^2 + (-2) \times (-4)x + (-2) \times 4 = -2x^2 + 8x - 8 = g(x)$.

Nous avons démontré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -2(x-2)^2$$

2. Le préfixe « le » à propos du point d'intersection sous-entend qu'il est unique. Ceci découle du fait que, pour une fonction il y a unicité de l'image.
 Déterminer un point doit se comprendre dans le sens de trouver ses coordonnées.
 Déterminons $M(x_M; y_M)$ point d'intersection de C_g avec l'axe des ordonnées.
 Interprétons les conditions imposées à M avec un point de vue d'analyse.
 Dire que M appartient à l'axe des ordonnées équivaut à dire que $x_M = 0$.
 Dire que $M \in C_g$ équivaut à dire que $y_M = g(x_M)$. Donc : $y_M = g(0) = -8$.

Le point d'intersection de C_g avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0; 8)$.

3. Déterminons les points d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses.
 Supposons qu'il existe un point $M(x_M; y_M)$ qui soit l'intersection de C_g avec l'axe des abscisses.
 M appartient à l'axe des abscisses donc $y_M = 0$.
 M appartient à C_g donc $g(x_M) = 0$.
 Résolvons cette dernière équation d'inconnue x_M . $g(x_M) = 0 \Leftrightarrow -2(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
 $2 \in [0; +\infty[$ et $g(2) = 0$ donc c'est une solution qui convient bien.

L'unique point d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(2; 0)$.

4. Déterminons les abscisses des points de C_g d'ordonnée -8 .
 En raisonnant comme précédemment cela revient à dire que nous cherchons les nombres $x \in [0; +\infty[$ tels que : $g(x) = -8$.
 Résolvons cette équation. $g(x) = -8 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x - 8 = -8 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(-2x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $-2x + 8 = 0$. Or $-2x + 8 \Leftrightarrow -2x + 8 - 8 = 0 - 8 \Leftrightarrow -2x = -8 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2} \Leftrightarrow x = 4$ donc, comme 0 et 4 sont bien dans l'ensemble $[0; +\infty[$ et $g(0) = g(4) = -8$, nous pouvons conclure.

Les abscisses des points de C_g ayant pour ordonnée -8 forment l'ensemble $\{0; 4\}$.

Exercice 160.

- a) $\mathcal{S} = \emptyset$. b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{4}{5}\right\}$. c) $\mathcal{S} = \{0; 2\}$. d) $\mathcal{S} = \{-1\}$.

Exercice 161. ✎

- a) $3x(x-1) = 5(x-1) \Leftrightarrow 3x(x-1) - 5(x-1) = 0 \Leftrightarrow (3x-5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{5}{3}\right)(x-1) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{5}{3}; 1\right\}$.

- b) Résolvons l'équation proposée.

L'équation proposée ne fait intervenir ni carré ni plus grande puissance de x . C'est une équation linéaire du premier degré. L'équation produit-nul n'est pas utile. La méthode consiste à isoler l'inconnue x . $x + (x-2) = -1 \Leftrightarrow x + x - 2 = -1 \Leftrightarrow 2x - 2 + 2 = -1 + 2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

- c) Résolvons l'équation proposée.

$x(x+2) = -1 \Leftrightarrow x(x+2)+1 = -1+1 \Leftrightarrow x(x+2)+1 = 0$. Nous essayons maintenant de faire un produit donc de factoriser mais il n'y a ni facteur commun ni identité remarquable en désespoir de cause développons : $x(x+2) = -1 \Leftrightarrow x \times x + x \times 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$. On recommence nos tentatives de factorisation : recherche d'un facteur commun ça ne donne rien, par contre l'identité remarquable ... $x(x+2) = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 1 = 1^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0$ ou $x+1 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{1\}$.

d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right\}$.

e) Résolvons l'équation.

L'équation est déjà une égalité à zéro. Il y a ici des facteurs communs. $3x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 3 \times x \times x \times x + 2 \times x \times x = 0 \Leftrightarrow x^2(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 0$ ou $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $3x = -2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{0; -\frac{2}{3}\right\}$.

Exercice 162.

a) $\mathcal{S} = \left\{0; \frac{3}{4}\right\}$. b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; -3\right\}$. c) $\mathcal{S} = \{0; 2\}$. d) $\mathcal{S} = \{2\}$. e) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 4\right\}$. f) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right\}$

Exercice 163.

a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 0\right\}$. b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}; 0\right\}$. c) $\mathcal{S} = \{-2\}$. d) $\mathcal{S} = \{0; -1\}$. e) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$. f) $\mathcal{S} = \{-2; 1\}$.

Exercice 164.

a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$. b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. c) $\mathcal{S} = \{-1\}$. d) $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$.

Exercice 165. Recherchons par analyse-synthèse s'il existe de tels entiers. Supposons qu'il existe des entiers $n, p \in \mathbb{Z}$ tels que : $n = 3p$ et $np = 243$. On en déduit : $3p^2 = 243$. Ainsi $p = 9$ ou $p = -9$ et $n = 27$ ou $n = -27$.

Réciproquement

si $n = 27$ et $p = 9$ (ou si $n = -27$ et $p = -9$) alors $n = 3p$ et $np = 243$.

Exercice 166.

1. Déterminons l'intervalle dans lequel varie x .

- * Puisque $2x = AM$ et que AM est une longueur, nécessairement $x \geq 0$.
- * $M \in [AB]$ et $AB = 8$ donc $AM \leq 8$.
D'où : $\frac{AM}{2} \leq \frac{8}{2}$.
Autrement dit $x \leq 4$.

Nous avons démontré que $x \in [0; 4]$.

2. Démontrons que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.

- * Le rayon du demi-disque de diamètre $[AM]$ est x (car $2x = AM$). Donc l'aire du demi-disque de diamètre $[AM]$ est $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \times \pi x^2$.
- * Le rayon du demi-disque de diamètre $[MB]$ est $\frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}(AB - AM)$ car $M \in [AB]$ et donc $\frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}(8 - 2x) = 4 - x$.
Ainsi l'aire du demi-disque de diamètre $[MB]$ est $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \times \pi(4 - x)^2$.
- * Nous déduisons des deux points précédents $f(x) = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{2}\pi(4 - x)^2$. En factorisant : $f(x) = \frac{1}{2}\pi[x^2 + (4 - x)^2]$. En développant l'identité remarquable : $f(x) = \frac{1}{2}\pi[x^2 + 16 - 8x + x^2] = \frac{1}{2}\pi(2x^2 - 8x + 16) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.

Nous avons bien : $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.

3. Dire que les deux parties colorées ont la même aire se traduit par $\frac{1}{2}\pi 4^2 - f(x) = f(x)$ (E). Résolvons l'équation (E).
(E) $\Leftrightarrow 8\pi - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow 8\pi - 2 \times \pi(x^2 - 4x + 8) = 0 \Leftrightarrow -2\pi[-4 + (x^2 - 4x + 8)] = 0 \Leftrightarrow -2\pi[-4 + x^2 - 4x + 8] = 0 \Leftrightarrow -2\pi(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow -2\pi(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
Or $2 \in [0; 4]$, nous pouvons donc conclure.

Les aires des parties colorées ne peuvent être égales que lorsque $x = 2$.

Exercice 167. Les *zéros d'une fonction* sont les nombres x de son ensemble de définition telles que : $f(x) = 0$. Ce sont les valeurs de x qui annulent f .

Il faut trouver les valeurs x telles que $f(x) = 0$.

Réolvons l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 24x^2 + 36x = 0$. Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 3 nous essayons de factoriser. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2) = 0 \Leftrightarrow 4x(x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$.

L'ensemble des zéros de f est $\{0; 3\}$.

Exercice 168.

a) $x - 4 = 0$.

b) $x(x - 2) = 0$.

c) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$.

d) $(x + 2)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 4) = 0$.

Exercice 169.

1. $\frac{DC}{ED} = \frac{l}{L-l}$.

2. $\frac{BC}{BA} = \frac{DC}{ED} \Leftrightarrow \frac{l}{l} = \frac{l}{L-l} \Leftrightarrow L(L-l) = l^2$ avec un produit en croix.

3. Puisque le rectangle est d'or on a bien $\frac{BC}{BA} = \frac{DC}{ED}$ et donc on a $L(L-l) = l^2$. Or $L(L-l) = l^2 \Leftrightarrow \left(\frac{L}{l}\right)^2 = \frac{L}{l} + 1$.

4. En développant le membre de droite.

5. Puisque $\varphi \geq 0$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 170.

1.

2. (a) Théorème de Thalès : $GH = \frac{1}{2}x$.

(b) $DGHI$ est un rectangle donc : $\mathcal{A}(DGHI) = GH \times DG = \frac{1}{2}x \times x$.

3. (a) Théorème de Thalès : $\frac{ED}{6} = \frac{2x}{12}$.

(b) $\mathcal{A}(ADEF) = x(12 - 2x)$.

4. (a) $\frac{1}{2}x^2 = x(12 - 2x) \Leftrightarrow 5x^2 - 24 = 0$.

(b) $5x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow s \in \left\{-\sqrt{\frac{24}{5}}, \sqrt{\frac{24}{5}}\right\}$.

VIII Inégalités.

Des rappels.

Vous avez appris divers symboles pour dire qu'un nombre est plus grand qu'un autre, $\geq$ et $>$, ou plus petit $\leq$ et $<$. Déterminer parmi deux nombres lequel est le plus grand s'appelle *comparer* des nombres.

On appelle *inégalité* une phrase mathématique utilisant l'un des précédents symboles mathématiques.

Exemples.

1. La phrase $1 < 4$ est une inégalité vraie.
2. La phrase $1 \geq 4$ est une inégalité fausse.
3. La phrase $1 < 1$ est une inégalité fausse.
4. La phrase $1 \leq 1$ est une inégalité vraie.

Les symboles $<$ et $>$ sont des symboles d'*inégalités strictes* tandis que $\leq$ et $\geq$ sont des symboles d'*inégalités larges*.

Exemples.

1. $2 < 3$ et $2 \leq 3$ mais $2 \not\leq 2$ et pourtant $2 \leq 2$.
2. Si a est un nombre positif et b un nombre négatif alors $b \leq a$. Mais nous ne pouvons pas écrire l'inégalité stricte car $a = 0$ est positif, $b = 0$ est négatif mais $b \not< a$.

Remarques.

1. Les symboles $<$ et $>$ paraissent souvent plus naturels pour les élèves mais ce ne sont pas les préférés des matheux. D'un point de vu pratique il est intéressant de pouvoir écrire une inégalité avec le même nombre : $x \leq x$.

Inégalité et signe.

Nous reverrons très souvent ce lien apparaître au cours de l'année. Il doit devenir naturel pour les élèves.

Définition 6. Un nombre x est dit *positif* si $x \geq 0$. Il est dit *négatif* si $x \leq 0$. Il est dit *strictement positif* si $x > 0$ et *strictement négatif* si $x < 0$.

Remarques.

1. La phrase mathématique « $x > 0$ » peut se lire « x est strictement supérieur à 0 » ou « x est strictement positif ».

Inéquations.

On appelle *inéquation* une inégalité comportant des expressions littérales. Les lettres représentant des nombres qui interviennent dans l'inéquation sont appelées des inconnues. Une inéquation peut être vraie ou fausse selon les valeurs choisies pour inconnues. Résoudre une inéquation c'est trouver l'ensemble (l'objet mathématique) de toutes les valeurs possibles des inconnues pour lesquelles l'inégalité est vraie.

Exemples.

1. $x \leq 3$ est une inéquation ayant une unique inconnue x . 4 n'est pas une solution de cette inéquation car la phrase $3 \leq 4$ est fausse. Par contre 2 est une solution de l'inéquation puisque la phrase $2 \leq 3$ est vraie. L'ensemble des solutions est l'intervalle $] -\infty, 3]$.

EXERCICE 171. Donnez l'ensemble des solutions des inéquations.

- | | | | | |
|--------------------|-----------------------|---------------------------|----------------------|-----------------|
| a) $x < -1$. | b) $3 \geq x$. | c) $\frac{1}{2} \leq x$. | d) $-\sqrt{2} < x$. | e) $10^3 > x$. |
| f) $x \leq 2,14$. | g) $x > \sqrt{\pi}$. | h) $x \geq -2,1$. | | |

Les règles de manipulation.

Proposition 12.

- (i) On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en ajoutant ou en soustrayant le même nombre à chaque membre de celle-ci.
- (ii) On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en multipliant ou en divisant par un même nombre strictement positif chaque membre de celle-ci.
- (iii) Pour ne pas modifier l'ensemble des solutions d'une inéquation en multipliant ou en divisant par un même nombre strictement négatif des deux côtés de l'inégalité il faut changer le sens de l'inégalité.

Remarques.

1. Ce sont les mêmes règles que pour les équations hormis le cas de la multiplication (ou division) par un nombre strictement négatif.
2. Nous pourrions donc résoudre les inéquations du premier degré comme nous le faisons pour les équations du premier degré en isolant l'inconnue.
3. La résolution d'une inéquation conduit à un ensemble pas à un nombre.

Exemples.

1. Résolvons $x - 7 \geq 12$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x - 7 \geq 12 &\Leftrightarrow x - 7 + 7 \leq 12 + 7 \\&\Leftrightarrow x \leq 19\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} =] - \infty; 19].$$

2. Résolvons $-4x + 32$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}3x \leq 12 &\Leftrightarrow \frac{3x}{3} \leq \frac{12}{3} \text{ car } 3 > 0 \\&\Leftrightarrow x \leq 4 \\&\Leftrightarrow x \in] - \infty, 4]\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} =] - \infty, 4].$$

La phrase « car $3 > 0$ » signifie que nous avons divisé par un nombre strictement positif et que, par conséquent, il ne faut pas changer le sens de l'inégalité.

3. Résolvons $-4x + 32$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}-4x \geq 32 &\Leftrightarrow \frac{-4x}{-4} \leq \frac{32}{-4} \text{ car } -4 < 0 \\&\Leftrightarrow x \leq -8\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} =] - \infty, -8].$$

EXERCICE 172. Résolvez les inéquations. Résoudre une inéquation c'est donner un ensemble.

- a) $2x - 3 < 0$. b) $3x + 1 \geq 0$. c) $4x + 2 > -7x + 1$. d) $-12x + 7 \leq 13$.
e) $8x + 3 < -14x + 3$. f) $12x - 3 \geq -6x + 9$. g) $-5x - 7 > 8 - 3x$. h) $8x + 3 \geq 6 - 7x$.

Somme d'inégalités.

Il est possible d'ajouter des égalités membre à membre. On peut également ajouter des inégalités si elles sont dans le même sens.

Proposition 13. Soient a, b, u et v des réels. Si $\begin{cases} a \leq b \\ u \leq v \end{cases}$, alors $a + u \leq b + v$.

Démonstration. La somme de deux nombres positifs est un nombre positif donc $(b - a) + (v - u) \geq 0$. D'où : $b + v \geq a + u$.

Remarques.

1. L'accolade unique signifie « et » au sens de la logique. Il faut donc lire « si $a \leq b$ et $u \leq v$ alors... ».
2. Il est possible de donner des variantes : si $\begin{cases} a < b \\ u \leq v \end{cases}$, alors $a + u < b + v$. Ou encore : si $\begin{cases} a < b \\ u < v \end{cases}$, alors $a + u < b + v$.

Produit d'inégalités.

Proposition 14. Soient a, b, u et v des réels. Si $\begin{cases} 0 < a \leq b \\ 0 < u \leq v \end{cases}$, alors $au \leq bv$.

Remarques.

1. Remarquons que ce résultat ne se généralise pas à des nombres négatifs. On a $-2 \leq -1$ et $-3 \leq 1$ mais $-2 \times (-3) \nless -1 \times 1$.
2. Il est parfois possible de se ramener à des inégalités larges de nombres strictement positifs : $b < a < 0 \Leftrightarrow 0 < -a < -b$.
3. Nous utiliserons ces résultats pour les encadrements.

Exercices.

EXERCICE 173. Résolvez les inéquations. *Résoudre une inéquation c'est donner un ensemble.*

a) $-3x + 7 < x + 2$

c) $-x > 9$

e) $2(3 - x) \geq 8$

g) $3x - (4 + 3x) > 2$

i) $(x - 1)(3 - x) > 7$.

b) $-5x - 2 \leq 0$

d) $-x + 5 \leq 7 - 6x$

f) $2x - 7 < (3x - 4) - x$

h) $(2x - 1)(2x + 3) \leq (2x + 4)^2$

EXERCICE 174. Trouvez tous les nombres x qui vérifient les deux inéquations (système de deux équations à une inconnue) dans chaque cas. *Rappel : l'accolade seule devant des équations ou des inéquations se lit « et ».*

a) $\begin{cases} x + 7 \leq 12 \\ x - 5 \geq -17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 8 \geq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \leq 10 + x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$

EXERCICE 175.

1. a) Résolvez l'équation $8x - 4 = 0$. b) Résolvez l'inéquation $8x - 4 \geq 0$.

2. Parfois on ne précise pas l'ensemble de définition d'une fonction g . Dans ce cas l'ensemble des définition est l'ensemble des nombres x pour lesquels $g(x)$ existe. Déduisez de la question 1 les ensembles de définition des fonctions suivantes.

a) $g : x \mapsto \frac{1}{8x-4}$.

b) $h : x \mapsto \sqrt{8x+4}$.

EXERCICE 176. Un particulier a des marchandises à faire transporter. Un premier transporteur lui demande 460 € au départ et 3,50 € par kilomètre. Un second transporteur lui demande 1000 € au départ et 2 euro par kilomètre. Pour quelles distances à parcourir est-il plus avantageux de s'adresser au second transporteur ?

EXERCICE 177. Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 750 € par jour et les frais de fabrication s'élèvent à 3,75 € par livre. Combien faut-il imprimer de livre par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 6 €.

EXERCICE 178. Deux entreprises de transport proposent les tarifs suivants :

- 110 € au départ plus 1,26 € du kilomètre ;
- 120 € au départ plus 1,22 € du kilomètre.

Pour quels kilométrages le tarif du second transporteur est-il plus avantageux ?

EXERCICE 179. Un libraire vend des crayons 2,4 € pièce. Sur ces articles ses frais s'élèvent à 0,6 € par crayon auxquels il faut ajouter une somme fixe de 34,2 €. Calculez, en fonction de x , le bénéfice réalisé par la vente de x crayons. Combien doit-il vendre de crayons pour que le bénéfice soit compris entre 68,4 € et 102,6 € ?

EXERCICE 180.

1. En utilisant le développement de $(a-b)^2$ démontrez que $2ab \leq a^2 + b^2$ (1). Déduisez-en que $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.
2. a , b et c des nombres quelconques. Écrivez deux autres inégalités analogues à l'inégalité (1). Déduisez-en que : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

EXERCICE 181. Soient a , b et c trois nombres réels.

1. Écrivez sous forme de fraction : $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b}$.
2. Comparez $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$ pour

a) $c > 0$ et $0 < a < b$;

b) $c > 0$ et $0 < b < a$.

3. Déduisez-en une comparaison de $\frac{2}{5}$ et $\frac{2+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$ puis $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{17}}{\sqrt{3}+\sqrt{17}}$.

EXERCICE 182. Montrez que si a et b sont strictement positifs alors $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

EXERCICE 183. L'arête d'un cube a pour mesure a .

1. Comparez le volume V du cube à celui V_1 d'une sphère de diamètre a , puis à celui V_2 d'une sphère de diamètre $a\sqrt{3}$. Interprétez géométriquement les résultats.
2. À quelle condition doit satisfaire le réel positif α pour que la sphère de diamètre αa ait un volume supérieur ou égale à celui du cube ?

EXERCICE 184. A l'aide de la calculatrice résolvez les inéquations.

a) $4x^2 + 2x \geq 8$.

b) $\frac{1}{x} \geq x + 1$.

Corrections.

Exercice 171.

- a) $] -\infty; -1[$. b) $[3; +\infty[$. c) $\left[\frac{1}{2}; +\infty[$. d) $] -\sqrt{2}; +\infty[$. e) $] -\infty; 10^3[$.
 f) $] -\infty; 2,14[$. g) $] \sqrt{\pi}; +\infty[$. h) $[-2, 1; +\infty[$.

Exercice 172.

- a) $\mathcal{S} =]-\infty, \frac{3}{2}]$. b) $\mathcal{S} =]-\frac{1}{3}, +\infty[$. c) $\mathcal{S} =]-\frac{1}{11}, +\infty[$. d) $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}, +\infty[$.
 e) $\mathcal{S} = \mathbb{R}^*$. f) $\mathcal{S} = \left[\frac{2}{3}, +\infty[$. g) $\mathcal{S} =]-\infty, -\frac{15}{2}]$. h) $\mathcal{S} = \left[\frac{3}{15}, +\infty[$.

Exercice 173.

- a) $-3x + 7 < x + 2 \Leftrightarrow -3x + 7 - x < x + 2 - x \Leftrightarrow -4x + 7 < 2 \Leftrightarrow -4x + 7 - 7 < 2 - 7 \Leftrightarrow -4x < -5 \Leftrightarrow$
 $\frac{-4x}{-4} > \frac{-5}{-4} \Leftrightarrow x > \frac{5}{4} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{5}{4}; +\infty[$.
 b) $-5x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -5x - 2 + 2 \leq 0 + 2 \Leftrightarrow -5x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} \geq \frac{2}{-5} \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{5} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{5}; +\infty[$.
 c) $-x > 9 \Leftrightarrow \frac{-x}{-1} < \frac{9}{-1} \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -9[$.
 d) $\mathcal{S} =]-\infty, \frac{2}{5}]$.
 e) $\mathcal{S} =]-\infty, -1]$.
 f)

$$\begin{aligned} 2x - 7 < (3x - 4) - x &\Leftrightarrow 2x - 7 < 3x - 4 - x \\ &\Leftrightarrow 2x - 7 < 2x - 4 \\ &\Leftrightarrow 2x - 7 - 2x < 2x - 4 - 2x \\ &\Leftrightarrow -7 < -4 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours vraie, quelque soit la valeur choisie pour x , donc : l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$. En effet dire que des inéquations sont équivalentes c'est dire qu'elles ont le même ensemble de solutions.

g)

$$\begin{aligned} 3x - (4 + 3x) > 2 &\Leftrightarrow 3x - 4 - 3x > 2 \\ &\Leftrightarrow -4 > 2 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours fausse, quelque soit la valeur choisie pour x , donc : l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \emptyset$.

- h) $(2x - 1)(2x + 3) \leq (2x + 4)^2 \Leftrightarrow 4x - 3 \leq 16x + 16 \Leftrightarrow -19 \leq 12x \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{19}{12}; +\infty[$.
 i) $(x - 1)(3 - x) > 7 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 10 > 0$. $\mathcal{S} = ?$.

Exercice 174.

- a) L'ensemble des solutions de $2x - 8 \leq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 = [-7; +\infty[$. L'ensemble des solutions de $4x - 23 \leq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 =]-\infty; 11]$. L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [-7; +\infty[\cap]-\infty; 11] = [-7; 11]$.
 b) L'ensemble des solutions de $2x - 8 \geq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 =]-\infty; -7]$. L'ensemble des solutions de $4x - 23 \geq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 = [11; +\infty[$. L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 =]-\infty; -7] \cap [11; +\infty[= \emptyset$.
 c) L'ensemble des solutions de $2x - 8 \leq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 = [-7; +\infty[$. L'ensemble des solutions de $4x - 23 \geq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 = [11; +\infty[$. L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [-7; +\infty[\cap [11; +\infty[= [11; +\infty[$.

Exercice 175.

1. a) $x = \frac{1}{2}$. b) $\left[\frac{1}{2}, +\infty[$.
 2. a) $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. b) $\mathcal{D}_h = \left[\frac{1}{2}, +\infty[$.

Exercice 176. $3,5x + 460 \geq 2x + 1000 \Leftrightarrow x \geq \frac{1000-460}{1,5} \Leftrightarrow x \geq 360$.

Exercice 177. $3,75x + 750 \leq 6x \Leftrightarrow \frac{750}{6-3,75} \leq x \Leftrightarrow \frac{1000}{3} \leq x$.

Exercice 178. Notons x le nombre kilomètres parcourus, $A(x)$ le tarif pour x kilomètres du premier transporteur, $B(x)$ le tarif pour x kilomètres du second transporteur.

Réolvons l'inéquation $A(x) \geq B(x)$ dans $[0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} A(x) \geq B(x) &\Leftrightarrow 110 + 1,26x \geq 120 + 1,22x \\ &\Leftrightarrow 110 + 1,26x - 1,22x \geq 120 + 1,22x - 1,22x \\ &\Leftrightarrow 110 + (1,26 - 1,22)x \geq 120 \\ &\Leftrightarrow 110 + 0,04x \geq 120 \\ &\Leftrightarrow 110 + 0,04x - 110 \geq 120 - 110 \\ &\Leftrightarrow 0,04x \geq 10 \\ &\Leftrightarrow \frac{0,04x}{0,04} \geq \frac{10}{0,04} \\ &\Leftrightarrow x \geq 250 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation dans $[0; +\infty[$ est $\mathcal{S} = [250; +\infty[$.

Le second transporteur est plus avantageux pour plus de 250 km.

Exercice 179. Déterminons le bénéfice en fonction de x .

Le bénéfice réaliser pour la vente de $x \in \mathbb{N}$ crayons est :

$$\begin{aligned} B(x) &= 2,4x - 0,6x - 34,2 \\ &= (2,4 - 0,6)x - 34,2 \end{aligned}$$

$$B(x) = 1,8x - 34,2 \text{ pour tout } x \in \mathbb{N}.$$

Réolvons dans $\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} 68,4 \leq B(x) \\ B(x) \leq 102,6 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} 68,4 \leq B(x) &\Leftrightarrow x \in [57; +\infty[\\ B(x) \leq 102,6 &\Leftrightarrow x \in]-\infty; 76] \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions du système est : $\mathcal{S} =]-\infty; 76] \cap [57; +\infty[= [57; 76]$.

Il devra vendre entre 57 et 76 crayons pour réaliser ses objectifs.

Exercice 180.

1. $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ donc $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + 2ab \geq 0 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$.
 $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a^2 + b^2 \geq 2ab + a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$.
2. $2ac \leq a^2 + c^2$ et $2bc \leq b^2 + c^2$. En sommant membre à membre ces inégalités et la (1) :
 $2ab + 2ac + 2bc \leq a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Exercice 181.

1. $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{(a+c) \times b - (b+c) \times a}{(b+c) \times b} = \frac{bc - ac}{(b+c)b} = \frac{c(b-a)}{b(b+c)}$.
2. a) $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} > 0$ donc $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$.
 b) $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$.
3. $\frac{2}{5} < \frac{2+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} > \frac{\sqrt{11}+\sqrt{17}}{\sqrt{3}+\sqrt{17}}$

Exercice 182. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\Leftrightarrow \frac{(a+b)ab}{a+b} < \frac{(a+b)ab}{a} + \frac{(a+b)ab}{b} \\ &\Leftrightarrow ab < (a+b)b + (a+b)a \\ &\Leftrightarrow 0 < a^2 + ab + b^2 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est trivialement vraie.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Exercice 183.

$$1. V - V_1 = a^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^3 = a^3\left(1 - \frac{4}{3}\frac{1}{8}\pi\right) > 0.$$

$$V - V_2 = a^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}a\right)^3 = a^3\left(1 - \frac{1}{2}\pi\right) < 0.$$

Le cube peut contenir la sphère de diamètre a et peut être contenu dans la sphère de diamètre $\sqrt{3}a$.

$$2. \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\alpha a\right)^3 \geq a^2 \Leftrightarrow \frac{\pi\alpha^3}{6} \geq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$$

Exercice 184.

$$a)] - \infty; -1,7[\cup]1,2; +\infty[.$$

$$b)] - 1,6; 0[\cup]0,6; +\infty[$$

IX Factoriser une expression polynomiale.

La boîte à outils.

Factoriser c'est écrire une expression algébrique sous forme d'un produit. Toute expression polynomiale est factorisable puisque : $P(X) = 1 \times P(X)$ (factorisation triviale). En général, l'objectif est de factoriser plus qu'une constante. La factorisation est utile dans les situations suivantes : simplifier un quotient, résoudre des équations et pour résoudre des inéquations.

La factorisation n'est pas évidente (mécanique) mais souvent astucieuse contrairement au développement. Il s'agit de reconnaître dans l'expression algébrique les formules classiques de la proposition suivante.

Proposition 15. Quels que soient les nombres a , b et c réels.

- (i) $ab + ac = a(b + c)$ facteur commun.
- (ii) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ identité remarquable.
- (iii) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ identité remarquable.
- (iv) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ identité remarquable.

Démonstration. Les trois dernières égalités se déduisent de la première qui est en fait la distributivité de la multiplication sur l'addition.

EXERCICE 185. Recopiez et complétez

- a) $(2x + \dots)^2 = 4x^2 + \dots + 9$
- b) $(x - \dots)^2 = x^2 - 6x + \dots$
- c) $(\dots + 3)^2 = \dots + 24t + 9$
- d) $(x - \dots)^2 = x^2 - x + \dots$
- e) $(x \dots)^2 = x^2 + \dots + 16$
- f) $(x \dots)^2 = x^2 - 8x + \dots$
- g) $(\dots + 3)^2 = \dots + t + 9$
- h) $(\dots - 4)^2 = \dots - 4x + \dots$

Il n'y a pas d'algorithme pour factoriser une expression mais vous pourrez essayer (sans garantie de réussite) dans l'ordre :

1. de chercher un **facteur commun** :
 - * Identifier les termes de la somme (ou différence).
 - * Écrire chacun des termes sous forme d'un produit.
 - * Identifier un facteur commun à tous les termes.
2. d'utiliser une **identité remarquable** (s'il y a une expression avec du carré),
3. de **factoriser une partie** de l'expression pour faire apparaître un facteur commun ou une identité remarquable,
4. et enfin de **développer** en espérant pouvoir ensuite factoriser.

Exemples.

1. Factorisons $A(x) = 3x + 4xy$.

Ce n'est pas un produit (sinon c'est déjà factorisé) mais une somme de deux termes $3x$ et $4xy$. Première étapes nous recherchons si possible un facteur commun (ce qui implique qu'il y a des produits : $3x = 3 \times x$ et $4xy = 4 \times x \times y$) dans les deux termes $3x$ et $4xy$. Il y a un facteur commun c'est x .

$$\begin{aligned} A(x) &= 3x + 4xy \\ &= x(3 + 4y) \end{aligned}$$

$$A(x) = x(3 + 4y).$$

2. Factorisons $B(x) = x^2 - 7$.

C'est bien un somme de x^2 et de -7 . Étape 1 : recherche d'un facteur commun, mais il n'y en a clairement pas entre x^2 et 7 . Passons à la deuxième étape recherche d'une identité remarquable. Il y en a bien une ici : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$\begin{aligned} B(x) &= x^2 - 7 \\ &= x^2 - \sqrt{7}^2 \\ &= (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) \end{aligned}$$

3. Factorisons $C(x) = 3x^3 + (x - 1)^2 - (x + 1)^2$.

Nous avons ici une somme de trois termes $3x^3$, $(x - 1)^2$ et $(x + 1)^2$. Il ne faut surtout pas développer ! C'est le contraire de notre objectif. Les deux premières étapes (facteur commun puis identité remarquable) échouent lamentablement. Passons à la troisième étape recherche d'une factorisation partielle.

$$C(x) = 3x^3 + (x - 1)^2 - (x + 1)^2$$

Nous reconnaissons une identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$\begin{aligned} C(x) &= 3x^3 + [(x - 1) - (x + 1)] \times [(x - 1) + (x + 1)] \\ &= 3x^3 + (-2) \times 2x \\ &= 3x^3 - 4x \end{aligned}$$

Nous reprenons toute la factorisation depuis le début et ici nous remarquons un facteur commun.

$$C(x) = x(3x^2 - 4)$$

EXERCICE 186. Factorisez les expressions suivantes.

- | | | | |
|--------------|---------------|----------------|----------------|
| a) $2x + 2y$ | b) $7y - 7x$ | c) $bc + 2b$ | d) $91z - 13t$ |
| e) $xa + ay$ | f) $x^2 + xy$ | g) $a^3 + a^2$ | h) $ab + a$ |

EXERCICE 187. Factorisez les expressions suivantes.

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $(x - 2)(x + 3) + (5 - x)(2 - x)$ | b) $(x - 3)(x + 1) - 3(3 - x)^2$ |
| c) $x^2 + 6x + 9$ | d) $25x^2 - 40x + 16$ |
| e) $x^2 - 1$ | f) $x^2 + 2x + 1$ |
| g) $x^2 - 2x + 1$ | h) $(x + 1)(x + 2) - 5(x^2 + 4x + 4)$ |

Exercices.

EXERCICE 188. Factorisez les expressions données.

- | | | |
|---------------------|-----------------------------------|--------------------|
| a) $2x(x - 1) + 3x$ | b) $(x + 1)(x + 2) + 5(x + 2)$ | c) $3x^2 + 9x$ |
| d) $x^2 - 6x$ | e) $8x^2 - 5x$ | f) $3x + 4xy$ |
| g) $3x^2 + x$ | h) $(2x + 1)^2 - (2x + 1)(x + 3)$ | i) $3x(x - 5) - x$ |
| j) $xy + xz$ | | |

EXERCICE 189. Factorisez les expressions données.

- | | | |
|-------------------------|-----------------------------|----------------------|
| a) $x^2(x+4) - 2x(x+4)$ | b) $(x-3)^2 - 2(x-3)(2x-1)$ | c) $5x^2 - 6x$ |
| d) $3xy + x$ | e) $2(x+1)^2 - 3(x+1)$ | f) $(x+1)^2 + x + 1$ |
| g) $x^2 + 2x + 1$ | h) $(2x-5)^2 - x^2$ | i) $9x^2 + 12x + 4$ |
| j) $(2x-1)^2 - (x-3)^2$ | | |

EXERCICE 190. Résolvez l'équation : $(E) \quad x^2 = 6x - 9$.

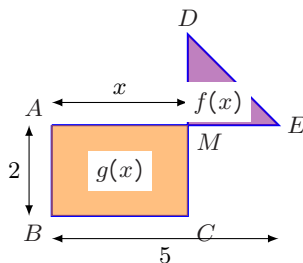
EXERCICE 191. Étant donnée la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x^2-1}{x-1} \end{cases}$ simplifiez son expression.

EXERCICE 192. Soit f la fonction définie sur $[2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2}}$. Exprimez $f(x)$ de façon plus simple.

EXERCICE 193.

Sur un segment $[AE]$ est placé un point M mobile. Un rectangle $ABCM$ et un triangle isocèle rectangle en M , MED , sont construits comme sur la figure ci-contre.

1. Calculez l'aire $f(x)$ de MED .
2. Calculez l'aire $g(x)$ de $ABCM$.
3. Trouvez pour quelle(s) valeur(s) de x les aires du rectangle et du triangle sont égales.



EXERCICE 194. Factorisez les expressions données.

- | | | |
|-----------------------------|------------------------|---------------------------|
| a) $(2x+1)^2 - (1-x)^2$ | b) $x^2 - 20x + 100$ | c) $25 - (x+1)^2$ |
| d) $4x^2 + 4 + 8x$ | e) $16(x+1)^2 - 25x^2$ | f) $16x^2 - 81$ |
| g) $b^2 - 3b + \frac{9}{4}$ | h) $(a-1)^2 - 2$ | i) $x^2 - 4 + (x-2)(x+1)$ |
| j) $3x^2 - 12x + 12$ | | |

EXERCICE 195. Factorisez les expressions données.

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|------------------------|
| a) $x^2 + 3x + (x+3)^2$ | b) $(x+1)(x+2) - (3x+6)$ | c) $2x(x+3) + 4x + 12$ |
| d) $(x-3)(3x-4) - 3x + 4$ | e) $xy - xz - y(y-z)$ | f) $-x^2 + 8x - 16$ |
| g) $7x^2 - 14x$ | h) $16x^2 - 81$ | i) $2a^2b - b$ |
| j) $4x^2 - 4x + 1$ | | |

EXERCICE 196. Factorisez les expressions données.

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| a) $2(x-1)^2 + 3x - 3$ | b) $2x^2 + 8x + 8$ | c) $x^2 - 16 + (x-4)^2$ |
| d) $5x^2 - 125$ | e) $4x^2 - 12x + 9$ | f) $7x^2 - 28$ |
| g) $(2x-3)^2 - (5x+2)^2$ | h) $(x-5)^2 - 2(x-5)(x-3)$ | i) $2x^2 + 7x$ |
| j) $x^2 + 26x + 169$ | k) $(9x^2 - 25) + (6x+10)$ | l) $x^2 - 4x + 4 - (x-2)(7-x)$ |

Corrections.

Exercice 185.

- a) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$ b) $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ c) $(4t+3)^2 = 16t^2 + 24t + 9$
d) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$ e) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$ f) $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$
g) $\left(\frac{1}{6}t + 3\right)^2 = \frac{1}{36}t^2 + t + 9$ h) $\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 16$

Exercice 186.

- a) $2x + 2y = 2(x + y)$ b) $7y - 7x = 7(y - x)$ c) $bc + 2b = b(c + 2)$
d) $91z - 13t = 13(7z - 1)$ e) $xa + ay = a(x + y)$ f) $x^2 + xy = x(x + y)$
g) $a^3 + a^2 = a^2(a + 1)$ h) $ab + a = a(b + 1)$

Exercice 187.

- a) $(x-2)(x+3) + (5-x)(2-x) = (x-2)(2x-2)$ b) $(x-3)(x+1) - 3(3-x)^2 = (x-3)(-2x+4)$
c) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ d) $25x^2 - 40x + 16 = (5x-4)^2$
e) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ f) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
g) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ h) $(x+1)(x+2) - 5(x^2 + 4x + 4) = (x+1)(-4x-7)$

Exercice 188.

- a) $2x(x-1) + 3x = x(2x+1)$ b) $(x+1)(x+2) + 5(x+2) = (x+2)(x+6)$
c) $3x^2 + 9x = 3x(x+3)$ d) $x^2 - 6x = x(x-6)$
e) $8x^2 - 5x = x(8x-5)$ f) $3x + 4xy = x(3+4y)$
g) $3x^2 + x = x(3x+1)$ h) $(2x+1)^2 - (2x+1)(x+3) = (2x+1)(x-2)$
i) $3x(x-5) - x = x(3x-16)$ j) $xy + xz = x(y+z)$

Exercice 189.

- a) $x^2(x+4) - 2x(x+4) = x(x+4)(x-2)$ b) $(x-3)^2 - 2(x-3)(2x-1) = (x-3)(-3x-1)$
c) $5x^2 - 6x = x(5x-6)$ d) $3xy + x = x(3y+1)$
e) $2(x+1)^2 - 3(x+1) = (x+1)(2x-1)$ f) $(x+1)^2 + x + 1 = (x+1)(x+2)$
g) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ h) $(2x-5)^2 - x^2 = (x-5)(3x-5)$
i) $9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2$ j) $(2x-1)^2 - (x-3)^2 = (x+2)(3x-4)$

Exercice 190.  Résolvons l'équation (E).

Très souvent pour résoudre une équation qui n'est pas linéaire en mathématique nous essayerons de ramener l'équation à une équation produit-nul (donc égale à 0).

Nous nous ramenons à une équation produit :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow x^2 - (6x - 9) = 6x - 9 - (6x - 9) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0\end{aligned}$$

Résolvons l'équation produit :

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{3\}$.

Nous verrons plus tard dans l'année que pour résoudre une inéquation nous nous ramèneront à une inéquation produit en factorisant.

Exercice 191. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour simplifier une fraction il faut faire apparaître un facteur commun au numérateur et au dénominateur. Ils faut donc les factoriser. Ici on observe une identité remarquable. $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x^2-1^2}{x-1} = \frac{(x-1) \times (x+1)}{1 \times (x-1)} = x+1$.

Exercice 192. ✍ Simplifions l'expression de f .

Soit $x \in [2; +\infty[$. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 - 4x + 4) = x^2(x-2)^2$. Puisque $x \geq 2$, $\sqrt{x^2(x-2)^2} = x(x-2)$. Et donc : $f(x) = \sqrt{1+x(x-2)} = \sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2}$.

Quelque soit $x \in [2; +\infty[$, $f(x) = x-1$.

Exercice 193. ✍

1. Déterminons une formulation algébrique de f .

Remarquons tout d'abord que

$$\left. \begin{array}{l} M \in [AE] \\ AE = 5 \\ x = AE \end{array} \right\} \Rightarrow x \in [0; 5].$$

Autrement dit le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = [0; 5]$.

Soit $x \in [0; 5]$.

MED étant rectangle en M :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times ME \times MD$$

Puisque MED est isocèle en M :

$$f(x) = \frac{1}{2} ME^2$$

Enfin, puisque $M \in [AE]$:

$$f(x) = \frac{1}{2} (5-x)^2$$

Pour tout $x \in [0; 5]$: $f(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2$.

2. Déterminons une formulation algébrique de g .

Soit $x \in [0; 5]$.

$ABCM$ est un rectangle donc

$$\begin{aligned} g(x) &= AB \times BC \\ &= 5 \times x \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0; 5]$: $g(x) = 5x$

3. Je réinterprète la question en la traduisant par une équation :

Réolvons dans $[0; 5]$ l'équation : $f(x) = g(x)$.

Soit $x \in [0; 5]$.

$$f(x) = g(x)$$

équivalent successivement à

$$\frac{1}{2}(5-x)^2 = 2x$$

Un peu de méthode. Il ne s'agit visiblement pas d'une équation linéaire (un x est élevé au carré), il faut donc faire apparaître une équation produit-nul. Si on veut un produit il faut donc factoriser.

$$\frac{1}{2}(5-x)^2 - 2x = 2x - 2x$$

$$\frac{1}{2}(5-x)^2 - 2x = 0$$

Rappelons que nous essayons d'abord de trouver un facteur commun, sinon une identité remarquable ou encore une factorisation partielle. Mais rien de tout ceci ne semble fonctionner. Développons tout avant d'essayer à nouveau de factoriser.

$$\frac{1}{2}(5^2 - 2 \times 5 \times x + x^2) - 2x = 0$$

$$\frac{1}{2}(25 - 10x + x^2) - 2x = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{25}{2} = 0$$

À partir de là nous bloquons. Nous ne voyons pas comment factoriser. Ceci dit nous pouvons néanmoins conjecturer l'ensemble des solutions avec la calculatrice.

Représentons graphiquement les courbes représentatives des fonctions f et g avec la calculatrice.

Il semblerait que les aires soient égales pour une unique valeur de x qui est approximativement de 2,12.

La méthode générale de résolution de ce type d'équation (équation polynomiale de degré deux) est au programme de première.

Exercice 194.

- | | |
|--|---|
| a) $(2x+1)^2 - (1-x)^2 = 3x(x+2)$ | b) $x^2 - 20x + 100 = (x-10)^2$ |
| c) $25 - (x+1)^2 = (-x+4)(x+6)$ | d) $4x^2 + 4 + 8x = 4(x+1)^2$ |
| e) $16(x+1)^2 - 25x^2 = (-x+4)(9x+4)$ | f) $16x^2 - 81 = (4x-9)(4x+9)$ |
| g) $b^2 - 3b + \frac{9}{4} = \left(b - \frac{3}{2}\right)^2$ | h) $(a-1)^2 - 2 = (a-1-\sqrt{2})(a-1+\sqrt{2})$ |
| i) $x^2 - 4 + (x-2)(x+1) = (x-2)(2x+3)$ | j) $3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$ |

Exercice 195.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $x^2 + 3x + (x+3)^2 = (x+3)(2x+3)$ | b) $(x+1)(x+2) - (3x+6) = (x-2)(x+2)$ |
| c) $2x(x+3) + 4x + 12 = 2(x+3)(x+2)$ | d) $(x-3)(3x-4) - 3x + 4 = (3x-4)(x-4)$ |
| e) $xy - xz - y(y-z) = (x-y)(y-z)$ | f) $-x^2 + 8x - 16 = -(x-4)^2$ |
| g) $7x^2 - 14x = 7x(x-2)$ | h) $16x^2 - 81 = (4x-9)(4x+9)$ |
| i) $2a^2b - b = (2a^2 - 1)b$ | j) $4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ |

Exercice 196.

- | | |
|---|--|
| a) $2(x-1)^2 + 3x - 3 = (x-1)(2x+1)$ | b) $2x^2 + 8x + 8 = 2(x+2)^2$ |
| c) $x^2 - 16 + (x-4)^2 = 2x(x-4)$ | d) $5x^2 - 125 = 5(x-5)(x+5)$ |
| e) $4x^2 - 12x + 9 = 4(x-3)^2$ | f) $7x^2 - 28 = 7(x-2)(x+2)$ |
| g) $(2x-3)^2 - (5x+2)^2 = (-3x-5)(7x-1)$ | h) $(x-5)^2 - 2(x-5)(x-3) = (x-5)(-x+1)$ |
| i) $2x^2 + 7x = x(2x+7)$ | j) $x^2 + 26x + 169 = (x+13)^2$ |
| k) $(9x^2 - 25) + (6x+10) = 3(3x+5)(x-1)$ | l) $x^2 - 4x + 4 - (x-2)(7-x) = (x-2)(2x-9)$ |

X Équations quotients.

Équation quotient nul.

Proposition 16. Soient a et b des nombres réels. Si $\frac{a}{b} = 0$ alors $a = 0$.

Démonstration. $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a \frac{1}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $\frac{1}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ car 0 n'a pas d'inverse.
Exemples.

1. Résolvons l'équation $\frac{3x-1}{7} = 0$.

Si $\frac{3x-1}{7} = 0$ alors $3x-1 = 0$ et donc $x = \frac{1}{3}$.

Réciproquement $\frac{1}{3}$ est bien solution de l'équation $\left(\frac{3 \times \frac{1}{3} - 1}{7} = 0\right)$ donc

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

2. Résolvons l'équation $\frac{2x-8}{x-4} = 0$.

Si x est solution de $\frac{2x-8}{x-4} = 0$ alors $2x-8 = 0$ et donc $x = 4$.

Or 4 n'est pas solution de l'équation puisque c'est une valeur interdite (au dénominateur $4-4=0$) donc

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

3. Résolvons l'équation $\frac{6x-24}{-7x+11} = 0$.

Si x est solution de l'équation alors $6x-24 = 0$ et donc $x = 4$.

On vérifie que 4 est bien solution de l'équation.

$$\mathcal{S} = \{4\}.$$

Remarques.

- La proposition n'est pas une équivalence car nous avons la difficulté des valeurs interdites qui peuvent apparaître dans l'équation. Cependant si nous savons que $b \neq 0$ alors il y a équivalence : $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
- Lorsqu'on résout une équation faisant intervenir une fraction (avec des inconnues au dénominateur) nous résoudrons en deux temps : analyse (recherche des solutions possibles) puis synthèse vérification que les solutions potentielles fonctionnent bien.

EXERCICE 197. Résolvez les équations en donnant l'ensemble des solutions.

Exemple : $\frac{x-3}{x+1} = 0$ implique successivement : $x-3 = 0$ puis $x = 3$. Puis on vérifie que 3 est bien une solution de l'équation.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{9x-63}{11\frac{5}{5}} = 0. & \text{b)} \frac{-8x+3}{4\frac{5}{5}} = 0. & \text{c)} \frac{x+7}{2x-1} = 0. & \text{d)} \frac{3-x}{-4x+1} = 0. \quad \text{e)} \frac{8+x}{x+9} = 0. \\ \text{f)} \frac{x+\frac{4}{4}}{3x+\frac{1}{2}} = 0. & \text{g)} \frac{x-\frac{7}{7}}{x+\frac{1}{3}} = 0. & \text{h)} \frac{x+\sqrt{11}}{x-1} = 0. & \text{i)} \frac{x^2-16}{x-4} = 0. \quad \text{j)} \frac{x-4}{x^2-16} = 0. \end{array}$$

Le produit en croix.

Lorsque l'équation se présente comme une égalité de deux expressions fractionnaires il est possible d'utiliser le produit en croix.

Proposition 17. Soient a, b, c et d des nombres réels. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$.

Démonstration. Supposons que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et démontrons que $ad = bc$.

De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on déduit successivement

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= 0 \\ \frac{a \times d - b \times c}{b \times d} &= 0\end{aligned}$$

D'après la proposition précédente :

$$ad - bc = 0$$

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ alors } ad = bc.$$

Remarques.

1. L'intérêt de cette démarche est de ne plus avoir d'expression fractionnaire.
2. Cette proposition est une implication pas une équivalence : certains problèmes de valeurs interdites risquent de ne plus être pris en compte. Il faut donc raisonner par analyse-synthèse lorsqu'on utilise cette méthode pour résoudre une équation.
3. Ce résultat peut être vu comme une généralisation de la précédente proposition.

Exemples.

1. Résolvons l'équation $\frac{-2x+1}{4} = \frac{3}{7}$.

On commence par une phase d'analyse.

Si x est solution de l'équation alors on a successivement :

$$\begin{aligned}(-2x + 1) \times 7 &= 4 \times 3 \\ -14x + 7 &= 12 \\ x &= -\frac{5}{14}\end{aligned}$$

Phase de synthèse : on vérifie que ce qui devrait être une solution en est bien une.

On vérifie aisément que $-\frac{5}{14}$ est solution de l'équation.

$$\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{14}\right\}.$$

2. Résolvons l'équation $\frac{x^2+x}{x} = \frac{x+1}{2}$.

Si x est solution de l'équation alors on a successivement :

$$\begin{aligned}(x^2 + x) \times 2 &= x \times (x + 1) \\ 2x^2 + 2x &= x^2 + x \\ x^2 + 2x &= 0 \\ x(x + 2) &= 0\end{aligned}$$

Ainsi les seules solutions possibles sont 0 et -2 . Si 2 est bien solution, 0 ne l'est pas car c'est une valeur interdite.

$$\mathcal{S} = \{-2\}.$$

EXERCICE 198. Résolvez l'équation d'inconnue x : $\frac{3x+2}{7x-1} = 2$.

Exercices.

EXERCICE 199. Déterminez l'ensemble des valeurs interdites pour le calcul défini pour x réel par $\frac{\sqrt{x}}{2x-3}$.

EXERCICE 200. Résolvez l'équation $\frac{2x-4}{x} = 0$.

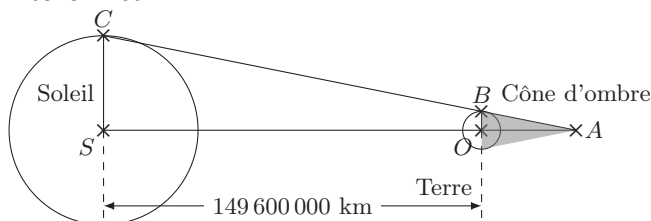
EXERCICE 201. Résolvez l'équation $\frac{2x-4}{x} = 3$.

EXERCICE 202. Un litre d'une boisson contient 7 % de sirop. Quel volume d'eau pure doit-on rajouter pour qu'un litre de cette nouvelle boisson contienne 5 % de sirop ?

EXERCICE 203. $ABCD$ est un carré de côté a (a nombre strictement positif). M est un point du segment $[BC]$. Déterminez le point M de façon que le rapport de l'aire du triangle ABM à celle du trapèze $ADCM$ soit égale à $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 204. ABC est un triangle équilatéral de côté a (a nombre strictement positif). Par le point P symétrique de C par rapport à B on trace une droite (Δ) qui rencontre $[AB]$ en M et $[AC]$ en N . On pose $BM = x$. Déterminez x tel que $CN = \frac{2a}{3}$.

EXERCICE 205.



1. La distance moyenne Soleil-Terre (calculée de centre à centre) est de 149 600 000 km. Le rayon du soleil est de 696 000 km, celui de la Terre de 6 360 km. Démontrez que la hauteur OA du cône d'ombre situé derrière la Terre est de 1 379 642 km par valeur approchée à l'unité près par excès.
2. Calculez le volume du cône d'ombre de sommet A et dont la base est formé par le disque de rayon OB .
3. La distance moyenne Terre-Lune (calculée de centre à centre) est de 382 000 km. Le rayon de la lune est de 1 738 km Étudiez la possibilité d'éclipses totales de la Lune en période de pleine lune.

Corrections.

Exercice 197.

- | | | | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------|---------------|------------------|
| a) $\{7\}$. | b) $\left\{\frac{3}{8}\right\}$. | c) $\{-7\}$. | d) $\{3\}$. | e) $\{-8\}$. |
| f) $\left\{-\frac{5}{4}\right\}$. | g) $\left\{\frac{5}{7}\right\}$. | h) $\{-\sqrt{11}\}$. | i) $\{-4\}$. | j) $\emptyset$. |

Exercice 198. *Avec le produit en croix on perd l'équivalence. Il faut donc procéder à un raisonnement par analyse-synthèse qui est plus long.*

* Supposons qu'on ait réussi à trouver un nombre x tel que $\frac{3x+2}{7x-1} = 2$, alors $3x+2 = 2(7x-1)$. Cette dernière équation équivaut successivement à :

$$3x+2 = 2 \times 7x - 2 \times 1$$

$$3x+2 = 14x-2$$

Si x est une solution de l'équation alors forcément $x = \frac{4}{17}$.

* Vérifions que la seule solution possible est vraiment une solution :

$$\frac{3 \times \frac{4}{17} + 2}{7 \times \frac{4}{17} - 1} = 2$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{4}{17} \right\}$.

Exercice 199. Il faut utiliser le fait qu'une racine carrée s'applique uniquement à un nombre positif et qu'un quotient ne peut avoir un dénominateur nul.

Exercice 200. ✍

* Si x est solution de l'équation alors forcément :

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \\ 2x - 4 + 4 &= 0 + 4 \\ 2x &= 4 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{4}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Nous aurions pu utiliser un produit en croix.

* On vérifie que 2 est bien solution : $\frac{2 \times 2 - 4}{2} = \frac{4 - 4}{2} = 0$.

La solution de l'équation est 2.

Exercice 201. ✍ L'expression « résolvez dans $\mathbb{R}$ signifie que nous garderons que les solutions qui sont dans $\mathbb{R}$.

Il y a deux manipulations possibles : en se ramenant à une expression fractionnaire nulle ou en utilisant le produit en croix.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation par analyse-synthèse.

* *Analyse.* Si $x \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation, alors nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} \frac{2x - 4}{x} &= 3 \\ \frac{2x - 4}{x} - 3 &= 3 - 3 \\ \frac{2x - 4}{x} - \frac{3x}{x} &= 0 \\ \frac{2x - 4 - 3x}{x} &= 0 \\ \frac{-x - 4}{x} &= 0 \\ -x - 4 &= 0 \\ -x - 4 + 4 &= 0 + 4 \\ -x &= 4 \\ -x \times (-1) &= 4 \times (-1) \\ x &= -4 \end{aligned}$$

ou manipulation alternative utilisant le produit en croix :

$$\begin{aligned}\frac{2x-4}{x} &= 3 \\ \frac{2x-4}{x} &= \frac{3}{1} \\ (2x-4) \times (1) &= (3) \times (x) \\ 2x-4 &= 3x \\ 2x-4-2x &= 3x-2x \\ -4 &= x\end{aligned}$$

* **Synthèse.** Nous avons vu (dans la phase d'analyse) qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution à savoir -4 . Or $\frac{2 \times (-4) - 4}{-4} = 3$ donc -4 est bien une solution de l'équation.

Ici nous aurions pu avoir une difficulté si la solution trouvée avait été une valeur interdite.

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\mathcal{S} = \{-4\}$.

Exercice 202.  **Déterminons le volume d'eau à rajouter.**

Notons x le volume, exprimé en litre, d'eau pure rajouté dans la boisson. Après mélange la boisson est composée de $\frac{7}{100} \times 1 = 0,07$ L de sirop, de $1 - 0,07 = 0,93$ L d'eau et de x litres d'eau. On souhaite que le mélange contienne 5 % de sirop donc :

$$\frac{0,07}{0,07 + 0,93 + x} = \frac{5}{100}$$

ce qui équivaut successivement à

$$\frac{0,07}{1+x} = \frac{5}{100}$$

Puisque $x + 1 \neq 0$ (utilisation du produit en croix) :

$$\begin{aligned}0,07 \times 100 &= (1+x) \times 5 \\ 7 &= 5 + 5x \\ 7 - 5 &= 5 + 5x - 5 \\ 2 &= 5x \\ \frac{2}{5} &= x\end{aligned}$$

Pour que la nouvelle boisson contienne 5 % de sirop il faut rajouter 0,4 L.

Exercice 203. Notons $x = BM$. On veut $\frac{\frac{1}{2}ax}{(\frac{a-x}{2})+a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{ax}{2a-x} = \frac{1}{3} \cdot x = \frac{2a}{3a-1}$.

Exercice 204. Notons R le point de $[BC]$ de sorte que NCR est un triangle équilatéral.

Avec le théorème de Thalès : $\frac{PB}{PR} = \frac{BM}{CN}$ et $CN = \frac{2a}{3}$.

Exercice 205.

- Théorème de Thalès : $\frac{OA}{OA+OS} = \frac{OB}{CS} \Leftrightarrow \frac{OA}{OA+1496 \times 10^3} = \frac{6360}{696 \times 10^3} \Leftrightarrow OA = \frac{6360}{696 \times 10^3} OA + \frac{6360}{696 \times 10^3} \times 1496 \times 10^5 \Leftrightarrow OA \left(1 - \frac{6360}{696 \times 10^3}\right) = \frac{6360}{696 \times 10^3} \times 1496 \times 10^5 \Leftrightarrow OA = \frac{\frac{6360}{696 \times 10^3} \times 1496 \times 10^5}{1 - \frac{6360}{696 \times 10^3}} \approx 1379641,55211$.
- $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi OB^2 \times OA = \frac{1}{3} \times \pi \times 6360^2 \times 1379642 = 58439822667748,89$ en km^3 .
- Soient $L \in [OA]$ le centre de la Lune et D le point d'intersection de (AC) et de la perpendiculaire à (AS) passant par L . $\frac{DL}{OB} = \frac{AL}{AO} \Leftrightarrow \frac{DL}{6360} = \frac{AO-LO}{AO} \Leftrightarrow DL = 6360 \left(1 - \frac{382 \times 10^3}{1379642}\right)$ donc $DL \approx 4599,02 \geq 1738$

XI Systèmes linéaires.

Intersection des droites.

Les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues apparaissent dans le programme en géométrie du plan lors de la recherche des points d'intersections de deux droites. On cherche les coordonnées (x, y) d'un point vérifiant simultanément les équations cartésiennes des deux droites.

Exemples.

1. Détermination de la position relative des deux droites $d : y = 2x + 1$ et $d' : x = 3$ en précisant l'éventuel point d'intersection.

D'après son équation réduite d' est parallèle à l'axe des ordonnées ce qui n'est pas le cas de d (d'après son équation réduite) donc d et d' sont sécantes en un point P .

D'après l'équation de d' l'abscisse de P est 3. Et puisque $P \in d$ ses coordonnées vérifient : $y_P = 2x_P + 1$. En substituant x_P par la valeur trouvée : $y_P = 2 \times 3 + 1 = 7$. Ainsi : $P(3; 7)$.

2. Détermination de la position relative des deux droites $d : y = 2x + 1$ et $d' : y = -5x + 3$ en précisant l'éventuel point d'intersection.

Les coefficients directeurs (pentes) de d et d' sont distincts donc d et d' sont sécantes en un point P .

Les coordonnées de P vérifient simultanément les deux équations de droites : $\begin{cases} y_P = 2x_P + 1 \\ y_P = -5x_P + 3 \end{cases}$

On en déduit l'égalité : $2x_P + 1 = -5x_P + 3$ qui se résout en $x_P = \frac{2}{7}$. En substituant x_P dans (par exemple) l'équation de $d : y_P = 2 \times \frac{2}{7} + 1 = \frac{11}{7}$. Ainsi : $P\left(\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right)$.

3. Détermination de la position relative des deux droites $d : 2x - y + 1 = 0$ et $d' : 3x + 2y - 1 = 0$ en précisant l'éventuel point d'intersection.

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs respectifs de d et d' . $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times (-2) = 7 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et par conséquent d et d' sont sécantes en un point P .

On pourrait déterminer les équations réduites des deux droites (ce n'est pas très compliqué) puis procéder comme dans l'exemple précédent. Nous allons procéder un peu différemment (mais sans que ce soit préférentiel).

Isolons l'une des inconnues dans l'une des équations ; le y dans l'équation de d semble tout indiqué : $y = 2x + 1$. Puis substituant au y de l'autre équation cette expression il apparaît : $3x + 2(2x + 1) - 1 = 0$. Nous avons obtenu une équation du premier degré avec une inconnue : $x = -\frac{1}{7}$. Puis en substituant cette valeur de x dans l'expression de $y : y = 2 \times \left(-\frac{1}{7}\right) + 1 = \frac{5}{7}$.

EXERCICE 206. Recherchez les positions relatives et les éventuels points d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dont les équations dans un repère (O, I, J) du plan sont :

- | | |
|--|--|
| a) $\mathcal{D}_1 : y = -x + 2$ et $\mathcal{D}_2 : y = 3x - 1$ | b) $\mathcal{D}_1 : y = \frac{10}{2}x - 3$ et $\mathcal{D}_2 : y = 5x - \frac{27}{9}$ |
| c) $\mathcal{D}_1 : y = \pi^2 x - \sqrt{2}$ et $\mathcal{D}_2 : y = \pi^2 x + \frac{7}{4}$ | d) $\mathcal{D}_1 : y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$ et $\mathcal{D}_2 : y = -x + \frac{\pi}{2}$ |
| e) $\mathcal{D}_1 : x = \sqrt{2}$ et $\mathcal{D}_2 : y = \sqrt{2}x - 2$ | f) $\mathcal{D}_1 : x = -\pi^2 + 4$ et $\mathcal{D}_2 : x = 4^{1000}$ |

Généralités.

Un **système d'équations** est un groupe d'équations utilisant les mêmes inconnues. Résoudre un système d'équations c'est trouver toutes les solutions qui satisfont simultanément **toutes** les équations.

Nous résoudrons quasi uniquement des **systèmes d'équations linéaires (ou affines) de deux équations à deux inconnues**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

où x et y sont des inconnues (ou variables) et a_1, b_1, a_2, b_2 des nombres réels fixés.

Les solutions d'un tel système sont des couples (une valeur pour x et une valeur pour y). Un tel système peut n'avoir aucune, une seule (*i.e.* un couple) ou une infinité de solutions.

EXERCICE 207. Par un raisonnement géométrique donnez le nombre de solutions des systèmes d'équations suivants.

$$\text{a) } (S_1) \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -5x + 6 \end{cases}, \quad \text{b) } (S_2) \begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = -3x + \pi \end{cases}, \quad \text{c) } (S_3) \begin{cases} y = 2x + 5 \\ 2y = 4x + 10 \end{cases}$$

EXERCICE 208. Par un raisonnement géométrique donnez le nombre de solution du système d'équations suivants : $(S) : \begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0 \\ -2x - \frac{8}{3}y - 17 = 0 \end{cases}$.

Résolution par substitution.

Dans le cas particulier d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues nous utiliserons la méthode par substitution. $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$

Méthode de résolution :

Étape 1 isoler x dans la première équation (1) et l'exprimer en fonction de y ,

Étape 2 substituer à x son expression en fonction de y dans l'équation (2),

Étape 3 résoudre l'équation du premier degré d'inconnue y ainsi obtenue.

- si l'équation d'inconnue y admet une solution en réinjectant cette valeur dans l'expression de x obtenue à l'étape 2 nous obtenons la valeur de y ,
- si nous ne trouvons pas de solution pour y alors le système n'admet pas de solutions.
- si nous trouvons une infinité de valeurs ($\mathbb{R}$) pour y , alors une infinité de couple est solution.
- conclure après avoir calculer la valeur de y .

Exemples.

1.

EXERCICE 209. Résolvez les systèmes :

$$(S_1) : \begin{cases} 9x + 3y = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}, \quad (S_2) : \begin{cases} 2x + 8y = 12 \\ \frac{1}{2}x + 2y = 3 \end{cases}, \quad (S_3) : \begin{cases} y - 3x = 2 \\ -6x + 2y = 14 \end{cases}$$

Une substitution simple : système échelonné.

Pour mieux comprendre l'intérêt de ce procédé nous allons le voir sur un plus gros système d'équations linéaires.

Nous dirons qu'un système est **échelonné** si chaque ligne contient une inconnue de moins.

Exemples.

1. Un système échelonné :
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -y = 2 \end{cases}$$
2. Un système qui n'est pas échelonné :
$$\begin{cases} -x - 7y = -1 \\ 6x + 2y = 10 \end{cases}$$
3. Un système échelonné :
$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 6 \\ 2y + z = -11 \\ 5z = 2 \end{cases}$$

La résolution se fait en procédant à des substitutions en remontant les équations du système.

Exemples.

1. Résolvons le système
$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 16 \\ 2y + z = 8 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

On commence par la dernière équation.

* D'après $L_3 : 3z = 6 \Leftrightarrow z = 2$.

* Puis on substitue dans l'équation précédente du système. Donc d'après $L_2 : 2y + 2 = 8 \Leftrightarrow y = 3$.

* Puis on substitue dans l'équation précédente du système. Donc d'après $L_1 : 3x + 4 \times 3 - 5 \times 2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$.

Le système admet une unique solution : le triplet $(4; 3; 2)$.

Résolution par combinaisons linéaires.

Cette méthode, qui est la plus générale (ou du moins qui se généralise le plus facilement), est aussi la plus abstraite.

Proposition 18. Les règles de calculs sur les équations d'un système qui conservent les systèmes équivalents sont :

- (i) multiplier une équation par un nombre réel non nul,
- (ii) remplacer une équation par la somme des deux autres équations,
- (iii) échanger deux équations.

Remarques.

1. Ces règles complètent les règles vues pour manipuler une équation.
2. Grâce à ces règles de calculs il est possible d'isoler les inconnues et de résoudre le système d'équations linéaires du premier degré.
3. Les deux règles précédentes sont parfois regroupées en disant que les *combinaisons linéaires* sur les lignes sont autorisées.
4. Ces règles sont aisées à programmer et permettent de rédiger un algorithme de résolution de système appelé *méthode du pivot de Gauss* ou *élimination de Gauss-Jordan*.

Exemples.

1. On souhaite résoudre le système avec l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 24 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

Transformer les équations pour avoir le coefficient de x égale à 1. On dit que x est le pivot.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}L_1 &\rightarrow L_1 \\ \frac{1}{2}L_2 &\rightarrow L_2 \end{aligned} \quad \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 6 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

On supprime le pivot de la seconde équation.

$$L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \quad \begin{cases} x & - & \frac{1}{2}y & = & 6 \\ & 2y + \frac{1}{2}y & = & 1 - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & - & \frac{1}{2}y & = & 6 \\ & \frac{3}{2}y & = & -5 \end{cases}$$

$$\frac{2}{5}L_2 \rightarrow L_2 \quad \begin{cases} x & - & \frac{1}{2}y & = & 6 \\ & \frac{2}{5} \times \frac{3}{2}y & = & \frac{2}{5} \times (-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & - & \frac{1}{2}y & = & 6 \\ & y & = & -2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} x & - & \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y & = & 6 + \frac{1}{2} \times (-2) \\ & y & = & -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = & 5 \\ & y & = & -2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est donc : $\mathcal{S} = \{(5, -2)\}$.

2. On souhaite résoudre le même système toujours avec des combinaisons linéaires mais sans suivre d'algorithme particulier.

$$L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} & - & 10y & = & 20 \\ 2x & + & 4y & = & 2 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{10}L_1 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} & y & = & -2 \\ 2x & + & 4y & = & 2 \end{cases}$$

$$L_2 - 4L_1 \rightarrow L_2 \quad \begin{cases} & y & = & -2 \\ 2x & & = & 10 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_2 \quad \begin{cases} & y & = & -2 \\ x & & = & 5 \end{cases}$$

3. Il est parfois possible de simplifier le système en multipliant astucieusement les lignes.

Par exemple le système $\begin{cases} 10x + 10y = 20 \\ 1,2x - 2,4y = 3,6 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

EXERCICE 210. Résolvez les systèmes :

$$(S_1) : \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}, (S_2) : \begin{cases} -x + 3y = 19 \\ 4x - y = 1 \end{cases}, (S_3) : \begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ -3x + 4y = -2 \end{cases}$$

Exercices.

EXERCICE 211. Soient $A(2; 2)$, $B(4; 4)$, $C(7; 2)$ et $D(4; -2)$.

- Montrez que la droite d_1 passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$ et la droite d_2 passant par D et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$ sont sécantes en un point P .
- Calculez les coordonnées du point P .

EXERCICE 212. La somme de deux entiers est 924. En ajoutant 78 à chacun d'eux, l'un devient le double de l'autre. Déterminez ces deux nombres.

EXERCICE 213. Résolvez les systèmes par substitution.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 8 \\ 2x + 5y = 5 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y = 10 \\ 5x + y = -6 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 8x + y = 111 \\ 14x - 9y = 33 \end{array} \right. \\ \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} 0,2x + 0,7y = 0,5 \\ x + 2y = 1,6 \end{array} \right. & & \end{array}$$

EXERCICE 214. Résolvez les systèmes en utilisant des combinaisons linéaires.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y = 31 \\ 5x + 4y = 43 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 8x - 5y = -6 \\ 4x + 2y = 24 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y = 1 \\ 3x + 5y = 7 \end{array} \right. \\ \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} -3x + 4y = 56 \\ 2x + 4y = 36 \end{array} \right. & & \end{array}$$

EXERCICE 215. Étant donné le système $(S) : \begin{cases} x - 6y = 70 \\ 6x - y = 70 \end{cases}$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou pas.

- a) $(10, -10)$ est une solution de (S) . b) $(-10; 10)$ n'est pas solution de (S) .
c) $(10, -10)$ est la solution de (S) .

EXERCICE 216. Dans chacun des cas suivants, calculez les nombres réels a et b afin que le couple donné soit solution du système.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 13 \\ 5x + by = -14 \end{array} \right. & \text{a pour solution } (2, a). \\ \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} ax + 2y = 1 \\ 3x + by = -1 \end{array} \right. & \text{a pour solution } (5, -2). \end{array}$$

EXERCICE 217. La droite d passe par les points : $M(-2; 6)$ et $N(2; 18)$.

- Pourquoi (MN) admet-elle une équation réduite de la forme $y = mx + p$?
- Justifiez qu'on a le système : $\begin{cases} -2m + p = 6 \\ 2m + p = 18 \end{cases}$.
- (a) Résolvez le système.
(b) Le point $P(-10, -18)$ est-il sur d ? Justifier.

EXERCICE 218. Résolvez les systèmes.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 5y = 11 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 1 \\ 4x - 3y = 10 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 15 \\ 5x - 4y = 8 \end{array} \right. & \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} -x + 5y = 75 \\ 10x + 3y = -8 \end{array} \right. \end{array}$$

EXERCICE 219. Résolvez les systèmes.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 4x + 28y = 44 \\ x - 16y = 34 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 73x + 0,5y = 93 \\ 50x - y = 10 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 10x + 7y = -1 \\ 3x - 5y = 21 \end{array} \right. & \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} 9x + 8y = -60 \\ 12x - 7y = 450 \end{array} \right. \end{array}$$

EXERCICE 220. Résolvez les systèmes.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 19x - 3y = 2 \\ 11x + 6y = 84 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} -7x + 4y = -77 \\ 6x + 5y = 243 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 10x + 40y = 30 \\ -3x + 8y = 5 \end{array} \right. & \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} 8x - 8y = -4 \\ 1,2x + 1,4y = 28 \end{array} \right. \end{array}$$

EXERCICE 221. Résolvez les systèmes.

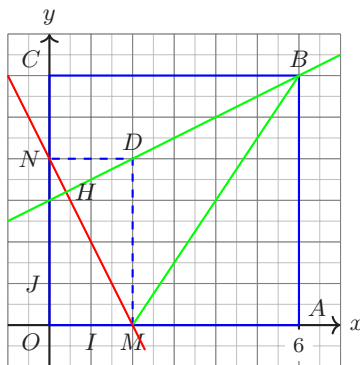
$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 10 \\ 0,6x - 0,2y = 7 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 30x - 105y = 120 \\ -14x + 49y = -56 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 7x - y = 12,1 \\ -9x - 8y = 18,8 \end{array} \right. \\ \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} 300x + 4y = 10 \\ -5x + 0,04y = -0,1 \end{array} \right. & \text{e)} \left\{ \begin{array}{l} -0,2x + 0,5y = -4,2 \\ 3x - 7,5y = 63 \end{array} \right. & \end{array}$$

EXERCICE 222. *Problème longtemps : le vigneron (1900)*. Un vigneron qui venait d'acheter un pré disait : « Si je vends mon vin 160 F la pièce, j'aurai de quoi payer mon pré et il me restera 800 F ; si je le vends 140 F comme on me le propose, il me manquera 300 F. » On demande le nombre de pièces de vin et le prix du pré.

EXERCICE 223. Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points $A(6; 0)$, et $M(2; 0)$.

$OABC$ est un carré. $OM = CN$ et $OMDN$ est un rectangle. Les droites (BD) et (MN) se coupent en H .

Le but de l'exercice est de démontrer que le triangle BHM est rectangle en H .



1. Quelles sont les coordonnées des points B , N et D ?
2. (a) Quelles sont les équations des droites (MN) et (BD) ?
(b) Déduisez-en les coordonnées de H .
3. Démontrons que le triangle MBH est rectangle.

EXERCICE 224. Soit MNP un triangle quelconque. On se place dans le repère (M, N, P) et on note U le milieu de $[MP]$.

1. Faites une figure et placez le point K , symétrique du point M par rapport au point N . Quelles sont ses coordonnées ?
2. Tracez la droite (d) d'équation $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.
3. Résolvez le système d'équations $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = 1 - x \end{cases}$
4. Interprétez la solution de ce système.
5. On note $L(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Montrez que la droite (ML) coupe le segment $[PK]$ en son milieu.
6. Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

EXERCICE 225. Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on donne les points $A(-4; 3)$, $B(8; 1)$ et $C(1; 4)$.

Partie A : médiatrices d'un triangle.

1. On note m_1 la médiatrice de $[BC]$. Soit $M(x, y)$ un point quelconque sur m_1 . On rappelle que la médiatrice est constituée des points équidistants des extrémités de ce segment.
 - (a) Exprimer BM^2 et CM^2 en fonction de x et y .
 - (b) Montrez qu'un point $M(x, y)$ appartient à la médiatrice m_1 de $[BC]$ si et seulement si : $7x - 3y = 24$.
 - (c) Montrez de la même manière qu'une équation cartésienne de la médiatrice m_2 de $[AC]$ est : $5x + y = -4$.
2. (a) Résolvez le système : $\begin{cases} 7x - 3y = 24 \\ 5x + y = -4 \end{cases}$
(b) Déduisez-en, les coordonnées du centre E du cercle circonscrit au triangle ABC .

Partie B : hauteurs d'un triangle.

1. Soit h_1 la hauteur issue de A du triangle ABC .
 - (a) Démontrons que m_1 et h_1 sont parallèles.
 - (b) Déterminez une équation cartésienne de h_1 .

2. Soit h_2 la hauteur issue de B du triangle ABC . Déterminez une équation cartésienne de h_2 .

3. Déterminez les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC .

EXERCICE 226. Un terrain a pour longueur 50 mètres et pour largeur 30 mètres. Le propriétaire augmente la largeur de x mètres et la longueur de y mètres. Il obtient alors un terrain carré dont le périmètre est égale à 500 mètres. Calculez x et y .

EXERCICE 227. Un magasin vend des coques de téléphone et des stylos de luxe. En septembre la recette pour la vente de 350 coques et 700 stylos a été de 4900 €. Le bénéfice du vendeur est de 40 % du prix pour chaque coque et 60 % du prix pour chaque stylo. Le vendeur a réalisé en septembre un bénéfice de 2380 €. À l'aide d'un système déterminez le prix d'une coque de téléphone et le prix d'un stylo.

EXERCICE 228. À la boulangerie, Tom achète deux croissants et quatre pains au chocolat pour 6,90 €. Dans la même boulangerie, Rose paie 4,10 € pour un pain au chocolat et trois croissants. Gaëlle veut acheter neuf croissants et sept pains au chocolat dans cette boulangerie. Combien va-t-elle devoir payer ?

EXERCICE 229. Les tarifs diffèrent selon que l'on assiste à un concert ou à une pièce de théâtre. Une première personne réserve deux places pour une pièce de théâtre et quatre places pour un concert et elle paie 170 €. Une autre personne réserve trois places pour une pièce de théâtre et deux places pour un concert et paie 135 €. Quel sont les prix d'une place pour une pièce et de théâtre et un concert ?

EXERCICE 230. Dans une cantine les enfants mangent dans un réfectoire. Si l'on place neuf enfants par table il manque trois places et si l'on place dix enfants il reste cinq places vides. Déterminez le nombre d'enfants et le nombre de tables.

EXERCICE 231. Avec 14 douches et 21 bains par semaine, une famille de cinq personnes consomme en moyenne 4855 litres d'eau. Elle constate qu'avec 28 douches et 7 bains par semaine, elle consomme alors 1470 litres d'eau de moins. Quelle quantité d'eau moyenne consomme-t-on dans cette famille pour une douche ? pour un bain ?

EXERCICE 232. Au marché les bouteilles de un litre de lait entier se vendent 2,10 € et les fromages 5,50 € l'unité. À la fin de la journée un marchand a encaissé 223 €. Sachant que le marchand avait 56 articles au total, combien de bouteilles de lait et de fromages a-t-il vendu ?

EXERCICE 233. Pour chacun des systèmes suivants déterminez le nombre de solutions puis résolvez les systèmes ayant des solutions.

a) $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -3x + 4 \end{cases}$	b) $\begin{cases} y = -2x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$	c) $\begin{cases} 3y + 6x = -3 \\ 2y - 4x = 6 \end{cases}$
d) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = -3x - 4 \end{cases}$	e) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2y - 6x = 4 \end{cases}$	f) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 2 \\ x = 4 \end{cases}$

Partition du plan avec des droites.

On parle parfois de *régionnement affines du plan*.

EXERCICE 234. **Partie A.** On considère la droite $d : 2x + 3y = 11$.

1. Tracez la droite d dans un repère.

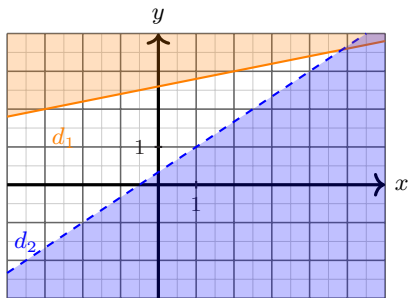
2. On considère l'ensemble E des points $M(x, y)$ tels que $2x + 3y < 11$.

(a) Montrer que l'origine du repère est dans E .

(b) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à l'ensemble E ? Justifiez par un calcul. $A(2; 1)$, $B(1; 4)$, $C(5; 0)$ et $D(4; 1)$.

(c) Graphiquement, où sont situés les points qui appartiennent à l'ensemble E ?

Partie B. Ci-dessous on a représenté deux droites : $d_1 : x - 5y + 13 = 0$ et $d_2 : 2x - 3y + 1 = 0$.



Descrivez l'ensemble non coloré par un système de deux inéquations à deux inconnues x et y . (Une droite en pointillés correspond à une inégalité stricte.)

EXERCICE 235. On considère l'ensemble F des points $M(x, y)$ du plan vérifiant :

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ 3x - 5y + 4 > 0 \end{cases}.$$

- Les points $A(1; 2)$ et $B(3; 2)$ appartiennent-ils à F ?
- Tracez les droites $d_1 : x = 0$, $d_2 : x - y - 1 = 0$ et $d_3 : 3x - 5y + 4 = 0$.
 - Hachurez les parties du plan qui ne vérifient pas les inéquations de l'ensemble F .
 - Descrivez l'ensemble F .
- Combien de points à coordonnées entières sont dans l'ensemble F ? Lesquels?

Corrections

Exercice 206.

- Sécantes en $A\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$.
- Confondues car mêmes coefficient directeur et ordonnée à l'origine.
- Strictement parallèles car même coefficient directeur mais pas même ordonnée à l'origine.
- Sécantes en $B\left(\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}, 1 - \frac{\frac{\pi}{2}-1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$.
- Sécantes en $C(\sqrt{2}, 0)$.
- Strictement parallèles et parallèles à l'axe des ordonnées.

Exercice 207.

- Sécantes au point de coordonnées $\left(\frac{5}{7}, \frac{17}{7}\right)$. Le système a une seule solution : singleton.
- Strictement parallèles : $(0, 1)$ est solution de la première équation mais pas de la seconde. Aucune solution : ensemble vide.
- En écrivant la seconde équation comme une équation réduite nous voyons que nous avons une seule équation : droites confondues. Une infinité de couples solutions : les coordonnées des points de la droite.

Exercice 208. $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 8/3 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -4 & 8/3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 \times (-2) - 3 \times \frac{8}{3} = 0$.

Exercice 209. Résolvons (S_1) .

Notons

$$(S_1) \begin{cases} 9x + 3y = 2 & (E_1) \\ -2x + y = 1 & (E_2) \end{cases}$$

Étape 1. Isolons y dans (E_2) .

$$\begin{aligned}(E_2) &\Leftrightarrow -2x + y + 2x = 1 + 2x \\ &\Leftrightarrow y = 2x + 1\end{aligned}$$

Étape 2. Substituons à y son expression en fonction de x dans (E_1) .

$$(E_1) \Rightarrow 9x + 3(2x + 1) = 2$$

Développons, ordonnons puis réduisons

$$\begin{aligned}(E_1) &\Rightarrow 9x + 3 \times 2x + 3 \times 1 = 2 \\ &\Rightarrow 9x + 6x + 3 = 2 \\ &\Rightarrow 15x + 3 = 2\end{aligned}$$

Étape 3. Résolvons cette équation linéaire de degré un en isolant l'inconnue x .

$$\begin{aligned}15x + 3 = 2 &\Leftrightarrow 15x + 3 - 3 = 2 - 3 \\ &\Leftrightarrow 15x = -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{15x}{15} = \frac{-1}{15} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{15}\end{aligned}$$

Étape 4. Calculons y . Remplaçons x par la valeur numérique trouvée précédemment.

$$\begin{aligned}-2\left(-\frac{1}{15}\right) + y = 1 &\Leftrightarrow \frac{2}{15} + y = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{15} + y - \frac{2}{15} = 1 - \frac{2}{15} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{13}{15}\end{aligned}$$

Étape 5. Nous n'avons pas raisonné par équivalence mais par implication. Nous avons que s'il y a une solution ce ne peut-être que le couple précédent. Il faudrait maintenant vérifier que ce couple est effectivement solution des deux équations.

L'ensemble des solutions de (S_1) est $\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{1}{15}; \frac{13}{15}\right)\right\}$.

Exercice 210. ✎ Résolvons le système (S_1) .

Le système (S_1) équivaut successivement à :

$$\frac{1}{3}L_1 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = \frac{2}{3} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Nous avons utilisé la propriété (i) de la proposition ci-dessus.

$$L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \quad \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Nous avons utilisé la propriété (ii) de la proposition ci-dessus.

$$3L_2 \rightarrow L_2 \quad \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = \frac{2}{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

Nous avons utilisé la propriété (i) de la proposition ci-dessus.

$$L_1 - \frac{2}{3}L_2 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Nous avons utilisé les propriétés (i) et (ii) de la proposition ci-dessus combinées.

L'ensemble des solutions de (S_1) est donc : $\mathcal{S} = \{(0,1)\}$.

Exercice 211.

1. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$ donc les droites sont sécantes.

2. $d_1 : 2x - 3y = -2$ et $d_2 : y = -2$ donc $P(-4; -2)$.

Exercice 212. $x + y = 924$ et $x + 78 = 2(y + 78)$. $y = 282$ et $x = 42$.

Exercice 213.

a) Résolvons le système $\begin{cases} x - 3y = 8 & (1) \\ 2x + 5y = 5 & (2) \end{cases}$.

* (1) $\Leftrightarrow x - 3y + 3y = 8 + 3y \Leftrightarrow x = 8 + 3y$

* En substituant dans (2) : $2(8 + 3y) + 5y = 5 \Leftrightarrow 2 \times 8 + 2 \times 3y + 5y = 5 \Leftrightarrow 16 + 6y + 5y = 5 \Leftrightarrow 11y + 16 = 5 \Leftrightarrow 11y + 16 - 16 = 5 - 16 \Leftrightarrow 11y = -11 \Leftrightarrow \frac{11y}{11} = \frac{-11}{11} \Leftrightarrow y = -1$.

* En remplaçant dans (1), y par la valeur numérique trouvée : $x - 3(-1) = 8 \Leftrightarrow x + 3 = 8 \Leftrightarrow x + 3 - 3 = 8 - 3 \Leftrightarrow x = 5$.

L'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S} = \{(5; -1)\}$.

b) Une unique solution : $(-2; 4)$.

c) $(12; 15)$.

d) $(\frac{2}{5}; \frac{3}{5})$.

Exercice 214.

a) $(7; 2)$.

b) Résolvons le système proposé.

$$\begin{cases} 8x & -5y & = & -6 \\ 4x & +2y & = & 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x & -5y & = & -6 \\ 8x & +4y & = & 48 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2$$

$$\begin{cases} 8x & -5y & = & -6 \\ & 9y & = & 54 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{cases} 8x & -5y & = & -6 \\ & y & = & 6 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{9}L_2$$

$$\begin{cases} 8x & & = & 24 \\ & y & = & 6 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$$

$$\begin{cases} x & & = & 3 \\ & y & = & -6 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{8}L_2$$

Le système admet une unique solution $(3; -6)$.

c) $(-1; 2)$.

d) $(-4; 11)$.

Exercice 215.

a) « $(10, -10)$ est une solution de (S) » est vraie car $10 - 6 \times (-10) = 70$ et $6 \times 10 - (-10) = 70$.

b) « $(-10; 10)$ n'est pas solution de (S) » est vraie car $-10 - 6 \times 10 \neq 70$.

c) « $(10, -10)$ est la solution de (S) » est vraie car nous savons déjà que c'est une solution et de plus c'est la seule car les droites associées aux équations du système sont sécantes le déterminant des vecteurs directeurs étant non nul.

Exercice 216.

a) $a = -3$ et $b = 8$.

b) $a = 1$ et $b = 8$.

Exercice 217.

1. Car M et N ont des abscisses distinctes.
2. La première équation signifie que M appartient à d et la seconde signifie que N appartient d .
3. (a) $m = 3$ et $p = 12$.
(b) $m \times (-10) + p = 3 \times (-10) + 12 = -18$ donc $P \in d$.

Exercice 218.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -19y = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 13 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} 3x + y = 15 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x = 68 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \\ \text{d)} \quad & \begin{cases} -x + 5y = 75 \\ 10x + 3y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y = 75 \\ 53y = 742 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 14 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 219.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 4x + 28y = 44 \\ x - 16y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = 11 \\ x - 16y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9y = 45 \\ x - 16y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ x = -56 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} 73x + 0,5y = 93 \\ 50x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 146x + y = 186 \\ 50x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 196x = 196 \\ 50x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 40 \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} 10x + 7y = -1 \\ 3x - 5y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 7y = -1 \\ 71y = -213 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 7y = -1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \text{d)} \quad & \begin{cases} 9x + 8y = -60 \\ 12x - 7y = 450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36x + 32y = -240 \\ 36x - 21y = 1350 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36x + 32y = -240 \\ 53y = -1590 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = -30 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 220.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 19x - 3y = 2 \\ 11x + 6y = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 38x - 6y = 4 \\ 11x + 6y = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 38x - 6y = 4 \\ 49x = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1574}{147} \\ x = \frac{88}{49} \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} -7x + 4y = -77 \\ 6x + 5y = 243 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -35x + 20y = -385 \\ 24x + 20y = 972 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -35x + 20y = -385 \\ -59x = -1357 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 21 \\ x = \frac{1357}{59} \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} 10x + 40y = 30 \\ -3x + 8y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 8y = 6 \\ -3x + 8y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 8y = 6 \\ 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \\ \text{d)} \quad & \begin{cases} 8x - 8y = -4 \\ 1,2x + 1,4y = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -1 \\ 6x + 7y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -1 \\ -13y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{26} \\ x = \frac{17}{13} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 221.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 10 \\ 0,6x - 0,2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ 6x - 2y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 6y = 120 \\ 6x - 2y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 6y = 120 \\ 8y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{55}{4} \\ y = \frac{25}{4} \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} 30x - 105y = 120 \\ -14x + 49y = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 21y = 24 \\ -2x + 7y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 21y = 24 \\ -6x + 21y = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{8}{7} \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} 7x - y = 12,1 \\ -9x - 8y = 18,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 70x - 10y = 121 \\ -90x - 80y = 188 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 560x - 80y = 968 \\ -90x - 80y = 188 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 560x - 80y = 968 \\ 650x = 780 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{37}{10} \\ x = \frac{6}{5} \end{cases} \\ \text{d)} \quad & \begin{cases} 300x + 4y = 10 \\ -5x + 0,04y = -0,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 150x + 2y = 5 \\ -500x + 4y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 150x + 2y = 5 \\ -850x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2} \\ x = 0 \end{cases} \\ \text{e)} \quad & \begin{cases} -0,2x + 0,5y = -4,2 \\ 3x - 7,5y = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5y = -42 \\ 30x - 75y = 630 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5y = -42 \\ 2x - 5y = 42 \end{cases} \quad \text{Une infinité de couples solutions.} \end{aligned}$$

Exercice 222. $160x = y + 800$ et $140x = y - 300$. $x = 55$ et $y = 8855$.

Exercice 223.

1. $B(6; 6)$, $N(0; 4)$ et $D(2; 4)$?
2. (a) $(MN) : y = -2x + 4$ et $(BD) : y = \frac{1}{2}x + 3$?
(b) $H\left(\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$.
3. Réciproque du théorème de Pythagore ou produit scalaire.

Exercice 224.

1. $K(2; 0)$.
2. $K \in (d)$ donc $(d) = (JK)$ où J est le milieu de $[MP]$.
3. $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$.
4. Les droites (d) et (NP) sont sécantes au point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
5. Le milieu de $[PK]$ est $I\left(1, \frac{1}{2}\right)$. $(ML) : y = \frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{3}{2}-0}x + 0$ i.e. $(ML) : y = \frac{1}{2}x$. Or $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ donc $I \in (ML)$.
6. L est le centre de gravité de MKP et donc (ML) est la médiane de MKP issue de M .

Exercice 225. Partie A : médiatrices d'un triangle.

1. (a) $BM^2 = (x-8)^2 + (y-1)^2$ et $CM^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2$.
(b) $(x-8)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow 14x - 6y = 48 \Leftrightarrow 7x - 3y = 24$.
(c)
2. (a) $\begin{cases} 7x - 3y = 24 \\ 5x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 3y = 24 \\ 15x + 3y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 3y = 24 \\ 22x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{222}{33} \\ x = \frac{6}{11} \end{cases}$
(b) Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point d'intersection de ses médiatrices : $E\left(\frac{6}{11}, \frac{222}{33}\right)$.

Partie B : hauteurs d'un triangle.

1. (a) $m_1 \parallel h_1$ car elles sont toutes deux perpendiculaires à $[BC]$.
(b) $\vec{u}\left(\frac{3}{7}\right)$ est un vecteur directeur de m_1 donc est aussi un vecteur directeur de h_1 puisque cette dernière est parallèle à m_1 . Ainsi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $(h_1) : 7x - 3y = c$. Avec $A \in (h_1)$ on a : $7 \times (-4) - 3 \times 3 = c \Leftrightarrow c = -37$. $(h_1) : 7x - 3y = -37$.
2. $(h_2) : 5x + y = 41$.
3. En résolvant le système $H\left(\frac{42}{11}, \frac{241}{11}\right)$.

Exercice 226. $x + 30 = 50 + y$ et $2(x + 30 + y + 50) = 500$. $x = 50$ et $y = 75$.

Exercice 227. $350x + 700y = 4900$ et $0,4 \times 350x + 0,6 \times 700y = 2380$. $x + 2y = 140$ et $x + 3y = 170$.
 $x = 6$ et $y = 67$.

Exercice 228. $2x + 4y = 6,90$ et $3x + y = 4,10$.

Exercice 229. $2x + 4y = 170$ et $3x + 2y = 135$. $x = 25$ et $y = 80$.

Exercice 230. $9x = y - 3$ et $10x = y + 5$. $x = 2$ et $y = 15$.

Exercice 231. $14x + 21y = 4855$ et $28x + 7y = 4855 - 1470$. $y = \frac{1265}{7}$ et $x = \frac{1060}{14}$.

Exercice 232. $2,10x + 5,50y = 223$ et $x + y = 56$. $y = 31$ et $x = 25$.

Exercice 233.

- a) $x = 1$ et $y = 1$.
- b) $x = \frac{3}{20}$.
- c) $\emptyset$.
- d) $x = -1$ et $y = 1$.
- e) $\emptyset$.
- f) $y = -\frac{2}{3}$.

Exercice 234. Partie A.

1. Passe par les points de coordonnées $\left(0; \frac{11}{3}\right)$ et $\left(5; \frac{1}{3}\right)$.
2. (a) $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0 < 11$.
(b) $2 \times 2 + 3 \times 1 = 7 < 11$ donc $A(2; 1) \in E$. $2 \times 1 + 3 \times 4 = 14 > 11$ donc $B(1; 4) \notin E$.
 $2 \times 5 + 3 \times 0 = 10 < 11$ donc $C(5; 0) \in E$. $2 \times 4 + 3 \times 1 = 11$ donc $D(4; 1) \notin E$.

(c) Ils sont situés en dessous de la droite d .

Partie B. Ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient. $2x + 3y \geq 11$ et $x - 5y < 13$.

Exercice 235.

1. $A \notin E$ et $B \in E$ dernière inéquation.
2. (a)

Partie 3. Ensembles.

I Généralités sur les ensembles.

L'ensemble est un objet fondamental en mathématique car il sert à la construction de tous les autres objets. Cependant il est tant fondamental que sa construction relève d'un domaine très abstrait et très déroutant pour la plupart : la logique.

Ensembles.

Définition 7. Un *ensemble* est un objet mathématique qui regroupe des *éléments* dont aucun n'est en double.

Dans cette leçon nous parlerons d'ensembles. L'ensemble est un objet mathématique à part entière. Ce mot ne signifie pas ici que l'on considère simultanément plusieurs objets au sens du mot en français mais que l'on considère l'objet formé d'une collection d'objets. Nous nous contenterons de cette définition intuitive.

Définition 8. Les objets formant un ensemble E sont appelés des *éléments* de l'ensemble. Si e est un élément de E alors on note $e \in E$.

Remarques.

1. Cette dernière phrase nécessite de s'appliquer dans l'écriture manuscrite pour ne pas confondre les trois symboles e , $\in$ et E .
2. Si f n'est pas un élément de E nous noterons : $f \notin E$.
3. Nous verrons plus tard des opérations ensemblistes, $\cap$ et $\cup$, qui permettent d'effectuer des calculs avec les objets que sont les ensembles.
4. Si nous allons ici rencontrer des ensembles particuliers, une présentation possible d'un ensemble consiste à énumérer ses éléments en les écrivant entre accolades.
5. Un ensemble peut être vu comme un sac rempli d'objets.
6. Un ensemble comportant un unique élément est appelé un *singleton*.

Exemples.

1. $\{a; 1; P\}$ est un ensemble contenant 3 éléments. Si on note E cet ensemble alors : $a \in E$, $1 \in E$ et $P \in E$ mais $2 \notin E$.
2. Une droite est un ensemble, infini de points.
3. Il y a des ensembles classiques de nombres qui sont omniprésents en mathématique. Voici une liste non exhaustive d'ensembles rencontrés au lycée : $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers (relatifs), $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Il existe d'autres ensembles de références que vous n'étudierez pas au lycée : $\mathbb{H}$ l'ensemble des quaternions, $\mathcal{C}^2([0; 1])$ l'ensemble des applications deux fois dérivables et à dérivées secondes continues, $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré deux à coefficients réels.
4. Pour $a \leq b$ des entiers, $\llbracket a, b \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers compris, au sens large, entre a et b . Cette notation est beaucoup utilisée en probabilité et en dénombrement.

Définition 9. On appelle *ensemble vide* et on note $\emptyset$ l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Intervalle.

Définition 10. On appelle *intervalle* de nombres un ensemble I de nombres réels sans trous : si $a < b$ sont des nombres appartenant à I alors tout nombre entre a et b est dans I .
Remarques.

1. Confer leçon sur les intervalles.

Exemples.

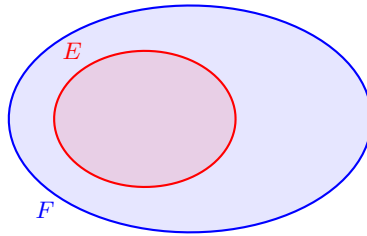
1. Les classes en statistique sont des intervalles.
2. Les intervalles permettent de préciser les marges d'erreurs dans les sciences expérimentales.

Inclusion.

Définition 11. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est *inclus dans* F , et on note $E \subset F$, si et seulement si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F . Autrement dit si et seulement si : $\forall e \in E, e \in F$.

Remarques.

1. Si $E \subset F$ nous dirons que E est un *sous-ensemble* de F , ou encore que E est une *partie* de F .
2. Une description, notation, définition très générale d'un ensemble consiste à de donner comme sous ensemble d'un autre ensemble en précisant la propriété commune aux éléments qu'il contient. Ainsi $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq \pi\}$ désigne un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ dont les éléments sont tous compris entre 1 et π au sens large et donc $E = \{1; 2; 3\}$.
3. La représentation géométrique d'un ensemble quelconque (un ensemble éventuellement sans ordre, rempli d'objets de natures différentes) est le *diagramme de Venn* aussi appelé, de façon imagée, diagrammes patates. Voici la façon de représenter l'inclusion $E \subset F$:



Exemples.

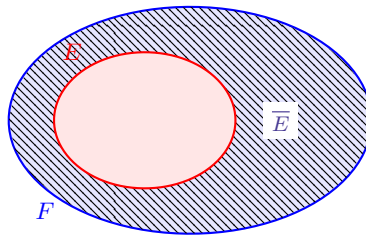
1. $\{1, a\} \subset \{3; 4; \pi, a, 1\}$ mais $\{1; 2\} \not\subset \{2; 3\}$ car $1 \in \{1; 2\}$ mais $1 \notin \{2; 3\}$.
2. $\llbracket 2, 13 \rrbracket$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

Ensemble complémentaire.

Définition 12. Soient E et F des ensembles. On appelle complémentaire de E dans F et on note $F \setminus E$ (ou $\overline{E}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des éléments de F qui ne sont pas dans E .

Remarques.

1. Nous avons une nouvelle opération entre ensembles $\setminus$ qui est appelée la différence ensembliste.
2. Le complémentaire d'un ensemble E est en lien avec la négation logique : il est formé des éléments qui ne sont pas dans E .
3. Voici la représentation géométrique du complémentaire avec un diagramme de Venn :

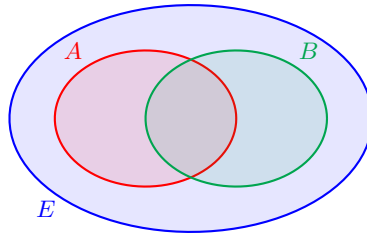


Exemples.

1. Le complémentaire de $E = \{3; 4\}$ dans $F = \llbracket 1, 5 \rrbracket$ est $F \setminus E = \{1; 2\}$.
2. Le complémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres irrationnels (ceux qui ne sont pas rationnels) et il est noté en tant que complémentaire : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. Le complémentaires de $E = \{3; 4; 8\}$ dans $F = \llbracket 1, 5 \rrbracket$ est $F \setminus E = \{1; 2\}$. il n'y a pas forcément inclusion de E dans F dans le cas le plus général.

Union d'ensembles.

Lorsque nous travaillerons avec plusieurs sous-ensembles, A et B d'un ensemble E , nous raisonnerons en nous appuyant sur le diagramme de Venn suivant :



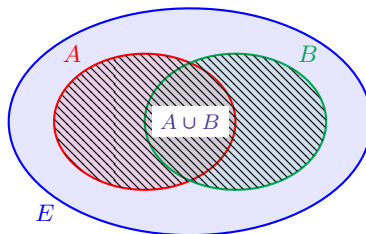
Définition 13. L'*union* de deux ensembles A et B est un ensemble qui contient tous les éléments de A ainsi que tous les éléments de B . Le nouvel ensemble obtenu en réunissant A et B est noté $A \cup B$ (qui se lit « A union B »).

Exemples.

1. Par exemple l'union de $\{1; -3; a\}$ et $\{-3; 2; b; 10^2; a\}$ est $\{1; -3; a\} \cup \{-3; 2; b; 10^2; a\} = \{1; -3; a; 2; b; 10^2\}$ (dans un ensemble chaque élément n'apparaît qu'une fois).
2. $(AB) \cup [AB) = (AB)$.

Remarques.

1. On peut formuler ainsi : $A \cup B$ est formé des éléments A ou de B . Le lien avec le connecteur logique « ou » est souvent utilisé pour définir l'union de deux ensembles : $A \cup B := \{x \mid (x \in A) \text{ ou } (x \in B)\}$.
2. Voici la représentation géométrique de l'union au moyen d'un diagramme de Venn :



Intersection d'ensembles

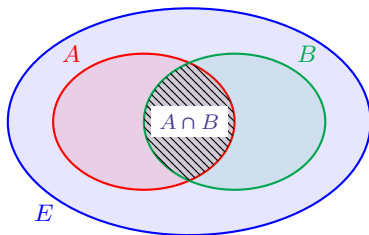
Définition 14. L'*intersection* de deux ensembles A et B est un ensemble qui contient tous les éléments communs à A et à B . Le nouvel ensemble obtenu par intersection de A et B est noté $A \cap B$ (qui se lit « A inter B »).

Exemples.

1. L'intersection de $\{1; -3; a\}$ et $\{-3; 2; b; 10^2; a\}$ est $\{1; -3; a\} \cap \{-3; 2; b; 10^2; a\} = \{1; -3; a; 2; b; 10\}$.
2. $(AB) \cap [AB] = [AB]$.

Remarques.

1. Comme pour l'union et le « ou » il y a un lien entre le $\cap$ et le « et » : $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \text{ et } (x \in B)\}$.
2. Voici la représentation géométrique de l'intersection avec un diagramme de Venn :



3. l'italien Giuseppe Peano (1858-1932) a longuement travaillé sur les entiers naturels. Dans son *Formulaire de mathématiques*, il utilise la lettre $\mathbf{N}$ pour désigner l'ensemble des nombres entiers naturels, la lettre $\mathbf{R}$ pour l'ensemble des nombres rationnels positifs et la lettre $\mathbf{Q}$ pour les nombres réels positifs (Q pour « quantités »)! Ces notations évolueront au cours du XX^e siècle. M. Peano est également à l'origine de l'utilisation des symboles $\cap$ (intersection), $\cup$ (union) et $\in$ (appartenance).

Produit cartésien de deux ensembles.

Nous appellerons *couple* des objets x et y et nous noterons (x, y) l'objet formé de x puis de y .

Remarques.

1. C'est une description intuitive des couples, la vraie définition étant formelle et sans intérêt pour nous.
2. Nous retiendrons que l'ordre compte dans un couple : $(x, y) \neq (y, x)$ à moins que x et y soient égaux.
3. Nous retiendrons également que : $(x, y) = (a, b)$ si et seulement si $x = a$ et $y = b$.

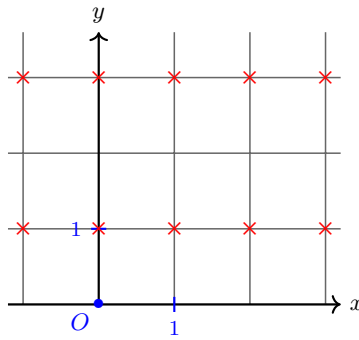
Définition 15. Soient A et B des ensembles. Nous appellerons *produit cartésien de A et de B* et nous noterons $A \times B$ l'ensemble formé des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.

Remarques.

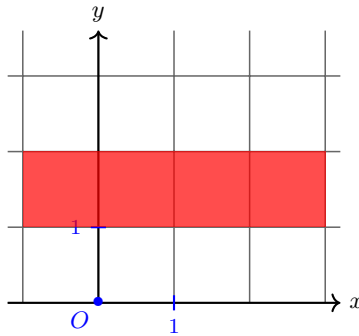
1. La représentation géométrique d'un produit cartésien de deux ensembles se fait avec les repères du plan usuels.

Exemples.

1. Si $A = \{1; 3\}$ et $B = \{-1; a; 2\}$ alors $A \times B = \{(1, -1), (1, a), (1, 2), (3, -1), (3, a), (3, 2)\}$. Nous avons $(1, 2) \in A \times B$ mais $(2, 1) \notin A \times B$.
2. Le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des coordonnées des points du plan. Au lieu d'écrire $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nous écrirons $\mathbb{R}^2$.
3. Une représentation géométrique du produit cartésien $[-1, 3] \times \{1, 3\}$ est



Voici celle du produit cartésien d'intervalles $[-1; 3] \times [1; 2]$:



Cardinal d'un ensemble.

Définition 16. Si un ensemble E est fini (s'il contient un nombre fini d'objets) alors le nombre d'objets qu'il contient et appelé son *cardinal* et on le note $|A|$ ou $\text{Card}(A)$.

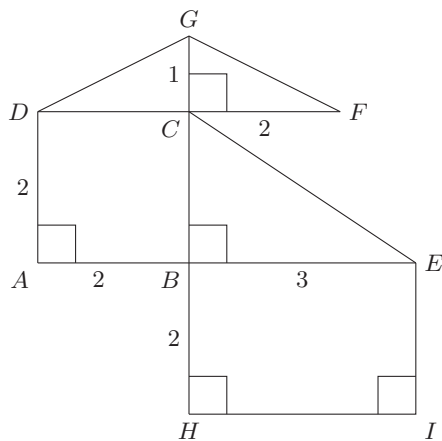
Exemples.

1. $|\emptyset| = 0$.
2. $\text{Card}(\{-2; 4\}) = 2$.
3. $\text{Card}([3, 12]) = 10$.
4. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des ensembles infinis et (pour l'instant) nous ne pouvons pas parler de leur cardinal.

Stabilité des ensembles.

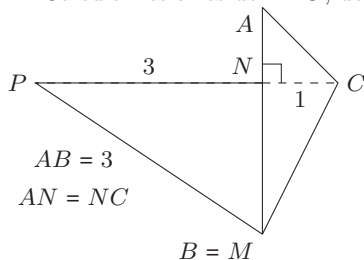
Exercices.

EXERCICE 236.

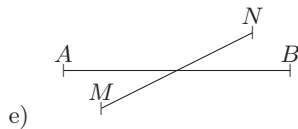
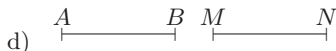
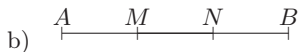
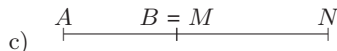
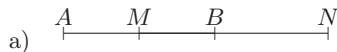


Calculez les aires délimitées par les polygones : $ABCD$, EBC , $EBHI$, DFG , $ABFC$, $DFIH$.

EXERCICE 237. Hachurez l'intersection et grisez l'union des triangles (surfaces) ABC et MNP . Calculez les aires de ABC , de MNP puis, si possible de leurs union et intersection.



EXERCICE 238. Dessinez en rouge l'union des segments $[AB]$ et $[MN]$ puis hachurez leur intersection.



EXERCICE 239. Simplifiez si possible l'écriture des ensembles suivants.

a) $[-3; 4] \cup [-1; 5]$.

b) $[2; 7] \cup [5; 13]$.

c) $] -1; 3] \cap]2; 4]$.

d) $] -3; 2] \cup [3; 5]$.

e) $] -13; 7] \cap [7; 17]$.

f) $] -12; -11[\cap [-11; -3]$.

g) $] -\infty; 5] \cap [3; 7]$.

h) $] -\infty; 0] \cup [0; +\infty[$.

EXERCICE 240. A l'aide de la calculatrice résolvez les inéquations.

a) $3x^2 + 6x \leq 9$.

b) $\frac{1}{x} \geq \sqrt{x+1}$.

EXERCICE 241. Notons R l'ensemble des rectangles et L celui des losanges. Qu'est-ce que $R \cap L$?

EXERCICE 242. Déterminez les intersections et unions des ensembles E et F dans les cas suivants.

- a) $E = \{1; 4; -1\}$ et $F = \{-6; 1; 4\}$.
 c) $E = [-2; 3]$ et $F = [1; 7]$.
 e) $E =]-\infty; 5]$ et $] - 6; +\infty[$.
 g) $E = [2; +\infty[$ et $F = [0; 2[$.
 i) $E = \{2; 3\}$ et $F = [1; 3[$.
 k) $E = [1; 4[$ et $F = \mathbb{Z}$.
 b) $E = \{1; 2\}$ et $F = \{3; 4\}$.
 d) $E =]-\infty; -3]$ et $F =] - 6; 2[$.
 f) $E =]2; 6]$ et $F = [3; 4]$.
 h) $E =]-\infty; 1]$ et $F = [1; 4[$.
 j) $E = \{0\}$ et $F =] - 1; 1[$.
 l) $E =]-\infty; 5[$ et $F = \mathbb{N}$.

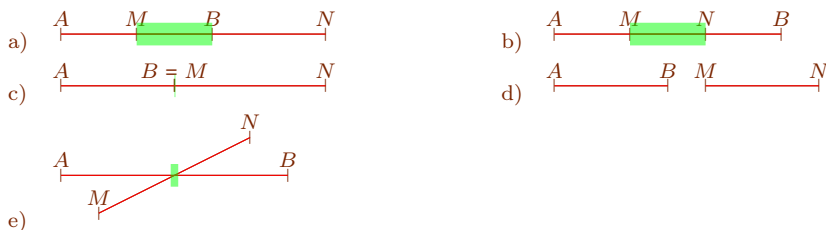
Des ensembles.

Corrections.

Exercice 236. $\mathcal{A}(ABCD) = 4$, $\mathcal{A}(EBC) = 3$, $\mathcal{A}(EBHI) = 6$, $\mathcal{A}(DFG) = 2$, $\mathcal{A}(ABFC) = 4$, $\mathcal{A}(DFIH) = 14$.

Exercice 237. $\mathcal{A}(ABC) = \frac{3}{2}$, $\mathcal{A}(MNP) = 3$.

Exercice 238.



Exercice 239.

- a) $[-3; 4] \cup] - 1; 5[= [-3; 5[$.
 b) $[2; 7] \cup [5; 13] = [2; 13]$.
 c) $] - 1; 3] \cap [2; 4] = [2; 4]$.
 d) $] - 3; 2] \cup [3; 5]$ pas de simplification.
 e) $] - 13; 7] \cap [7; 17] = \{7\}$.
 f) $] - 12; -11[\cap [- 11; -3[= \emptyset$.
 g) $] - \infty; 5] \cap [3; 7[[3; 5]$.
 h) $] - \infty; 0] \cup [0; +\infty[= \mathbb{R}$.

Exercice 240.

- a) $[-3; 1]$.
 b) $]0; 0,473]$.

Exercice 241. $R \cap L$ est l'ensemble des carrés.

Exercice 242.

- a) $\{1; 4; -1\} \cap \{-6; 1; 4\} = \{1; 4\}$ et $\{1; 4; -1\} \cup \{-6; 1; 4\} = \{1; 4; -1; -6\}$.
 b) $\{1; 2\} \cap \{3; 4\} = \emptyset$ et $\{1; 2\} \cup \{3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$.
 c) $[-2; 3] \cap [1; 7] = [1; 3]$ et $[-2; 3] \cup [1; 7] = [-2; 7]$.
 d) $] - \infty; -3] \cap] - 6; 2[=] - 3; -6]$ et $] - \infty; -3] \cup] - 6; 2[=] - \infty; 2[$.
 e) $] - \infty; 5] \cap] - 6; +\infty[=] - 6; 5]$ et $] - \infty; 5] \cup] - 6; +\infty[= \mathbb{R}$.
 f) $[2; 6] \cap [3; 4] = [3; 4]$ et $[2; 6] \cup [3; 4] = [2; 6]$.
 g) $[2; +\infty[\cap [0; 2[= \emptyset$ et $[2; +\infty[\cup [0; 2[= [0; +\infty[$.
 h) $] - \infty; 1] \cap [1; 4[= \{1\}$ et $] - \infty; 1] \cup [1; 4[=] - \infty; 4[$.
 i) $\{2; 3\} \cap [1; 3[= \{2\}$ et $\{2; 3\} \cup [1; 3[= [1; 3]$.
 j) $\{0\} \cap] - 1; 1[= \{0\}$ et $\{0\} \cap] - 1; 1[=] - 1; 1[$.
 k) $[1; 4[\cap \mathbb{Z} = \{1; 2; 3\}$ et pas de simplification d'écriture pour $[1; 4[\cup \mathbb{Z}$.
 l) $] - \infty; 5[\cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et pas de simplification d'écriture pour $] - \infty; 5[\cup \mathbb{N}$.

II Les entiers.

Dans cette partie nous parlons des ensembles d'entiers mais aussi des opérations sur ces ensembles ce qui est l'occasion de rappels.

Entiers naturels : $\mathbb{N}$.

Définition 17. Les *entiers naturels* sont les nombres qui servent à dénombrer, à compter. L'ensemble de tous les entiers naturels est : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Remarques.

1. $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, on dit *un minimum*, qui est 0.
- 2.



Leopold Kronecker
(XIX^{ième}) : « Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme. »

3. « Tout l'univers repose sur l'ensemble des entiers naturels » (Pythagore).
4. La notation $\mathbb{N}$ représente la première lettre de « naturel ».
5. En fait l'ensemble des nombres entiers naturels se construit logiquement.
6. Les entiers naturels sont donc des nombres positifs (ce qui signifie éventuellement 0). En anticipant sur les diverses écritures de nombres déjà rencontrées par les élèves nous pouvons dire que les entiers naturels sont des nombres positifs : dont une écriture décimale comporte une partie décimale nulle (écriture décimale) ou dont une écriture fractionnaire comporte 1 au dénominateur.
7. Parmi les mathématiciens qui ont marqué l'étude de l'ensemble des entiers naturels :



Giuseppe Peano.



Hermann Günther Grassmann.

8. L'écriture manuelle du $\mathbb{N}$ diffère un peu : AJOUTR photo

Exemples.

1. 4 est un entier naturel, ce que nous noterons : $4 \in \mathbb{N}$.
2. $-1, 0, 1, \frac{1}{3}, \sqrt{2}$ ne sont pas des nombres entiers naturels. Encore un conte-exemple : $\pi \notin \mathbb{N}$. Ainsi $\mathbb{N}$ ne contient pas tous les nombres il en manque énormément.

EXERCICE 243. Démontrez que $\frac{1}{7}$ n'est pas un entier naturel.

EXERCICE 244. Démontrez que $0,3$ n'est pas un entier naturel.

Définition 18. L'ensemble des entiers naturels est muni de deux opérations : l'*addition* notée $+$ et la *multiplication* notée $\times$. Le résultat d'une addition est appelé une *somme* et celui d'une multiplication un *produit*.

Remarques.

1. 0 est appelé le *neutre pour l'addition* car : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n + 0 = 0 + n = n$.
2. 0 est appelé le *neutre pour la multiplication* car : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \times 1 = 1 \times n = n$.
3. L'addition et la multiplication sont connues depuis les plus petites classes : tables pythagoriciennes des deux opérations pour les entiers naturels de 0 à 10. Rappelons qu'il est difficile de faire des mathématiques sans une bonne maîtrise de ces compétences élémentaires.
4. La soustraction et la division sont d'autres opérations bien connues pour modéliser respectivement un retrait et un partage équitable. Nous n'en parlons pas pour l'instant mais nous les introduirons ultérieurement d'une autre façon.
5. On dit que le zéro est absorbant : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \times 0 = 0 \times n = 0$.
6. L'addition et la multiplication, contrairement à la division et à la soustraction, sont commutatives : $n + m = m + n$ et $n \times m = m \times n$.
7. Les addition et multiplications sont des opérations internes à $\mathbb{N}$: une somme ou un produit d'entiers naturels est encore un entier naturel.

Entiers relatifs : $\mathbb{Z}$.

En essayant de résoudre l'équation $1 + x = 0$ d'inconnue x nous voyons que les entiers naturels sont insuffisants pour résoudre certains problèmes. On créa donc (une tâche qui fut fort longue) de nouveaux nombres dits négatifs.

Définition 19. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *opposé* de n , et on note $-n$, le nombre tel que $n + (-n) = 0$.

Remarques.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, par habitude historique et pour simplifier l'écriture des calculs, plutôt que d'écrire $n + (-m)$, nous écrirons $n - m$. Ainsi le résultat d'une soustraction, appelé traditionnellement *différence*, pourra aussi être nommé somme.
2. De $0 + (-0) = 0$ nous déduisons que $0 = -0$. 0 est son propre opposé. Nous retiendrons que 0 est à la fois positif et négatif.
3. Si vous avez pu écrire $+3$ pour désigner le nombre 3 lors de la découverte des nombres relatifs c'est une écriture qui n'a pas d'autre intérêt que pédagogique. Nous n'écrirons jamais $+(+3)$ ou $-(+3)$.

Proposition 19. Quel que soit l'entier n , positif ou négatif, $-(-n) = n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. $-n + n = n + (-n) = 0$ donc n est l'opposé de $-n$. Autrement dit $-(-n) = n$.

Remarques.

1. Ainsi le passage à l'opposé est une involution : l'opposé de l'opposé d'un nombre c'est ce nombre.
2. Ce résultat est intéressant pour simplifier les écritures et explique pourquoi vous ne verrez quasiment jamais écrit $-(-3)$. Si cela se produisait vous devriez simplifier.

Définition 20. Les *entiers (relatifs)* sont les entiers naturels et leurs opposés. L'ensemble de tous les entiers est : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

EXERCICE 245. L'affirmation : » Tous les nombres sont des entiers » est-elle vraie ou fausse ?

Remarques.

1. En général $\mathbb{Z}$ est appelé ensemble des entiers et non pas ensemble des entiers relatifs car il contient tous les entiers (quel que soit leurs signes).
2. Une *écriture décimale infinie* d'un entier ne comporte que des zéros dans la partie décimale. Ainsi : $3 = 3,000\dots$

3. On retrouve que les entiers sont des nombres admettant une écriture fractionnaire dont le dénominateur est 1.
4. Il existe des nombres qui ne sont pas des entiers. Par exemple $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier.
5. La notation $\mathbb{Z}$ (de l'allemand « zahlen » signifiant nombres) fut popularisée par Nicolas Bourbaki.

Des sous-ensembles de l'ensemble des entiers.

Définition 21. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq b$. On note $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble des entiers allant de a à b .

Exemples.

1. $\llbracket -2, 1 \rrbracket = \{-2; -1; 0; 1\}$.

Remarques.

1. On peut présenter un ensemble en disant le type d'objets qu'il contient puis la propriété commune vérifiée par tous les objets qu'il contient (le tout étant entre accolade) : $\llbracket a, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$.
2. De même on peut décrire nombre d'objets géométriques comme des lieux de points : dans le plan euclidien, la médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B .
3. C'est une notation apparue en probabilité et qui se retrouve dorénavant dans diverses branches.

Additionner des entiers relatifs.

Nous admettrons sans plus nous étendre la notion d'ordre sur l'ensemble des entiers. Notamment :

- les nombres positifs sont les nombres supérieurs (ou égaux) à 0.
- les nombres strictement positifs sont les nombres strictement supérieurs à 0.
- les nombres négatifs sont les nombres inférieurs (ou égaux) à 0.
- les nombres strictement négatifs sont les nombres strictement inférieurs à 0.

Ce lien qui peut sembler anodin entre signes et inégalités ($n \geq 0$ par exemple) porte de nombreux fruits.

On peut distinguer diverses situations (somme de nombres négatifs, somme d'un nombre négatif et d'un nombre positif, soustraction de deux nombres négatifs ou positifs) essayons de réduire toutes ces situations à quelques cas.

Définition 22. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On appelle *valeur absolue* de n l'entier, positif, noté $|n|$ qui est égale à n si n est positif et son opposé sinon.

Exemples.

1. Reprenons la définition pour $|-3|$. Donc dans ce cas $n = -3$ or n n'est pas positif donc $|-3|$ égale l'opposé de -3 : $|-3| = 3$.
2. De même on comprend vite que $|-10| = 10$, $|4| = 4$, $|0| = 0$, ...

Proposition 20. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. $-a + (-b) = -(a + b)$. Si $a \leq b$, alors $a + (-b) = -(b - a)$. Si $a \geq b$, alors $a + (-b) = a - b$.

Remarques.

1. La proposition ne parle pas du cas de la somme de deux entiers naturels qui est déjà connu. La proposition explique dans l'ordre, comment additionner deux nombres négatifs, puis un nombre positif et un nombre négatifs en distinguant selon que l'un ou l'autre a une plus grande valeur absolue.

2. Dorénavant il ne faut plus voir de soustraction mais l'addition d'un opposé : $a - b = a + (-b)$. Cette façon de voir est fondamentale pour les manipulations algébriques. Elle permet notamment la commutativité : $a - b = a + (-b) = -b + a$ et donc des simplifications.
3. Les méthodes souvent rencontrées au collège associant les additions de nombres relatifs à des translations sur la droite numérique restent pertinentes : $+2$ signifie se déplacer vers la droite de deux unités tandis que -3 signifie se déplacer vers la gauche de trois.
4. Une addition de deux nombres relatifs est du signe de celui qui a la plus grande valeur absolue.

Exemples.

1. $-2 + (-6) = -(2 + 6) = -8$.
2. $-7 - 28 = -7 + (-28) = -(7 + 28) = -35$.
3. Comme $2 \leq 5$, $2 + (-5) = -(5 - 2) = -3$.
4. $4 - 13 = 4 + (-13)$. Comme $4 \leq 13$, $4 + (-13) = -(13 - 4)$.
5. $16 + (-5) = 16 - 5 = 11$.
6. $-5 + 8 = 8 + (-5) = 8 - 5 = 3$.

EXERCICE 246. Évaluez les sommes suivantes :

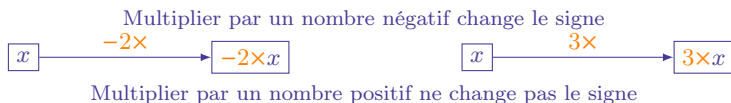
- | | | | | |
|--------------------|--------------------|------------------|--------------------|-------------------|
| a) $13 - 5$. | b) $-13 + (-11)$. | c) $17 + (-6)$. | d) $28 + (-35)$. | e) $-12 + 24$ |
| f) $-11 + 2$. | g) $-3 + 2$. | h) $-8 - 7$. | i) $-(-3) + 4$. | j) $14 - 25$. |
| k) $-4 + 12$. | l) $-4 + (-11)$. | m) $13 - 5$. | n) $-37 + (-24)$. | o) $39 + (-12)$. |
| p) $34 + (-47)$. | q) $-39 + 102$ | r) $-77 + 23$. | s) $-19 + 5$. | t) $-26 - 67$. |
| u) $-(-45) + 54$. | v) $12 - 36$. | w) $-8 + 23$. | x) $-8 + (-234)$. | |

Signe d'un produit.

Proposition 21. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. $(-a) \times b = -(a \times b) = -a \times b$, $a \times (-b) = -(a \times b)$ et $-a \times (-b) = a \times b$.

Remarques.

1. Le produit de deux nombres de même signe est positif.
Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.
2. Il est également possible de se représenter les choses comme suit.



Exemples.

1. $-2 \times (-7) = 14$.
2. $3 \times (-5) = -(3 \times 5) = -15$

EXERCICE 247. Évaluer les produits suivants

- | | | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $5 \times (-7)$. | b) -8×3 . | c) $(-9) \times (-4)$. | d) $-(-5) \times 8$. | e) -8×9 . |
| f) $-5 \times (-11)$. | g) $(-6) \times (-8)$. | h) -3×14 . | i) $4 \times (-11)$. | j) $-6 \times (-7)$. |

Priorités opératoires.

Les règles de priorités, pour l'instant, se limitent à :

Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires.

Priorité 2 Les multiplications en allant de gauche à droite.

Priorité 3 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

EXERCICE 248. Évaluez les quantités suivantes :

a) $A = 4 \times (-1)$.

b) $B = -1 \times (-1)$.

c) $C = 3 \times [-2(3 - 5)]$.

d) $D = (3 - 5 \times (-2))(-1 + (-4) \times 2)$.

Nommer le résultat d'un calcul.

Nous avons dit un peu plus haut qu'un calcul est une **somme** (respectivement une **différence**, respectivement un **produit**) si la dernière opération effectuée en respectant les priorités opératoires est une addition (respectivement une soustraction, respectivement une multiplication).

À moins de devoir distinguer somme et différence, les résultats d'une addition et d'une soustraction seront très souvent indifféremment appelés des sommes.

Exemples.

1. $(-3+5) \times 8 = 2 \times 8 = 16$. La dernière opération effectuée est un produit donc $(-3+5) \times 8$ est un produit.
2. $3 \times (2+1) - 3 = 3 \times 3 - 3 = 9 - 3 = 6$. La dernière opération effectuée est une soustraction donc $3 \times (2+1) - 3$ est une somme (les différences seront le plus souvent confondues avec les sommes).
3. $2 \times (-2) + 4 \times (3-1)$ et $3 - (4-2) \times (5-2)$ sont des sommes.
4. $(3-1) \times (-6-1)$ est un produit.

EXERCICE 249. Indiquez si les calculs suivants sont des sommes ou des produits et effectuez les calculs à la main.

a) $A = 5 + 2 - 5 \times 3$.

b) $B = (3 + 2) \times 5$.

c) $C = (3+2)+(2-5)(3+1)$.

d) $D = (2 + 5)(1 - 3)$.

Exercices.

EXERCICE 250. Sans calculatrice, évaluez les quantités suivantes en détaillant si besoin est puis précisez la nature du calcul (somme ou produit).

a) $4 \times (-7)$.

b) $-3 \times (-4)$.

c) $2 \times [-3(5 - 7)]$.

d) $-13 + (-5)$.

e) $-12 - 7$.

EXERCICE 251. Calculez en ligne en détaillant puis déduisez-en la nature du calcul (somme ou produit).

a) $A = -2 \times (-4 + 2) - [3 - 2 \times (5 - 3)]$.

b) $B = -3 \times 2 - 4 + 3 - 7 + 8$.

c) $C = [(-5 + 7) + 6] - 5$.

d) $D = [(3 - 2) \times (4 - 1)](5 - 7)$.

e) $E = -3 \times (-2) \times (-1) \times 4$.

f) $F = -4 \times (2 - 5) \times (3 + 1)$.

EXERCICE 252. Recopiez et complétez les phrases

a) L'ensemble $\{0; 1; 2; \dots\}$ est appelé l'ensemble et est noté

b) L'ensemble $\{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$ est appelé l'ensemble et est noté

EXERCICE 253. Recopiez en complétant par $\in$ ou $\notin$.

- | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| a) $2,1 \dots \mathbb{Z}$. | b) $10^3 \dots \mathbb{Z}$. | c) $-4 \dots \mathbb{Z}$. | d) $-17 \dots \mathbb{N}$. |
| e) $\frac{1}{3} \dots \mathbb{Z}$. | f) $\frac{12}{3} \dots \mathbb{N}$. | g) $3 - 4 \dots \mathbb{N}$. | h) $0 \dots \mathbb{Z}$. |

EXERCICE 254. Dites s'il s'agit d'une somme, ou d'un produit puis calculez en ligne en détaillant l'expression $F = -3 \times (2 - 1) - [2 - 2 \times (4 - 2)]$.

Corrections.

Exercice 243. $\frac{1}{7}$ est strictement positif donc $\frac{1}{7} > 0$. De plus son numérateur est plus petit que son dénominateur et tout deux sont positifs donc $\frac{1}{7} < 1$. Ainsi $0 < \frac{1}{7} < 1$. $\frac{1}{7}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs : $\frac{1}{7} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 244. $0,3 = \frac{3}{10}$ et $0 < \frac{3}{10} < 1$ donc $0,3 \notin \mathbb{N}$.

Exercice 245. « Tous les nombres sont des entiers » est une phrase fausse puisque par exemple $\frac{1}{3}$ n'est pas un entier.

Exercice 246.

- | | |
|--|--|
| a) $13 - 5 = 8$. | b) $-13 + (-11) = -(13 + 11) = -24$. |
| c) $17 + (-6) = 17 - 6 = 11$. | d) $28 + (-35) = -(35 - 28) = -7$. |
| e) $-12 + 24 = 24 - 12 = 12$. | f) $-11 + 2 = 2 + (-11) = -(11 - 2) = -9$. |
| g) $-3 + 2 = 2 + (-3) = -(3 - 2) = -1$. | h) $-8 - 7 = -(8 + 7) = -15$. |
| i) $-(-3) + 4 = 3 + 4 = 7$. | j) $14 - 25 = 14 + (-25) = -(25 - 14) = -11$. |
| k) $-4 + 12 = 12 + (-4) = 12 - 4 = 8$. | l) $-4 + (-11) = -(4 + 11) = -15$. |
| m) $13 - 5 = 13 + (-5) = 8$. | n) $-37 + (-24) = -(37 + 24) = -61$. |
| o) $39 + (-12) = 39 - 12 = 27$. | p) $34 + (-47) = -(47 - 34) = -13$. |
| q) $-39 + 102 = 102 + (-39) = 102 - 39 = 63$. | r) $-77 + 23 = 23 + (-77) = -(77 - 23) = -54$. |
| s) $-19 + 5 = 5 + (-19) = -(19 - 5) = -14$. | t) $-26 - 67 = -26 + (-67) = -(26 + 67) = -93$. |
| u) $-(-45) + 54 = 45 + 54 = 99$. | v) $12 - 36 = 12 + (-36) = -(36 - 12) = -24$. |
| w) $-8 + 23 = 23 + (-8) = 23 - 8 = 15$. | x) $-8 + (-234) = -(8 + 234) = -242$. |

Exercice 247.

- | | | |
|---|---------------------------|--|
| a) $5 \times (-7) = -5 \times 7 = -35$. | b) $-8 \times 3 = -24$. | c) $(-9) \times (-4) = 4 \times 9 = 36$. |
| d) $-(-5) \times 8 = 5 \times 8 = 40$. | e) $-8 \times 9 = -72$. | f) $-5 \times (-11) = 5 \times 11 = 55$. |
| g) $(-6) \times (-8) = 6 \times 8 = 48$. | h) $-3 \times 14 = -42$. | i) $4 \times (-11) = -4 \times 11 = -44$. |
| j) $-6 \times (-7) = 6 \times 7 = 42$. | | |

Exercice 248.

- | | | | |
|-------------|------------|-------------|---------------|
| a) $A = -4$ | b) $B = 1$ | c) $C = 12$ | d) $D = -117$ |
|-------------|------------|-------------|---------------|

Exercice 249.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a) Calculons A . | b) Calculons B . |
|--------------------|--------------------|

$$\begin{aligned}
 A &= 5 + 2 - 5 \times 3 \\
 &= 5 + 2 - 15 \\
 &= 7 - 15 \\
 &= -8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= (3 + 2) \times 5 \\
 &= 5 \times 5 \\
 &= 25
 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une somme.

Il s'agit d'un produit.

c) Calculons C .

$$\begin{aligned}C &= (3 + 2) + (2 - 5)(3 + 1) \\&= 5 + (-3) \times 4 \\&= 5 + (-12) \\&= -7\end{aligned}$$

Il s'agit d'une somme.

d) Calculons D .

$$\begin{aligned}D &= (2 + 5)(1 - 3) \\&= 7 \times (-2)\end{aligned}$$

Il s'agit d'un produit.

Exercice 250.

- a) $4 \times (-7) = -4 \times 7 = -28$ produit.
- b) $-3 \times (-4) = 3 \times 4 = 12$ produit.
- c) $2 \times [-3(5 - 7)] = 2 \times [-3 \times (-2)] = 2 \times (3 \times 2) = 2 \times 6 = 12$ produit.
- d) $-13 + (-5) = -(13 + 5) = -28$ somme.
- e) $-12 - 7 = -12 + (-7) = -(12 + 7) = -29$ somme.

Exercice 251.

- a) $A = -2 \times (-2) - [3 - 2 \times 2] = 4 - [3 - 4] = 4 - [-1] = 5.$
- b) $B = -6 - 4 - 3 - 7 + 8 = -12.$
- c) $C = [2 + 6] - 5 = 8 - 5 = 3.$
- d) $D = [1 \times 3] \times (-2) = 3 \times (-2) = -6.$
- e) $E = 6 \times (-1) \times 4 = -6 \times 4 = -24.$
- f) $F = -4 \times (-3) \times 4 = 12 \times 4 = 48.$

Exercice 252.

- a) L'ensemble $\{0; 1; 2; \dots\}$ est appelé l'ensemble des entiers naturels et est noté $\mathbb{N}$.
- b) L'ensemble $\{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$ est appelé l'ensemble des entiers et est noté $\mathbb{Z}$.

Exercice 253.

- a) $2,1 \notin \mathbb{Z}.$
- b) $10^3 \in \mathbb{Z}.$
- c) $-4 \in \mathbb{Z}.$
- d) $-17 \notin \mathbb{N}.$
- e) $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}.$
- f) $\frac{12}{3} \in \mathbb{N}.$
- g) $3 - 4 \notin \mathbb{N}.$
- h) $0 \in \mathbb{Z}.$

Exercice 254. $F = -3 \times (2 - 1) - [2 - 2 \times (4 - 2)] = -3 \times 1 - [2 - 2 \times 2] = -3 - (2 - 4) = -3 - (-2) = -3 + 2 = -(3 - 2) = -1.$ Il s'agit d'une somme.

III Les rationnels.

Dans cette partie nous parlons de l'ensemble des nombres rationnels mais aussi des opérations sur ces ensembles ce qui est l'occasion de rappels.

Les fractions.

Définition 23. Une *fraction* est un nombre qui peut s'écrire comme le quotient d'un entier (relatif) par un autre entier (relatif non nul). Autrement dit si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ alors $\frac{a}{b}$ est un nombre appelé fraction.

Remarques.

1. Au lycée et ultérieurement seule la notation fractionnaire est utilisée pour la division. L'obélus ($\div$) n'étant plus utilisé que pour les quotients de fractions.
2. Lorsqu'un nombre, dans son écriture décimale, n'a que des zéros à partir d'un certain nombre de décimales alors on dit que c'est un *nombre décimal*. Ainsi : $2\,315,895\,643 = 2\,315,895\,643\,000\dots$ est un nombre décimal.

Tous les nombres décimaux peuvent s'écrire sous forme de fraction : $2\,315,895\,643 = \frac{2\,315\,895\,643}{1\,000\,000}$.

3. Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions : l'irrationalité de π est admise mais celle de $\sqrt{2}$ sera démontrée dans une prochaine leçon.
4. Rappelons une règle de priorité opératoire : dans une écriture fractionnaire la division correspondant à la barre de fraction est la dernière opération effectuée.
5. La manipulation des fractions nécessite de connaître les règles d'addition (réduire au même dénominateur), $\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay+xb}{by}$, de multiplication, $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$ et de division $\frac{\frac{a}{x}}{\frac{y}{x}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}$. Rappelons encore que pour simplifier une fraction il faut qu'il y ait un facteur commun au numérateur et au dénominateur : $\frac{a \cdot x}{b \cdot x} = \frac{a}{b}$.
6. Une astuce d'écriture qui nous sera souvent utile $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$.
7. Rappelons enfin qu'il est impossible de diviser par 0.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un nombre q tel que $\frac{3}{0} = q$ (nous supposons que l'on peut diviser 3 par 0). Donc $3 = 0 \times q$. Ce qui est impossible car $0 \times q = 0$ (0 est une valeur absorbante). Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il est impossible de diviser 3 par 0.

8. Les règles de priorités pour l'instant se limitent à :

Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction joue le même rôle que des parenthèses autour des numérateurs et dénominateurs.

Priorité 2 Les multiplications et division ($\div$) en allant de gauche à droite.

Priorité 3 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

Les nombres rationnels.

Définition 24. L'ensemble des *nombres rationnels*, qu'on note $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'une fraction.

Remarques.

1. Un entier est un nombre rationnel. Par exemple : $-13 = \frac{-13}{1}$.
2. Les nombres décimaux peuvent s'écrire comme des fractions donc ce sont des nombres rationnels. Ainsi : $0,1 = \frac{1}{10}$.
3. Il existe des nombres qui ne sont pas décimaux et qui sont rationnels. Ainsi $\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel mais son décimale infinie ne comporte pas uniquement des 0 ni uniquement des 9 à partir d'un certain rang donc ce n'est un nombre décimal.

4. Tous les nombres ne sont pas rationnels.
5. Lorsqu'un nombre rationnel a une écriture décimale infinie on préfère son écriture fractionnaire.
6. Un nombre rationnel admet une écriture fractionnaire canonique (unique) appelée la *forme irréductible* qui est obtenue lorsque le PGCD des numérateur et dénominateur est 1 (ils n'ont pas de facteur commun). *confer infra*.

Proposition 22. Lorsqu'un nombre a une écriture décimale infinie périodique c'est un nombre rationnel.

Remarques.

1. Ce résultat est admis.
2. On dit que l'écriture est périodique lorsqu'une série de chiffre se reproduit indéfiniment.

Exemples.

1. $0,333\dots$ est rationnel.
2. $45,78242424\dots$ est rationnel.

Forme irréductible d'une fraction.

Un entier naturel est dit *premier* si et seulement il a exactement deux diviseurs distincts positifs.

Exemples.

1. 12 n'est pas un nombre premier puisqu'il est divisible par 2 et 3.
2. Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
3. 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

Théorème 3. - théorème fondamental de l'arithmétique Tout entier naturel supérieur ou égale à 2 admet une décomposition en facteurs premiers unique à l'ordre des facteurs près.

Exemples.

1. $12 = 2 \times 2 \times 3$ et 2 et 3 sont bien des nombres premiers.
2. $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.
3. $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$.

Remarques.

1. Pour que l'écriture de la décomposition soit unique la convention est d'écrire une seule fois chaque facteur premier à la puissance convenable et d'écrire les facteurs dans l'ordre croissant. On n'écrit pas $3 \times 2 \times 3$ mais 2×3^2 .
2. D'après ce théorème tous les résultats sur les nombres entiers naturels peuvent se ramener à des résultats sur les nombres premiers.

EXERCICE 255. Déterminez la décomposition en facteurs premiers de 180.

Le nombre $\frac{1}{2}$ peut encore s'écrire $\frac{2}{4}$. L'écriture fractionnaire d'un nombre n'est pas unique. Ceci pouvant produire de la confusion les mathématiciens ont retenu une écriture fractionnaire qui est unique : *la forme irréductible d'une fraction*.

Proposition 23. Tout nombre rationnel s'écrit de façon unique comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur non pas d'autre commun diviseur que 1 (ou -1).

Exemples.

1. $\frac{1}{3}$ est une forme irréductible.
2. $\frac{14}{21}$ n'est pas une forme irréductible puisque 14 et 21 admettent 7 pour diviseur commun : $\frac{14}{21} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{2}{3}$.
3. En toute rigueur la forme irréductible de l'entier 5 devrait s'écrire $\frac{5}{1}$ cependant l'usage veut que nous usions de l'écriture la plus simple : 5.

Remarques.

1. Des nombres entiers qui n'ont pas de diviseur commun autre que 1 ou -1 sont dits *premiers entre eux*.
2. Pour trouver la forme irréductible d'une fraction il faut rechercher le plus grand facteur commun au numérateur et au dénominateur qu'on appelle le P.G.C.D. (plus grand commun diviseur). Le P.G.C.D. s'obtient grâce à l'algorithme d'Euclide.
3. Dans la pratique pour trouver la forme irréductible nous utiliserons des décompositions en facteurs premiers.

EXERCICE 256. Donnez la forme irréductible du nombre rationnel $\frac{120}{300}$.

Exercices.

EXERCICE 257. Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$\text{a) } \frac{1}{3} + \frac{2}{7}, \quad \text{b) } \frac{1}{7} - \frac{4}{11}, \quad \text{c) } C = \frac{-5}{3} + \frac{2}{7}, \quad \text{d) } D = \frac{3}{-7} - \frac{-2}{3}.$$

EXERCICE 258. Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } -\frac{-4}{7-3}, & \text{b) } \frac{2}{3} \times \frac{6}{7}, & \text{c) } \frac{-2}{4} \times \left(-\frac{3}{-6}\right), & \text{d) } \frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{7}}. \\ \text{e) } \frac{3}{\frac{5}{4}}, & \text{f) } \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{7}} \times \frac{1}{2}. \end{array}$$

EXERCICE 259. Calculez et donnez le résultat sous forme de fraction irréductible.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{-3}{2} + \frac{1}{5}, & \text{b) } \frac{2}{6} \times \frac{3}{\frac{7}{17}}, & \text{c) } \frac{35}{49} + \frac{56}{35}. \\ \text{d) } \frac{256}{48} \times \frac{245}{650}, & \text{e) } \frac{\frac{4}{6} + \frac{3}{3}}{38} + \frac{9}{13}. \end{array}$$

Corrections.

Exercice 255. *Pour cette question nous pouvons nous contenter d'exhiber la réponse. Regardons le travail à faire au brouillon.*

Nous divisons autant de fois que possible par les nombres premiers en allant du plus petit au plus grand.

Étape 1 • 180 est divisible par 2 donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ \hline 90 & \end{array}$$

Étape 2 • 90 est divisible par 2 donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ \hline 90 & 2 \\ \hline 45 & \end{array}$$

Étape 3 • 45 n'est pas divisible par 2, nous essayons donc avec le nombre premier suivant 3. 45 est bien divisible par 3 puisque $4 + 5 = 9$ donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ \hline 90 & 2 \\ \hline 45 & 3 \\ \hline 15 & \end{array}$$

En procédant ainsi de proche en proche nous obtenons finalement

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi : $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

Finalement nous écrirons uniquement

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

Exercice 256. $\frac{120}{300} = \frac{2}{5}$.

Exercice 257. Nous pouvons vérifier les résultats à la calculatrice.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{7} &= \frac{1 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{7}{21} + \frac{6}{21} = \frac{13}{21}. \\ \text{b)} \quad \frac{1}{7} - \frac{11}{4} &= \frac{1 \times 11}{7 \times 11} - \frac{11 \times 7}{11 \times 7} = \frac{11}{77} - \frac{28}{77} = -\frac{17}{77}. \\ \text{c)} \quad C &= \frac{-5}{3} + \frac{2}{7} = \frac{-5 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{-35}{21} + \frac{6}{21} = \frac{-29}{21}. \\ \text{d)} \quad \frac{3}{-7} - \frac{-2}{3} &= \frac{3 \times 3}{-7 \times 3} - \frac{-2 \times (-7)}{3 \times (-7)} = \frac{9}{-27} - \frac{14}{-27} = \frac{-5}{-27} = \frac{5}{27}. \end{aligned}$$

Exercice 258.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad -\frac{-4}{7-3} &= -\frac{-4}{4} = -(-1) = 1. \\ \text{b)} \quad \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} &= \frac{2 \times 6}{3 \times 7} = \frac{12}{21} = \frac{3 \times 2 \times 2}{3 \times 7} = \frac{4}{7}. \\ \text{c)} \quad \frac{-2}{4} \times \left(-\frac{3}{-6}\right) &= \frac{-2}{4} \times \frac{-3}{-6} = \frac{-2 \times (-3)}{4 \times (-6)} = \frac{6}{-24} = -\frac{6}{24} = -\frac{6 \times 1}{6 \times 2 \times 2} = -\frac{1}{4}. \\ \text{d)} \quad \frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{6}} &= \frac{4}{5} \times \frac{7}{6} = \frac{4 \times 7}{5 \times 6} = \frac{28}{30} = \frac{2 \times 2 \times 7}{2 \times 3 \times 5} = \frac{14}{15}. \\ \text{e)} \quad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} &= \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \times 2 \times 2}{5} = \frac{12}{5}. \\ \text{f)} \quad \frac{\frac{2}{1} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{7}} \times \frac{1}{2} &= \frac{\frac{1 \times 3}{2 \times 5}}{\frac{1}{7}} \times \frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{7}} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \times \frac{7}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 7 \times 1}{10 \times 1 \times 2} = \frac{3 \times 7}{2 \times 2 \times 5} = \frac{21}{20}. \end{aligned}$$

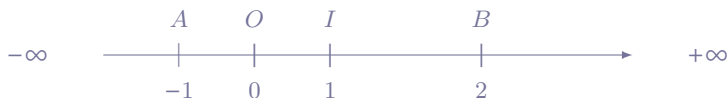
Exercice 259.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{-3}{2} + \frac{1}{5} &= -\frac{13}{10}. & \text{b)} \quad \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} &= \frac{1}{7}. & \text{c)} \quad \frac{35}{49} + \frac{56}{35} &= \frac{71}{35}. & \text{d)} \quad \frac{256}{48} \times \frac{245}{650} &= \frac{2^5 \times 5 \times 13}{3 \times 7^2}. \\ \text{e)} \quad \frac{\frac{4}{6} + \frac{17}{3}}{38} + \frac{9}{13} &= \frac{67}{78}. \end{aligned}$$

IV Intervalles.

De la géométrie à l'analyse.

L'ensemble de tous les nombres est noté $\mathbb{R}$. On le représente géométriquement par un axe appelé *droite numérique* :



Tout point de la droite est associé à un nombre et tout nombre est associé à un point de la droite. Le point A est associé au nombre -1 et le nombre 2 est associé au point B .

Les points O et I jouent un rôle particulier : ils indiquent la longueur 1 et le sens croissant sur la droite. On dit que (O, I) est un *repère* de la droite numérique. Le nombre associé à un point est appelé son *abscisse*.

Aux segments et demi-droites contenus dans la droite numérique on associe des ensembles de nombres appelés *intervalles*.

Soit M un point de la droite numérique d'abscisse x ce qui sera noté $M(x)$.



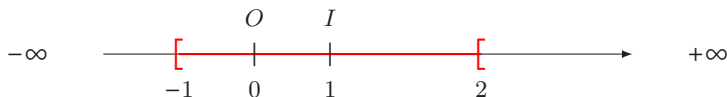
- Si $M \in [AB]$ alors $-1 \leq x \leq 2$ et nous écrirons $x \in [-1; 2]$. $[-1; 2]$ est appelé "l'intervalle fermé en -1 et fermé en 2 ".
- Si $M \in (AB]$ alors $x \leq 2$ et nous écrirons $x \in]-\infty, 2]$. $]-\infty, 2]$ est appelé "l'intervalle moins l'infini, fermé en 2 ".
- Si $M \in [AB]$ mais que M n'est pas A alors $-1 < x \leq 2$ et nous écrirons $x \in]-1; 2]$. $] -1; 2]$ est appelé "l'intervalle ouvert en -1 et fermé en 2 ".

Remarques.

1. Les anglo-saxons ont une notation encore plus proche de la notation géométrique puisqu'ils écrivent $(-\infty, 4]$ (on reconnaît la notation de la demi-droite). Moins cohérent $(4, 6]$ est noté en français $]4; 6]$.

EXERCICE 260. Tracez une droite numérique en plaçant les points suivants d'après leurs abscisses : $O(0)$, $I(1)$, $A(-6)$, $B(2)$, $C(-1)$, $D(1,5)$, $E(-\frac{1}{2})$, $F(2^2)$, $G((-2)^2)$, $J(\sqrt{9})$, $K(\frac{1}{3})$ et $L(-5 + \sqrt{7})$.

EXERCICE 261. À chaque fois tracez la droite numérique en choisissant OI égale à 1 carreau puis dessinez l'intervalle proposé. Exemple : $[-1, 3[$ se représente par



$I_1 = [-3; 0]$. $I_2 = [2, 4]$. $I_3 =]-2; 1]$. $I_4 = [2, +\infty[$. $I_5 =]-\infty, -1]$. $I_6 = [-\frac{1}{3}, 4[$. $I_7 =]-4; 3[$. $I_8 =]\sqrt{2}, +\infty[$. $I_9 =]-\infty, -4[$.

EXERCICE 262. À chaque fois tracez la droite numérique en choisissant OI égale à 1 carreau puis dessinez l'intervalle proposé.

- I_1 : "L'intervalle ouvert en -1 , fermé en 0 ".
- I_2 : "L'intervalle fermé en -2 et en 3 ".
- I_3 : "L'intervalle fermé en -4 , $+\infty$ ".
- I_4 : "L'intervalle ouvert en 4 , $+\infty$ ".
- I_5 : "L'intervalle $-\infty$, fermé en 3 ".
- I_6 : "L'intervalle fermé en -4 et ouvert en 2 ".
- I_7 : "L'intervalle fermé en -4 , $+\infty$ ".
- I_8 : "L'intervalle $-\infty$, ouvert en 3 ".
- I_9 : "L'intervalle fermé en -4 , ouvert en -1 ".

EXERCICE 263. Dites à chaque fois si le nombre a appartient à l'intervalle I ou pas.

- | | |
|--|---|
| a) $a = -1$ et $I =]-\infty, -2]$. | b) $a = \pi$ et $I = [3,05 : 3,8]$. |
| c) $a = -3$ et $I = [-3,245; +\infty[$. | d) $a = \frac{1}{3}$ et $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$. |
| e) $a = 10^3$ et $]1000; +\infty[$. | f) $a = -\frac{1}{4}$ et $I = \left]-\frac{1}{3}; 0\right]$. |
| g) $a = -2$ et $I = [-4; -2[$. | |

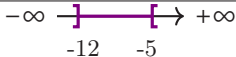
EXERCICE 264. Traduisez la ou les inégalités par une appartenance. Exemple : $1 < x$ équivaut à $x \in]1, +\infty[$.

- | | | | |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $-6 > x$. | b) $12 \leq x \leq 100$. | c) $-3 < x \leq 11$. | d) $-11 \leq x < -1$. |
| e) $8 > x > \frac{1}{2}$. | f) $4 \leq x$. | g) $x \geq 10^{-3}$. | h) $-\pi < x$. |

EXERCICE 265. Écrivez les conditions suivantes à l'aide d'inégalités portant sur x .

- | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| a) $x \in]-2; 5]$. | b) $x \in [3; 7]$. | c) $x \in [-6, -4[$. | d) $x \in]-7; 0[$. |
| e) $x \in [4, +\infty[$. | f) $x \in]-3, +\infty[$. | g) $x \in]-\infty, 0[$. | h) $x \in]-\infty; -3]$. |
| i) $x \in]-\infty, 3] \cup]5; 7]$. | | | |

EXERCICE 266. Recopiez le tableau, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$[-2; 13]$		$-2 \leq x \leq 13$	Intervalle fermé en -2 et en 13 .
$[4 ; 8[$	...	...	...
		...	...
...	...	$\pi \leq x < 8$	...
...	...	...	Intervalle ouvert en -6 et fermé en 2 .

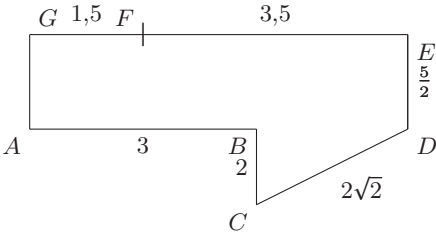
EXERCICE 267. Recopiez le tableau, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$[-2, +\infty[$		$-2 \leq x$	Intervalle fermé en -2 , plus l'infini.
$] -\infty; 8[$	...	...	...
		...	...
...	...	$x < \pi$	...
...	...	...	Intervalle moins l'infini, ouvert en -6 .

EXERCICE 268. Complétez le tableau ci-dessous (les schémas ne doivent pas être à l'échelle).

Notation	Schéma	Inéquation(s)	Description
$] -2 ; +\infty[$			
		$-3 < x \leq 4$	
			Intervalle ouvert en -5 et fermé en 7 .

EXERCICE 269. On considère la figure ci-dessous.



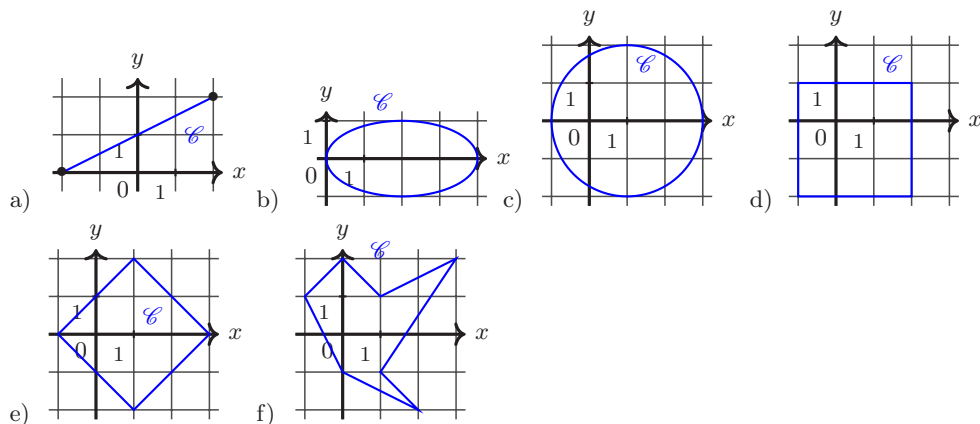
Complétez les assertions par un intervalle.

- a) Si $M \in [AB]$ alors $AM \in \dots$
c) Si $M \in [CD]$ alors $CM \in \dots$
e) Si $M \in [GF]$ alors $EM \in \dots$
- b) Si $M \in [BC]$ alors $BM \in \dots$
d) Si $M \in [DE]$ alors $EM \in \dots$
f) Si $M \in [EF]$ alors $AB + BC + CD + DE + EM \in \dots$

EXERCICE 270. Donnez l'ensemble des solutions des inéquations.

- a) $x < -1$.
e) $10^3 > x$.
- b) $3 \geq x$.
f) $x \leq 2,14$.
- c) $\frac{1}{2} \leq x$.
g) $x > \sqrt{\pi}$.
- d) $-\sqrt{2} < x$.
h) $x \geq -2,1$.

EXERCICE 271. Par lecture graphique dites à quels intervalles appartiennent les abscisses et ordonnées d'un point $M(x,y)$ appartenant à la courbe $\mathcal{C}$.



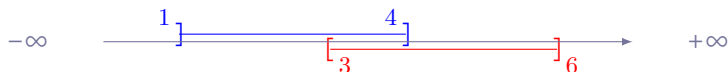
EXERCICE 272. Coloriez l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que

- | | |
|---|--|
| a) $0 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq 2$. | b) $-2 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq x \leq 2$. |
| c) $x \in [-1,1]$ et $y \in [-2,1]$. | d) $x \in [-3, -2]$ et $y \in [-1,0]$. |
| e) $2x \in [4,6]$ et $3y \in [-3,9]$. | f) $x + 5 \in [3,7]$ et $2y - 6 \in [-2; 2]$. |

Réunion et intersection d'intervalles.

Pour déterminer union ou intersection d'intervalles nous nous appuyerons sur une schéma avec la droite numérique.

Par exemple pour les intervalles $]1; 4]$ et $[3; 6]$:



Du schéma nous déduisons : $]1; 4] \cap [3; 6] = [3; 4]$ et $]1; 4] \cup [3; 6] =]1; 6]$.

EXERCICE 273. Simplifiez si possible l'écriture des ensembles suivants.

- | | | | |
|--------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|---|
| a) $[-3; 4] \cup [-1; 5]$. | b) $[2; 7] \cup [5; 13]$. | c) $] - 1; 3] \cap [2; 4]$. | d) $] - 3; 2] \cup [3; 5]$. |
| e) $] - 13; 7] \cap [7; 17]$. | f) $] - 12; -11] \cap [-11; -8]$. | g) $] - \infty; 5] \cap [3; 7]$. | h) $] - \infty; 0] \cup [0; +\infty[$. |

Dans la construction de l'union et de l'intersection d'ensembles on voit que l'union est associée au connecteur logique **ou** alors que l'intersection est associée au connecteur logique **et**.

EXERCICE 274. Écrivez les conditions suivantes à l'aide d'intervalles.

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $x > 0,1$ ou $x \leq 4$. | b) $x < 2$ et $x \geq -1$. | c) $x \geq 1$ ou $x < -1$. |
| d) $x < 1$ et $x \leq -3$. | | |

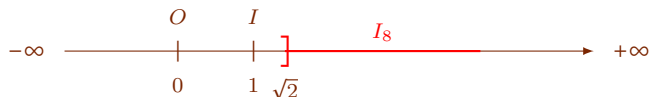
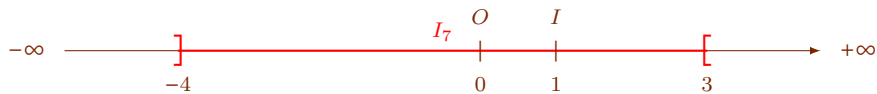
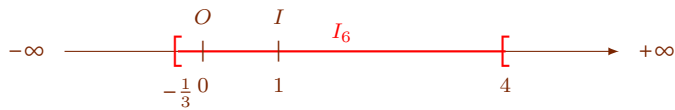
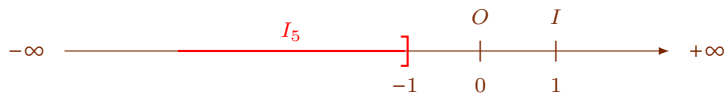
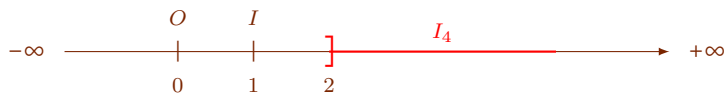
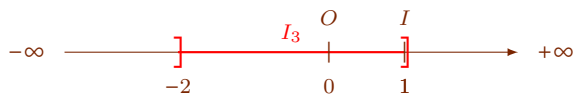
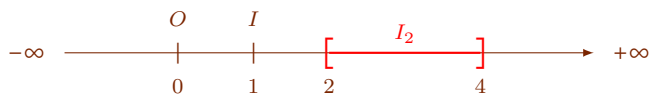
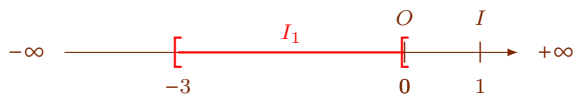
EXERCICE 275. Déterminez la réunion et l'intersection de $\left[0, \frac{2}{\sqrt{7}}\right]$ et $\left]\frac{\sqrt{5}}{3}, 1\right]$.

Corrections.

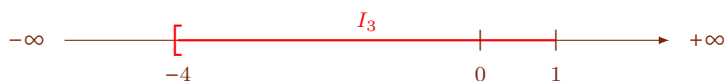
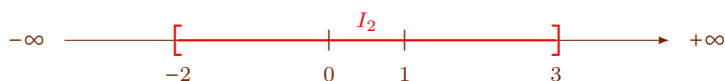
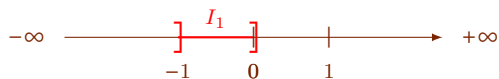
Exercice 260. Hormis pour les deux derniers points qui nécessite de travailler avec des valeurs approchée (en écriture décimale) les points peuvent être placés précisément. Les points O et I forment un repère de la droite.

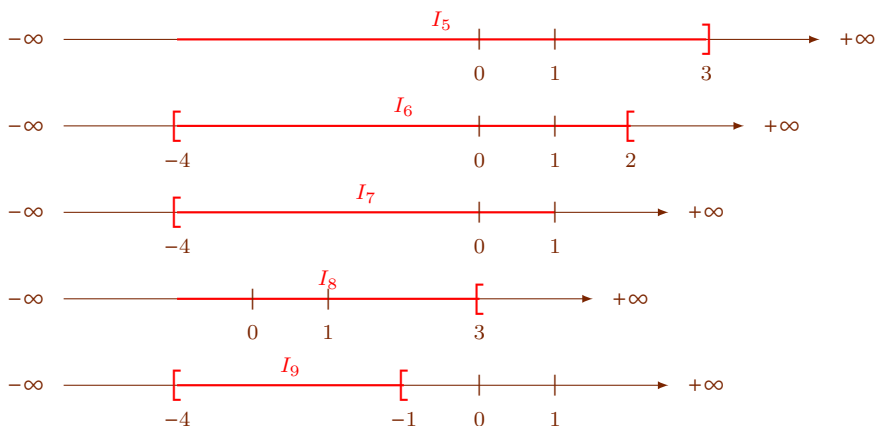


Exercise 261.



Exercise 262.





Exercice 263.

- a) $a = -1 \notin]-\infty, -2]$. b) $a = \pi \in [3,05; 3,8]$. c) $a = -3 \in [-3,245; +\infty[$. $a = \frac{1}{3} \in [0; \frac{1}{2}]$.
e) $a = 10^3 \notin]1000; +\infty[$. f) $a = -\frac{1}{4} \in]-\frac{1}{3}, 0]$. g) $a = -2 \notin [-4; -2]$.

Exercice 264.

- a) $-6 > x$ équivaut à $x \in x \in]-\infty; -6[$. b) $12 \leq x \leq 100$ équivaut à $x \in [12; 100]$.
c) $-3 < x \leq 11$ équivaut à $x \in]-3; +\infty]$. d) $-11 \leq x < -1$ équivaut à $x \in [-11; -1[$.
e) $8 > x > \frac{1}{2}$ équivaut à $x \in]\frac{1}{2}; 8[$. f) $4 \leq x$ équivaut à $x \in [4; +\infty[$.
g) $x \geq 10^{-3}$ équivaut à $x \in [10^{-3}; +\infty[$. h) $-\pi < x$ équivaut à $x \in]-\pi; +\infty[$.

Exercice 265.

- a) $x \in]-2; 5] \Leftrightarrow -2 < x \leq 5$. b) $x \in [3; 7] \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$. c) $x \in [-6, -4[\Leftrightarrow -6 \leq x < -4$.
d) $x \in]-7; 0[\Leftrightarrow -7 < x < 0$. e) $x \in [4, +\infty[\Leftrightarrow 4 \leq x$. f) $x \in]-3, +\infty[\Leftrightarrow -3 < x$.
g) $x \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow x < 0$. h) $x \in]-\infty; -3] \Leftrightarrow x \leq 3$. i) $x \in]-\infty, 3] \cup]5; 7] \Leftrightarrow x \leq 3$ ou $5 < x \leq 7$.

Exercice 266.

Notation	Représentation	Inéquations	Description
$[4; 8[$		$4 \leq x < 8$	Intervalle fermé en 4 et ouvert en 8.
$] -12, -5[$		$-12 < x < -5$	Intervalle ouvert en -12 et en -5.
$[\pi, 8[$		$\pi \leq x < 8$	Intervalle fermé en π et ouvert en 8.
$] -6; 2]$		$-6 < x \leq 2$	Intervalle ouvert en -6 et fermé en 2.

Exercice 267.

$] -\infty; 8[$		$x < 8$	Intervalle moins l'infini ouvert en 8
$] -12, +\infty[$		$-12 < x$	Intervalle ouvert en -12, plus l'infini
$] -\infty, \pi[$		$x < \pi$	Intervalle $-\infty$, ouvert en π
$] -\infty, -6[$		$x < -6$	Intervalle moins l'infini, ouvert en -6.

Exercice 268.

Notation	Schéma	Inéquation(s)	Description
$] -2 ; +\infty[$		$-2 < x$	Intervalle $-2, +\infty$
$]5; 8[$		$-5 < x < 8$	Intervalle ouvert en -5 , ouvert en 8 .
$] -3; 4]$		$-3 < x \leq 4$	Intervalle ouvert en -3 , fermé en 4
$] -5; 7]$		$-5 < x \leq 7$	Intervalle ouvert en -5 et fermé en 7 .

Exercice 269.

- a) Si $M \in [AB]$ alors $AM \in [0; 3]$.
 c) Si $M \in [CD]$ alors $CM \in [0; 2\sqrt{2}]$.
 e) Si $M \in [GF]$ alors $EM \in [3; 5]$.
 b) Si $M \in [BC]$ alors $BM \in [0; 2]$.
 d) Si $M \in [DE]$ alors $EM \in [0; \frac{5}{2}]$.
 f) Si $M \in [EF]$ alors $AB + BC + CD + DE + EM \in [7, 5 + 2\sqrt{2}; 11 + 2\sqrt{2}]$.

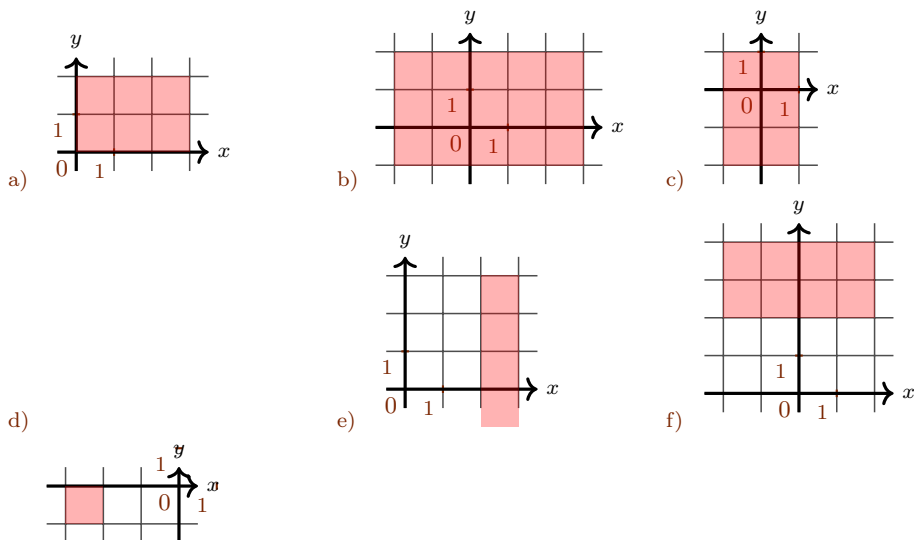
Exercice 270.

- a) $] -\infty; -1[$.
 e) $] -\infty; 10^3[$.
 b) $[3; +\infty[$.
 f) $] -\infty; 2, 14]$.
 c) $[\frac{1}{2}; +\infty[$.
 g) $] \sqrt{\pi}; +\infty[$.
 d) $] -\sqrt{2}; +\infty[$.
 h) $[-2, 1; +\infty[$.

Exercice 271.

- a) $x \in [-2; 2]$ et $y \in [0; 2]$.
 d) $x \in [-1; 2]$ et $y \in [-2; 1]$.
 b) $x \in [0; 4]$ et $y \in [-1; 1]$.
 e) $x \in [-1; 3]$ et $y \in [-2; 2]$.
 c) $x \in [-1; 3]$ et $y \in [-2; 2]$.
 f) $x \in [-1; 3]$ et $y \in [-2; 2]$.

Exercice 272.



Exercice 273.

- a) $[-3; 4[\cup] -1; 5[=] -3; 5[$.
 d) $] -3; 2] \cup [3; 5]$.
 g) $] -\infty; 5] \cap [3; 7[= [3; 5]$.
 b) $[2; 7] \cup [5; 13] = [2; 13]$.
 e) $] -13; 7] \cap [7; 17] = \{7\}$.
 h) $] -\infty; 0] \cup [0; +\infty[= \mathbb{R}$.
 c) $] -1; 3] \cap [2; 4] = [2; 4]$.
 f) $] -12; -11[\cap [-11; -3[= \emptyset$.

Exercice 274.

a) $(x > 0, 1 \text{ ou } x \leq 4) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

b) $(x < 2 \text{ et } x \geq -1) \Leftrightarrow x \in [-1; 2[.$

c) $x \geq 1 \text{ ou } x < -1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[.$

d) $x < 1 \text{ et } x \leq -3 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3].$

Exercice 275. $\left[0, \frac{2}{\sqrt{7}}\right] \cap \left]\frac{\sqrt{5}}{3}, 1\right[= \left]\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right]$ et $\left[0, \frac{2}{\sqrt{7}}\right] \cup \left]\frac{\sqrt{5}}{3}, 1\right[= [0; 1[.$

V Les décimaux et l'écriture décimale.

L'ensemble des nombres décimaux.

Définition 25. On appelle *décimal* (ou nombre décimal) tout nombre réel x qui peut s'écrire $x = a10^n$ où a et n sont des entiers (relatifs). L'ensemble des nombres décimaux est $\mathbb{D}$.

Exemples.

1. $-0,1 \in \mathbb{D}$ car $-0,1 = -1 \times 10^{-1}$.
2. $\frac{9078687656}{100} \in \mathbb{D}$ car $\frac{9078687656}{100} = 9078687656 \times 10^{-2}$.
3. Démontrons par l'absurde que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal et donc qu'il existe des entiers relatifs a et n tels que : $\frac{1}{3} = a \times 10^n$. On en déduit que

Remarques.

1. On appelle écriture décimale d'un nombre décimal l'écriture, s'il n'est pas entier, qui comporte une virgule.

Proposition 24. Un nombre est décimal si et seulement si il admet une écriture décimale comportant un nombre fini de chiffres non nuls.

Démonstration.

- * On considère $x = a10^n$. a bien sûr ne comporte qu'un nombre fini de chiffres. Si $n \geq 0$ alors c 'est un entier est son écriture décimale est bien finie. Si $n < 0$ alors 10^{-n} est un multiple de 10 et diviser par 10^{-n} revient à déplacer la virgule dans l'écriture décimale de a et on obtient un nombre fini de chiffres.
- * Si x s'écrit avec une écriture décimale comportant un nombre fini de chiffres. Alors il y a en particulier un nombre fini de chiffres après la virgule. Notons n ce nombre de chiffres. $x10^n$ est un entier, n est un entier et $x = (x10^n)10^{-n}$ donc x est un nombre décimal.

Remarques.

1. Les nombres décimaux sont aussi ceux qui admettent une écriture décimale finie.
2. Un nombre est décimal s'il admet un développement décimal infini ne comportant que des zéros à partir d'un certain rang. Par exemple : $2,34000\dots$ et $-0,088000\dots$.

Proposition 25. Les nombres décimaux sont enfin ceux qui admettent une écriture fractionnaire de la forme $\frac{a}{2^p \times 5^n}$ où a , n et p sont des nombres entiers.

Démonstration. Si $n \geq 0$ alors $x = a10^n$ est un entier et $\frac{a10^n}{2^0 \times 5^0}$. Si $n < 0$ alors 10^{-n} est un entier et donc $x \frac{a}{2^{-n} \times 5^{-n}}$ est une fraction.

Remarques.

1. Un nombre est décimal s'il admet une écriture fractionnaire dont le numérateur est un entier et le dénominateur le produit d'une puissance de deux et d'une puissance de 5.
2. L'aspect le plus intéressant de ce résultat est l'utilisation des facteurs premiers 2 et 5 plutôt que 10 car ce sont eux qui apparaissent si on recherche la forme irréductible d'une fraction.

Proposition 26. Un nombre décimal peut s'écrire comme une fraction.

Démonstration. Conséquence directe de la précédente proposition.

Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans la pratique (mathématiques appliquées) on ne peut utiliser que des nombres décimaux utilisant peu de chiffres. Avec la calculatrice notamment le nombre de chiffres est très

limité. Il faut donc être capable de repérer ces nombres décimaux par rapport à d'autres nombres réels.

Proposition 27. Entre deux nombres réels x et x' avec $x < x'$, il existe toujours un nombre décimal d tel que : $x < d < x'$.

Démonstration. Résultat admis.

Proposition 28. Pour x un nombre réel, quel que soit la précision $a > 0$ choisie, il existe des décimaux d et d' tels que : $x - a < d < x < d' < x + a$.

Démonstration. $x - a$, x et $x + a$ sont des réels donc d'après la précédente proposition il existe des décimaux d et d' tels que $x - a < d < x$ et $x < d' < x + a$.

Remarques.

1. Autrement dit on peut toujours trouver des valeurs décimales approchées par défaut, d , et par excès, d' , de x et ce quelle que soit la précision a désirée.

Écriture scientifique.

Proposition 29. Soit $d \in \mathbb{D}$. Il existe un unique entier n et un unique nombre décimal d' tels que : $d = d'10^n$ et $1 \leq d' < 10$.

Démonstration.

Remarques.

1. L'écriture scientifique est importante pour les sciences expérimentales : elle permet de mettre en évidence les ordres de grandeurs et les chiffres significatifs.
2. C'est une écriture adaptée aux nombres décimaux car elle permet de se focaliser sur les chiffres non nuls de l'écriture décimale tout en mettant en évidence l'ordre de grandeur.

Exemples.

1. $1\,234,567\,8 = 1,234\,567\,8 \times 10^3$.
2. La vitesse de la lumière est de l'ordre de $300\,000$ km/s c'est-à-dire 3×10^8 m $\cdot$ s⁻¹.
3. La charge électrique élémentaire est de l'ordre de $1,6 \times 10^{-9}$ C.
4. La distance de la Terre au Soleil est de l'ordre de 15 millions de kilomètres, c'est-à-dire $1,5 \times 10^7$ km.

Écriture décimale infinie (ou développement décimal infini).

Développement décimal périodique et nombres rationnels.

Double écriture développement décimal infini des nombres rationnels.

Développement décimal infini des irrationnels.

Partie 4. Statistiques.

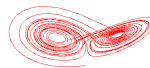
Partie 5. Probabilité.

I Modéliser les probabilités avec des ensembles.

Expérience aléatoire.

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat (ou *issue*) ne peut être connu à l'avance.

Parfois les systèmes dynamiques déterministes très sensibles aux conditions initiales ne sont pas prévisibles par des moyens déterministes. Il faut alors utiliser des modélisations probabilistes. On parle de système chaotique et de *théorie du chaos*.



Attracteur de Lorenz.

À l'origine de cette théorie nous retrouvons Henri Poincaré qui découvrit cette problématique en essayant de modéliser les attractions gravitationnelles entre 3 corps ou plus. Sont associés à cette théorie de nombreux mathématiciens, notamment ceux qui ont travaillé sur des équations différentielles (équations dont l'inconnue est une fonction) comme Cauchy ou Lipschitz.

La météorologie est un exemple d'étude de système chaotique et le météorologue Lorenz intitula une de ses conférences d'une expression qui fit florès « Prédicibilité : le battement d'aile d'un papillon au Brésil provoque-t-il une tornade au Texas ? ».

Comme pour toute expérience il faut définir un *dispositif expérimental*. Il s'agit de décrire l'expérience et les conditions dans lesquelles elle est réalisée ainsi que ce qu'il faut observer (issues). Il faut d'ailleurs connaître toutes les issues.

Probabilité d'une issue.

Si on recommence un grand nombre (en théorie une infinité) de fois une expérience aléatoire la fréquence d'apparition d'une issue, ω , s'approche d'une valeur fixe qui est appelée *la probabilité de l'issue* et notée $\mathbb{P}(\omega)$.

C'est ce pseudo principe qui fait le lien entre la réalité matérielle d'une expérience aléatoire et les outils mathématiques pour le modéliser. Nous aurons tendance à oublier ce fait : la connaissance des probabilités dans la réalité relèvent d'une étude statistique sur un grand nombre de répétitions d'une expérience et non pas de calculs mathématiques.

Remarques.

1. Puisque la probabilité est une fréquence c'est un nombre réel compris entre 0 et 1 : $\mathbb{P}(\omega) \in [0; 1]$.
2. Pour étudier une expérience aléatoire il faut faire le choix (pour nous le plus souvent arbitraire) d'une *modélisation*. C'est-à-dire choisir un univers (ou un ensemble d'événements) et une loi de probabilité qui correspondent à l'expérience.

Exemples.

1. Si on lance un grand nombre de fois une pièce de monnaie bien équilibrée alors on obtiendra à peu près 50 % de piles. Cela peut sembler trop approximatif mais il existe des outils mathématiques pour préciser ce « à peu près ». Vous rencontrerez notamment ce qu'on appelle des échantillons c'est à dire l'ensemble des résultats obtenus lors de la répétition d'une même expérience aléatoire.

Loi de probabilité.

Définition 26. La donnée des probabilités de toutes les issues forment la *loi de probabilité* ou *distribution de probabilité*.

Remarques.

1. Nous utiliserons différentes façon de représenter cette loi : tableau de valeurs, expressions algébriques ou représentation graphique. À chaque issue on associe une probabilité on définit donc une fonction.

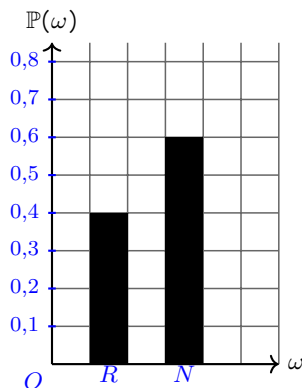
Exemples.

1. Si une urne de Bernoulli (opaque) contient 2 boules rouges et 3 boules noires, indiscernables au toucher, et que l'on tire une boule de l'urne en notant sa couleur, alors

on peut donner la loi de probabilité en donnant

ω	R	N
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Plus rarement (à votre niveau) on représente la distribution de probabilité dans un repère :



2. Si une urne de Bernoulli contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules de couleurs toutes différentes alors, dans ce cas, la loi de probabilité porte un nom propre. Elle est dite *uniforme* ou d'*équiprobabilité*. On peut aussi décrire cette loi de probabilité par son expression algébrique : $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{n}$ quelle que soit la boule ω .

Événements.

Définition 27. L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé *l'univers* (ou *événement certain*) et est noté Ω .

Proposition 30. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Démonstration. La fréquence d'apparition de toutes les issues est de 1 (puisque toutes les issues sont recensées).

Exemples.

1. Pour un lancer de dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, les issues sont les entiers de 1 à 6. On note alors : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Définition 28. Un *événement* est un sous-ensemble de l'univers.

Remarques.

1. Un événement A peut être présenté par :
 - une propriété A : « Les issues telles que ... »,
 - un sous-ensemble : $A = \{\dots\}$.
2. Un événement est un regroupement d'issues qui nous intéresse. Le canonier ne s'intéresse pas uniquement au boulet qui tombe sur tel point mais dans une zone alentour. Aucune issue ne convient à ces événements.
3. On ne dira pas $\omega \in A$ mais *l'issue ω réalise A* .

Exemples.

1. Pour un lancer de dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, $\{1 ; 4\}$ est un événement puisque c'est un sous-ensemble de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
2. Pour un lancer de dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, l'événement A : « Les issues sont des nombres pairs » peut aussi s'écrire : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.
3. Pour un lancer de dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, l'événement $B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ peut être décrit par B : « Les issues sont des nombres strictement supérieurs à 2 ».

Définition 29. L'ensemble $\emptyset$ est appelé l'*événement impossible*.

Exemples.

1. L'événement C : « obtenir sept pour un lancer de dé à six faces » est un événement impossible. $C = \emptyset$.

Remarques.

1. Les événements impossibles sont ceux qui prévoient d'autres possibilités que celles de l'univers.

Probabilité d'un événement.

Définition 30. La *probabilité d'un événement* est la somme des probabilités des issues qu'il contient.

Remarques.

1. Cette définition n'est valable que pour des univers finis.

EXERCICE 276. On lance un dé pipé. Le tableau suivant regroupe les probabilités.

F (face)	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

1. Calculer $\mathbb{P}(6)$.
2. Calculer la probabilité des événements suivants.
 - (a) « La face obtenue est paire » ;
 - (b) « la face obtenue est supérieure ou égale à 5 ».

Réunion et intersection d'événements.

L'événement $A \cup B$ (obtenu par la réunion des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *ou* dans B .

Exemples.

1. En reprenant les exemples précédents du dé. $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ et $B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ donc les issues contenues dans A ou dans B forment le sous-ensemble : $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

L'événement $A \cap B$ (obtenu par l'intersection des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *et* dans B (simultanément).

Exemples.

1. En reprenant les exemples précédents du dé. $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ et $B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ donc les issues contenues dans A et dans B forment le sous-ensemble : $A \cap B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Définition 31. Deux événements A et B d'un univers ω sont dits *incompatibles* si et seulement si les ensembles A et B sont disjoints, i.e. $A \cap B = \emptyset$.

Remarques.

1. Si A et B sont incompatibles alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exemples.

1. « Obtenir un nombre pair » et « Obtenir un nombre impair » sont des événements incompatibles.

Proposition 31. Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Remarques.

1. Cette formule est valable quelle que soit la loi de probabilité qui est utilisée.
2. Cette formule (surtout dans sa forme généralisée à plus de deux événements) est appelée *formule du crible de Poincaré*.
3. On en déduit que la probabilité est une fonction croissante : si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Événement contraire.

Définition 32. Étant donné un événement E , l'événement contraire de E , noté $\overline{E}$, est formé de toutes les issues qui ne sont pas dans E .

Exemples.

1. En reprenant les exemples précédents du dé. Puisque $B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ et $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ il en découle que $\overline{B} = \{1 ; 2\}$.
2. Le contraire d'« obtenir un nombre pair et supérieur ou égale à 3 » est « obtenir un nombre impair ou obtenir un nombre strictement inférieur à 3 ». Autrement dit $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Remarques.

1. Autrement dit l'événement contraire de E est le complémentaire de E dans Ω .
2. Un événement et son contraire sont incompatibles.
3. On a toujours : $A \cup \overline{A} = \Omega$.
4. Les règles de De Morgan s'appliquent : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Proposition 32. Soit A un événement d'un univers Ω . $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

EXERCICE 277. Démontrez que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

EXERCICE 278. Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les événements : O_1 : « La 1^{er} ligne est occupée » et O_2 : « La 2^e ligne est occupée ». Une étude statistique montre que : $p(O_1) = 0,4$, $p(O_2) = 0,3$ et $p(O_1 \cap O_2) = 0,2$. Calculer la probabilité des événements suivants.

1. « La ligne 1 est libre ».
2. « Au moins une des lignes est occupée ».
3. « Au moins une des lignes est libre ».

Exercices.

EXERCICE 279. On dispose d'un dodécaèdre régulier à 12 faces dont les faces sont numérotées de 1 à 12. Lorsqu'on le lance il retombe sur une des faces dont on note le numéro. On note A l'événement « obtenir un numéro pair » et B l'événement « obtenir un multiple de 3 ». Pour chacun des événements suivants listez les issues qui les constituent.

- a) A . b) B . c) $\overline{B}$. d) $A \cap B$. e) $A \cup B$. f) $\overline{A} \cup B$.

EXERCICE 280. Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie automobile. Ces pièces peuvent présenter deux sortes de défauts : défaut d'usinage ou défaut de peinture. On note A l'événement « la pièce a un défaut d'usinage » et B l'événement « la pièce a un défaut de peinture ». À la sortie de la fabrication, on choisit une pièce au hasard.

1. Pour chacun des événements suivant dites s'il correspond à $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A \cup B}$ ou $\overline{A \cap B}$.
 - E : « la pièce a deux défauts ».
 - F : « la pièce a au moins un des deux défauts ».
 - G : « la pièce n'a aucun défaut ».
 - H : « la pièce a au plus un défaut ».
2. Parmi les événements E , G et H , lequel est l'événement contraire de F ?
3. Parmi les événements F , G et H lequel est l'événement contraire de E ?

EXERCICE 281. Vrai ou faux. Si A et B sont deux événements incompatibles alors

- a) $A \cap B$ est vide.
- b) $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$.
- c) $\mathbb{P}(A \cup B) = 0$.
- d) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

EXERCICE 282. Dans un jardin il y a des tulipes et des roses qui peuvent être jaunes ou rouges. On cueille une fleur au hasard et on définit les événements suivants : R : « la fleur est rouge » et T : « la fleur est une tulipe ».

1. L'événement « la fleur est une tulipe rouge » est
 - a) R
 - b) T
 - c) $T \cap R$
 - d) $T \cup R$
2. L'événement « la fleur est une rose rouge » est
 - a) $\overline{R}$
 - b) $\overline{T} \cap R$
 - c) $T \cap R$
 - d) $\overline{T} \cup R$
3. L'événement « la fleur est jaune ou est une rose » est
 - a) $R \cup T$
 - b) $\overline{R} \cap \overline{T}$
 - c) $\overline{R} \cup \overline{T}$
 - d) $R \cup \overline{T}$

EXERCICE 283. Indiquez si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. On considère deux événements A et B d'un même univers Ω .
 - a) Si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ alors $A = B$.
 - b) Si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ alors A et B ont le même nombre d'issues.
 - c) Si $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$, alors $A \cap B = \emptyset$.
 - d) $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A \cap B)$.
 - e) $\mathbb{P}(\overline{A}) \leq \mathbb{P}(A)$.
2. Deux événements incompatibles sont des événements contraires.
3. Deux événements contraires sont des événements incompatibles.
4. Une cible est composée de trois disques concentriques numérotés 1, 2 et 3, de rayons respectifs 1 dm, 2 dm et 3 dm. La probabilité d'obtenir une des trois couleurs est proportionnelle à l'aire de la partie colorée. On note p_i la probabilité d'atteindre la partie i pour i entier compris entre 1 et 3.

- a) $p_1 = \pi$.
- b) $p_2 = \frac{4}{9}$.
- c) $p_3 = \frac{5}{9}$.

5. Une entreprise a deux systèmes de sauvegarde informatique par disque externe et par bande magnétique. Soit les événements D : « le disque externe est en panne » et B : « la bande magnétique est en panne ». Le constructeur assure que $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{20}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{20}$ et $\mathbb{P}(B \cap D) = \frac{1}{100}$.
- Les événements B et D sont incompatibles.
 - La probabilité de l'événement « au moins un des systèmes de sauvegarde est défaillant » est $\frac{1}{40}$.
 - L'événement « les deux systèmes de sauvegarde fonctionnent » est $\overline{B} \cap \overline{D}$.
 - La probabilité de l'événement « au moins un des deux systèmes de sauvegarde fonctionne » est $\frac{99}{100}$.

Corrections.

Exercice 276.

1. Calculons $\mathbb{P}(6)$.

La probabilité de l'univers est 1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}) = 1$. la probabilité d'un événement égalant la somme des probabilités des issues qui le réalise : $\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 1 \Leftrightarrow 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,3 + \mathbb{P}(\{6\}) = 1$. Il s'agit d'une équation linéaire : $\mathbb{P}(\{6\}) = 1 - 0,9$.

$$\mathbb{P}(\{6\}) = 0,1.$$

2. (a) Notons A : « la face obtenue est paire ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{2; 4; 6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= 0,1 + 0,2 + 0,1\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(A) = 0,4.$$

3. B : « la face obtenue est supérieure ou égale à 5 ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{5; 6\}) = \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 0,3 + 0,1.$$

$$\mathbb{P}(B) = 0,4.$$

Exercice 277. Nous savons $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ donc, d'après la précédente proposition : $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\emptyset}) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

Exercice 278.

1. Il s'agit ici d'interpréter les événements proposés avec ceux donnés dans l'énoncé.

Calculons $\mathbb{P}(O_1)$.

$$\mathbb{P}(\overline{O_1}) = 1 - \mathbb{P}(O_1) = 1 - 0,4.$$

$$\mathbb{P}(\overline{O_1}) = 0,6.$$

2. L'expression « Au moins l'une » peut s'exprimer en utilisant la conjonction « ou » et par conséquent par l'union.

Calculons $\mathbb{P}(O_1 \cup O_2)$.

$$\mathbb{P}(O_1 \cup O_2) = \mathbb{P}(O_1) + \mathbb{P}(O_2) - \mathbb{P}(O_1 \cap O_2) = 0,4 + 0,3 - 0,2.$$

$$\mathbb{P}(O_1 \cup O_2) = 0,5.$$

3. Cette question est nettement moins facile. En réfléchissant comme à la question précédente : Calculons $\mathbb{P}(\overline{O_1 \cup O_2})$.

$\mathbb{P}(\overline{O_1 \cup O_2}) = \mathbb{P}(\overline{O_1}) + \mathbb{P}(\overline{O_2}) - \mathbb{P}(\overline{O_1} \cap \overline{O_2})$. $\overline{O_1} \cap \overline{O_2}$ signifie « la première ligne est libre et la seconde aussi ». Nous n'avons pas la possibilité de calculer directement la probabilité de cet événement. L'événement contraire peut s'exprimer par : « la première ligne est occupée ou la seconde est occupée », autrement dit « au moins une des deux lignes est occupée ». Donc : $\mathbb{P}(\overline{O_1 \cup O_2}) = 1 - \mathbb{P}(O_1) + 1 - \mathbb{P}(O_2) - \mathbb{P}(O_1 \cup O_2) = 1 - 0,4 + 1 - 0,3 - [1 - \mathbb{P}(O_1 \cup O_2)] = 1,3 - [1 - 0,5]$.

$$\mathbb{P}(\overline{O_1 \cup O_2}) = 0,8.$$

La dernière question de l'exercice introduit et correspond aux lois de De Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exercice 279.

- | | |
|--|---|
| a) $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$. | b) $B = \{3; 6; 9; 12\}$. |
| c) $\overline{B} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}$. | d) $A \cap B = \{6; 12\}$. |
| e) $A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12\}$. | f) $\overline{A \cup B} = \{1; 3; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$. |

Exercice 280.

- $A \cup B = F$: « la pièce a au moins un des deux défauts ». $A \cap B = E$: « la pièce a deux défauts ».
 $\overline{A \cup B} = H$: « la pièce a au plus un défaut ». $\overline{A \cap B} = H$: « la pièce a au plus un défaut ».
- $\overline{F} = G$: « la pièce n'a aucun défaut ».
- $E = H$: « la pièce a au plus un défaut ».

Exercice 281.

- Vrai par définition.
- Si A et B sont incompatibles alors $A \cap B = \emptyset$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq 1$. L'assertion « $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$ » est fausse.
- Soit E un événement quelconque. Comme nous l'avons remarqué : $E \cup \overline{E} = \Omega$ donc $\mathbb{P}(A \cup \overline{E}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. L'assertion « $\mathbb{P}(A \cup B) = 0$ » est fausse.
- Ce résultat est vrai comme nous l'avons indiqué en remarque. Justifions-le. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 0 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exercice 282.

- L'événement « la fleur est une tulipe rouge » est $T \cap R$.
- L'événement « la fleur est une rose rouge » est $\overline{T} \cap R$.
- L'événement « la fleur est jaune ou est une rose » est $\overline{R} \cap \overline{T}$.

Exercice 283.

- On considère deux événements A et B d'un même univers Ω .
 - « Si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ alors $A = B$ » est fausse : « obtenir un nombre pair » et « obtenir un nombre impair » pour un lancer de dé à 6 faces ont la même probabilité est ne sont pas des événements égaux.
 - « Si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ alors A et B ont le même nombre d'issues » et faux en général. Ce n'est vrai que dans le cas de l'équiprobabilité. Contre-exemple : on lance un dé à 6 faces dont trois sont numérotées 1 et les autres 2, 3 et 4, $A = \{1\}$ et $B = \{2; 3; 4\}$.
 - « Si $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$, alors $A \cap B = \emptyset$ » est fausse. Contre-exemple : $A = B = \Omega$.
 - « $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A \cap B)$ » est vraie du fait de la croissance de la fonction probabilité (indiquée en remarque).
 - « $\mathbb{P}(\overline{A}) \leq \mathbb{P}(A)$. » est fausse. Contre-exemple : $A = \emptyset$ alors $\overline{A} = \Omega$ et $\mathbb{P}(\omega) = 1 \not\leq \mathbb{P}(A) = 0$.

2. « Deux événements incompatibles sont des événements contraires » est fausse. Contre-exemple : sur un lancer de dé, $\{1; 2\}$ et $\{5; 6\}$ sont incompatibles sans être contraires.
3. « Deux événements contraires sont des événements incompatibles » est vraie comme indiqué dans la leçon.
4. a) $p_1 = \frac{\pi \times 1^2}{\pi \times 3^2} = \frac{1}{9} \neq \pi$. b) $p_2 = \frac{\pi \times 2^2 - \pi \times 1^2}{\pi \times 3^2} = \frac{1}{3}$. c) $p_3 = \frac{\pi \times 3^2 - \pi \times 2^2}{\pi \times 3^2} = \frac{5}{9}$.
5. a) « Les événements B et D sont incompatibles » est fausse car $\mathbb{P}(B \cap D) \neq 0$.
 b) « La probabilité de l'événement « au moins un des systèmes de sauvegarde est défaillant » est $\frac{1}{40}$ » est fausse. $\mathbb{P}(B \cup D) = \mathbb{B} + \mathbb{D} - (D \cap B) = \frac{9}{100}$.
 c) « L'événement « les deux systèmes de sauvegarde fonctionnent » est $\overline{B} \cap \overline{D}$ » est vraie.
 d) « La probabilité de l'événement « au moins un des deux systèmes de sauvegarde fonctionne » est $\frac{99}{100}$ » est vraie. $\overline{\overline{D \cup B}} = \overline{\overline{D} \cap \overline{B}} = D \cap B$.

II La loi uniforme discrète.

Généralités.

Définition 33. La loi d'une expérience aléatoire est appelée *l'équiprobabilité* (ou *loi discrète uniforme*) si la distribution de probabilité entre les issues est équitable. Autrement dit toutes les issues ont la même probabilité.

Remarques.

1. Dans les exercices les situations qui seront modélisées avec l'équiprobabilité sont souvent décrites avec les termes : indiscernables, parfaitement équilibrés, et cetera.

Proposition 33. Soient Ω un univers muni de la loi d'équiprobabilité $\mathbb{P}$. $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$ quel que soit l'issue $\omega \in \Omega$.

Démonstration. Trivial.

Exemples.

1. Un lancer de pièce équilibrée pourra être modélisé avec l'univers $\Omega = \{P, F\}$, et par une équiprobabilité. Donc la probabilité d'une issue est $\frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{2}$:

ω	P	F
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

EXERCICE 284. Un jeu consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Quel est l'univers de l'expérience ?
2. Calculez la probabilité d'obtenir 3.
3. Calculez la probabilité de l'événement $B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
4. Calculez la probabilité de l'événement A : « Les issues sont des nombres pairs ».
5. Décrivez par un ensemble l'événement $A \cap B$ et déduisez en sa probabilité.
6. Déduisez des trois questions précédentes la probabilité de $A \cup B$.
7. Calculez la probabilité de $\bar{A}$.

Nous retiendrons le résultat suivant que nous utiliserons souvent dans les exercices.

Proposition 34. Soient Ω un univers muni de la loi d'équiprobabilité $\mathbb{P}$ et A un événement ($A \subset \Omega$). est $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Démonstration. Nous avons défini la probabilité d'un événement comme la somme des probabilités des issues qui le réalisent donc $\mathbb{P}(A) = \text{Card}(A) \times \frac{1}{n}$.

Remarques.

1. Ainsi les calculs de probabilités, dans le cas de l'équiprobabilité, reviennent à des questions de dénombrement (compter le nombre d'objets).

Dénombrer avec un tableau double entrée.

EXERCICE 285. Un jeu consiste à lancer deux dés cubiques parfaitement équilibrés numérotés de 1 à 6.

1. Donnez sous forme d'un tableau l'univers associé à cette expérience.
2. Calculez la probabilité d'obtenir 6 sur les deux dés.
3. On note A : « La somme des nombres obtenus égale 3 ». Calculez la probabilité de l'événement A .
4. On note B : « le produit des nombres obtenus égale 6 ». Calculez la probabilité de l'événement B .
5. On note C : « le produit des nombres obtenus égale 7 ». Calculez la probabilité de l'événement C .
6. On note D : « la somme des nombres obtenus est strictement supérieure à 3 ». Calculez la probabilité de l'événement D .

Dénombrement avec un arbre.

EXERCICE 286. Un square est équipé de trois bancs. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. L'objet de l'exercice est de déterminer la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte. Les trois bancs sont notés A , B et C .

1. Représentez la situation par un arbre.
2. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient sur le banc A .
3. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient côte à côte.

Exercices.

EXERCICE 287. On lance 3 fois une pièce bien équilibrée.

1. Représentez la situation par un arbre.
2. Quelle est la probabilité :
 - (a) d'avoir 3 faces ?
 - (b) que le deuxième jet soit face ?
 - (c) que le troisième jet soit différent du premier ?

EXERCICE 288. Un examinateur doit interroger, dans un certain ordre, quatre candidats : Arthur, Béatrice, Chloé et David. Il doit établir une liste ordonnée de quatre noms.

1. À l'aide d'un arbre, déterminez le nombre de listes possibles.
2. L'examineur tire la liste des quatre noms au hasard, chaque liste possible, ayant la même probabilité.

Déterminez la probabilité de chacun des événements suivants :

- E : « Béatrice est interrogée en premier ».
- F : « Chloé est interrogée en dernier ».
- G : « David est interrogé avant Béatrice ».

3. Définir par une phrase l'événement $E \cap F$ et en donner la probabilité.
4. Définir par une phrase l'événement $E \cup F$ et en donner la probabilité.

EXERCICE 289. Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix : entre 2 entrées : Artichaut ou Betterave; entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope; entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau. Un menu se compose : d'une entrée; d'un plat; d'un dessert.

1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard. Quelle est la probabilité :
 - (a) qu'il comporte une escalope ?
 - (b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
 - (c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

EXERCICE 290. Un groupe de 4 amis, Émile, Flore, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Déterminer les probabilités suivantes.
 - (a) C'est un garçon qui rame.
 - (b) Hélène écoper.
 - (c) Les deux qui travaillent sont de même sexe.

EXERCICE 291. Trois CD notés a , b et c ont respectivement des boîtes nommées A , B et C . On range les 3 CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

- Combien de rangements sont possibles ?
- Quelle est la probabilité
 - que les 3 CD soient bien rangés ?
 - qu'exactement 1 CD soit bien rangé ?
 - qu'exactement 2 CD soient bien rangés ?
- En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

EXERCICE 292. Une urne contient 4 jetons : deux jaunes, un rose et un violet. On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

- Représenter cette situation par un arbre.
- Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
- On considère les événements : R : « Le 1^{er} jeton tiré est rose » et J : « Le 2^e jeton tiré est jaune » .
 - Déterminer $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(J)$.
 - Traduire par une phrase $R \cap J$.
Calculer $\mathbb{P}(R \cap J)$.
 - Calculer $\mathbb{P}(R \cup J)$.
- On considère l'événement :

— N : « Aucun jeton tiré n'est jaune » .

 - Calculer $\mathbb{P}(N)$.
 - Exprimer $\overline{N}$ par une phrase.
 - Calculer $\mathbb{P}(\overline{N})$.

EXERCICE 293. Dans une classe de seconde, on a représenté dans le tableau suivant les langues vivantes étudiées en première langue par les 35 élèves. (On suppose que chaque élève étudie une seule première langue.)

	Anglais	Allemand	Espagnol
Garçons	8	3	4
Filles	10	4	6

On interroge au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux événements suivants :

- F : « l'élève interrogé est une fille ».
- E : « l'élève interrogé étudie l'espagnol comme première langue ».

Calculez la probabilité de chacun des événements suivants : $E \cap F$, $E \cup F$, $\overline{E} \cap \overline{F}$ et $E \cup \overline{F}$.

EXERCICE 294. Un car scolaire se dirige vers Saint Jacques de Compostelle en passant par Conques avec à son bord 75 élèves dont 40 garçons. Miguel, le chauffeur, fait un sondage auprès des élèves pour savoir qui aime les chants grégoriens. Il découvre alors que 32 élèves ne les aiment pas, dont la moitié sont des filles, et que 20 % des garçons les aiment, et que 18 filles n'en ont jamais entendu parler.

- Recopie et complète le tableau ci-dessous.

	Aime	N'aime pas	Ne connaît pas	Total
Garçons				
Filles				
Total				

- On tire au hasard la fiche d'un élève.
Quelle est la probabilité que :

- (a) ce soit un garçon ;
 - (b) ce soit un garçon qui aime les chants grégoriens ;
 - (c) ce soit un garçon ou un élève qui aime les chants grégoriens ;
3. On tire au hasard la fiche d'un garçon. Quelle est la probabilité qu'il aime les chants grégoriens ?

EXERCICE 295. On lance un dé bien équilibré à six faces dont trois sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.

- 1. Les trois couleurs sont-elles équiprobables ?
- 2. Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur.

EXERCICE 296. On lance deux dés à quatre faces et on regarde la somme obtenue.

- 1. Donner l'ensemble des résultats possibles.
- 2. Donner une loi de probabilités de cette expérience aléatoire (justifier).
- 3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
- 4. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre multiple de trois ?

EXERCICE 297. Une enseignante propose à ses élèves un jeu de 52 cartes. Le jeu contient 13 cartes (As, 2,3, ..., 10, Valet, Dame, Roi) de chacune des familles suivantes : carreau, cœur, pique, trèfle. Cœur et carreau sont des familles de couleur rouge. Pique et trèfle sont de couleur noire.

- 1. L'enseignante donne une carte, choisie au hasard, à Ana.
 - (a) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit rouge ?
 - (b) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un pique ?
 - (c) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un valet ?
 - (d) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une dame de couleur rouge ?
 - (e) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une carte de couleur rouge ou une dame ?
- 2. L'enseignante décide d'ajouter des cartes Joker à son jeu. Combien doit-elle ajouter de carte joker pour que la probabilité qu'Ana reçoive une carte Joker soit de $\frac{1}{14}$.

EXERCICE 298. Dans une classe de Grande Section, l'enseignant propose à ses élèves le jeu suivant dans lequel il s'agit d'être le premier à avoir exactement 15 jetons (source : *Découvrir les maths GS* - Éditions Hatier). Chaque élève lance deux dés bien équilibrés, identiques, à 6 faces numérotées de 1 à 6. Il considère les deux nombres indiqués sur les faces supérieures de chacun des dés. Lorsque les deux dés indiquent le même nombre, l'élève prend autant de jetons que l'indique l'un des deux dés. Sinon, il prend autant de jetons que le plus grand des deux nombres ou le double de jetons du plus petit. Après avoir lancé les dés, un élève a la possibilité de passer son tour. Dans ce cas, il ne prend aucun jeton.

- 1. Un élève lance les deux dés ; il obtient un 3 et un 2. Combien de jetons peut-il prendre ? Donner tous les cas possibles.
- 2. Dresser la liste des tirages permettant d'obtenir 3 jetons.
- 3. Un élève lance les deux dés.
 - (a) Montrer que la probabilité de l'événement « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 » est $\frac{1}{18}$.
 - (b) Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un des nombres obtenus est 3 » ?
 - (c) Quelle est la probabilité de l'événement « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons » ?

4. Après un nouveau lancer des deux dés, un élève a pris 3 jetons. Au lancer suivant, la probabilité qu'il prenne de nouveau 3 jetons augmente-t-elle, reste-t-elle identique ou diminue-t-elle par rapport à la probabilité d'avoir pris 3 jetons au tirage précédent ? Justifier.
5. En fin de partie, un élève possède 12 jetons. Lors de son lancer de dés, il obtient un 1 et un 4. Pourquoi est-il préférable pour lui de passer son tour ?

EXERCICE 299. Deux élèves de CM2, Jeanne et Teddy, jouent à la bataille navale. Il s'agit d'un jeu de société, appelé également « touché-coulé ». Les deux joueurs doivent commencer par placer quatre navires horizontalement ou verticalement (sans chevauchement) sur leur grille de 8 lignes et 8 colonnes, tenue secrète : 1 navire de deux cases, 2 navires de trois cases et 1 navire de quatre cases. Ils doivent ensuite tenter de faire « couler » les navires adverses en « touchant » toutes les cases de chaque navire de l'autre joueur. Pour cela, chacun, à son tour, énonce une case de la grille, sous le format « lettre-nombre », par exemple C2. Lorsqu'un joueur énonce une case, son adversaire répond :

- « À l'eau ! », si la case énoncée est vide ;
- « Touché ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si les autres parties du navire n'ont pas encore toutes été touchées ;
- « Touché-coulé ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si toutes les autres parties du navire ont déjà été touchées.

Le gagnant est le joueur qui fait « couler » chez son adversaire tous les navires (au sens de toucher toutes les cases de chacun d'eux) avant que les siens ne le soient.

Voici ci-contre la grille de Teddy : les quatre bateaux sont schématisés par des rectangles gris.

On suppose qu'à chaque tir, Jeanne choisit au hasard et de manière équiprobable une case de la grille qu'elle n'a pas énoncée précédemment.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

1. Au premier essai :
 - (a) Quelle est la probabilité que Jeanne touche un bateau ?
 - (b) Quelle est la probabilité que Jeanne ne touche aucun bateau ?
 - (c) Un des bateaux a une chance sur seize d'être touché. De combien de cases est-il composé ?
 - (d) Jeanne choisit une case de la colonne B. Quelle est la probabilité qu'elle touche un bateau ?
2. Au premier essai de la partie, Jeanne désigne la case « E1 ». Teddy annonce « Touché ! ». Jeanne souhaite couler le bateau touché et choisit une case adjacente à la case « E1 ». Quelle est la probabilité qu'elle coule le bateau au coup suivant ? Justifier.
3. Teddy annonce « À l'eau ! » pour les deux premiers essais de Jeanne. Quelle est la probabilité de toucher un bateau pour son troisième essai ?

EXERCICE 300. Dans une école élémentaire de 150 élèves, 80 sont des filles. Le directeur veut mettre en place un « orchestre à l'école ». Il réalise une enquête auprès des familles de l'école afin de connaître les élèves qui pratiquent déjà un instrument de musique. À l'issue de l'enquête, il apparaît que 24 % des élèves sont musiciens. Parmi ces élèves, 16 sont des garçons.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

	Nombres d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles			
Nombre de garçons			
Total			150

2. Dans cette question, on écrira les résultats sous forme de fractions irréductibles.

On interroge un élève au hasard.

- Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?
- Quelle est la probabilité que ce soit une fille musicienne ?
- Quelle est la probabilité que ce soit un élève non-musicien ?

3. L'élève interrogé est un garçon. Quelle est la probabilité qu'il soit musicien ?

4. 30 % des filles musiciennes jouent d'un instrument à vent. Quel pourcentage cela représente-t-il par rapport à l'effectif total de l'école ?

EXERCICE 301. Calculez la probabilité que deux élèves d'une classe de 35 élèves soient nés le même jour de l'année.

EXERCICE 302. Un pot opaque contient 5 boules, indiscernables au toucher, portant des numéros de 1 à 5. On tire successivement 2 boules du pot pour former des nombres en procédant comme suit :

- on tire une première boule qui indiquera le chiffre des dizaines du nombre,
- on tire une seconde boule du pot (sans avoir remis la première boule tirée) qui indiquera le chiffre des unités.

Par exemple, si on tire le 2 puis le 5 alors on dit qu'on a obtenu le nombre 25. On ne peut pas obtenir le nombre 55.

On note M l'événement « obtenir un nombre strictement supérieur à 46 » et N l'événement « obtenir un nombre pair ».

- Représentez l'expérience par un arbre probabiliste.
- Calculez $\mathbb{P}(M)$.
- Calculez $\mathbb{P}(N)$.
- Décrivez l'événement $M \cap N$ par une phrase puis calculez sa probabilité.
- Après avoir décrit l'événement $M \cup N$ par une phrase déduisez des questions précédentes la probabilité de $M \cup N$.

Corrections.

Exercice 284. ✍

- Rechercher ce que sont les issues. Qu'observe-t-on à l'issue de l'expérience ? Qu'est-ce qui correspond à une situation d'équiprobabilité ? Puis recensement de toutes les issues.

Une issue est un entier entre 1 et 6 donc :

$$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}.$$

- Recherche dans le dispositif expérimental des indicateurs concernant une éventuelle équiprobabilité : « parfaitement équilibré ».

L'expérience est régie par loi d'équiprobabilité puisque le dé est parfaitement équilibré et l'univers contient 6 issues donc la probabilité d'une issue est :

$$\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{6}.$$

- Déterminons $\mathbb{P}(B)$.

La rédaction qui suit n'est pas celle que nous utiliserons habituellement.

Par définition de la probabilité d'un événement et puisque $B = \{4; 4; 5; 6\} : \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\})$. Il y a équiprobabilité et l'univers comporte 6 issues donc : $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}.$$

4. Calculons $P(A)$.

L'événement nous est présenté par une propriété il faut le traduire par un sous-ensemble de l'univers.

$$A = \{2; 4; 6\}.$$

- Il y a équiprobabilité.
- L'univers comporte 6 issues.
- A est réalisé par 3 issues.

Donc :

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

5. Calculons $P(A \cap B)$.

- Il y a équiprobabilité.
- L'univers comporte 6 issues.
- $A \cap B$ est formé des issues qui réalisent à la fois A et B . Il faut donc trouver les éléments communs aux deux ensembles.

$A \cap B = \{4; 6\}$ donc $A \cap B$ est réalisé par 2 issues.

donc :

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

6. Calculons $P(A \cup B)$.

$A \cup B$ est formé des issues qui réalisent A ou B (au moins l'un des deux). Il faut donc trouver les éléments des deux ensembles.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}.$$

7. Calculons $P(\overline{A})$.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 285.

1. Lorsque les résultats d'une expérience aléatoire comme ici sont formés de deux données (un nombre pour chaque dé) il est souvent intéressant de représenter l'expérience par un tableau double-entrée comme ci-dessous.

Cependant les arbres probabilistes peuvent aussi être utilisés et permettent de représenter davantage de situations que le tableau double-entrée.

	1	2	3	4	5	6
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
6	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

Ainsi l'univers est formé de 36 couples correspondant aux résultats obtenus sur les deux dés.

2. L'événement dont il est question n'ayant pas de nom nous allons lui en donner un. Notons E : « obtenir 6 sur les deux dés ».

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

$$E = \{(6; 6)\}.$$

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et E est réalisé par une issue donc

$$P(E) = \frac{1}{36}.$$

3. Déterminons les sommes associées à chaque issue sous forme d'un tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$$A = \{(1; 2), (2; 1)\}.$$

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et A est réalisé par 2 issues donc $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{36}$.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{18}.$$

Pour cette question nous aurions pu choisir une modélisation alternative.

En choisissant comme issue la somme des nombres sur les deux faces nous obtenons comme univers : $\Omega = \{2; 3; 4; \dots; 11; 12\}$. Et la loi de probabilité correspondante est alors :

Issues	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Proba	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarquons tout de même que pour faire cette modélisation nous avons en fait utilisé de façon implicite l'équiprobabilité de la précédente modélisation.

4. Déterminons les sommes associées à chaque issue sous forme d'un tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$$B = \{(1; 6), (2; 3), (3; 2), (6; 1)\}.$$

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et B est réalisé par 4 issues donc $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{36}$.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{9}.$$

5. Calculons $\mathbb{P}(C)$.

$$C = \emptyset.$$

Peu importe la loi de probabilité dans ce cas puisqu'il s'agit d'un événement impossible :

$$\mathbb{P}(C) = 0.$$

6. Calculons $\mathbb{P}(D)$.

L'événement D rassemblant de nombreuses issues nous préférons (mais ce n'est pas une obligation) considérer un événement contraire.

$\overline{D}$: « la somme est inférieure (ou égale) à 3 » donc : $\overline{D} = \{((1; 1))\}$.

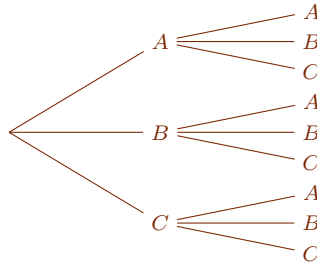
Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et $\overline{D}$ est réalisé par 1 issues donc $\mathbb{P}(\overline{D}) = \frac{1}{36}$.

Donc : $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D}) = 1 - \frac{1}{36}$.

$$\mathbb{P}(D) = \frac{35}{36}.$$

Exercice 286. ✍

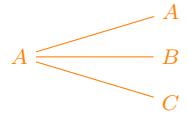
1.



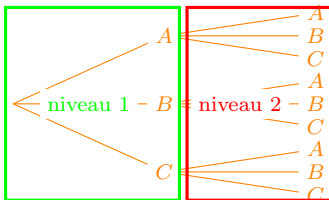
Ainsi $\Omega = \{AA; AB; AC; BA; BB; BC; CA; CB; CC\}$.

Un peu de vocabulaire sur les arbres.

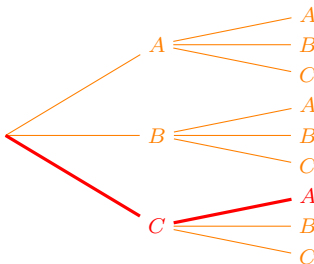
- Les lettres sont appelés des **nœuds** : ici A , B et C sont des nœuds. Le premier nœud n'est pas désigné par une lettre et est appelé la racine de l'arbre.
- Les segments qui relient deux nœuds sont appelés des **branches** : $A \text{ — } B$ est une branche.



- Un **embranchement** est formé d'un nœud et des branches qui en partent :
- Un **niveau** est formé de tous les embranchements qui sont également éloignés de la racine :



- Un **chemin** est formé d'une succession de nœuds et de branches qui partent de la racine pour aboutir à une feuille de l'arbre. En rouge ci-dessous est indiqué un chemin :



Dans un arbre probabiliste ce sont les chemins et non les nœuds qui représentent les issues. Dans cet arbre il y a 9 chemins qui correspondent à autant d'issues. Les issues sont souvent désignés par la succession (dans l'ordre) des nœuds : CA est le chemin passant d'abord par C puis par A .

2. Notons E_1 : « Les deux personnes s'assoient sur le banc A . »

Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

$$E_1 = \{AA\}$$

Il y a équiprobabilité, E_1 est réalisé par 1 issue et l'univers comporte 9 issues, donc

$$P(E_1) = \frac{1}{9}.$$

3. Notons E_2 : « Les deux personnes s'assoient sur le même banc. »

Calculons $\mathbb{P}(E_2)$.

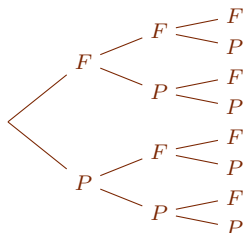
$$E_2 = \{AA; BB; CC\}$$

Il y a équiprobabilité, E_2 est réalisé par 3 issues et l'univers comporte 9 issues, donc

$$P(E_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 287. ✍

- 1.



Une issue de cette expérience est ici formée d'un triplet de résultats de pile ou face. Par exemple FPF est l'issue obtenir d'abord pile, puis face et enfin pile.

2. (a) Calculons $\mathbb{P}(FFF)$.

Il y a équiprobabilité et l'univers comporte 8 issues donc :

$$\mathbb{P}(FFF) = \frac{1}{8}.$$

- (b) Notons A : « le deuxième jet est face ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$$A = \{FFF, FFP, PFF, PFP\}.$$

Il y a équiprobabilité, A est réalisé par 4 issues et l'univers contient 8 issues donc $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8}$.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}.$$

- (c) Notons B : « le troisième jet est différent du premier ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

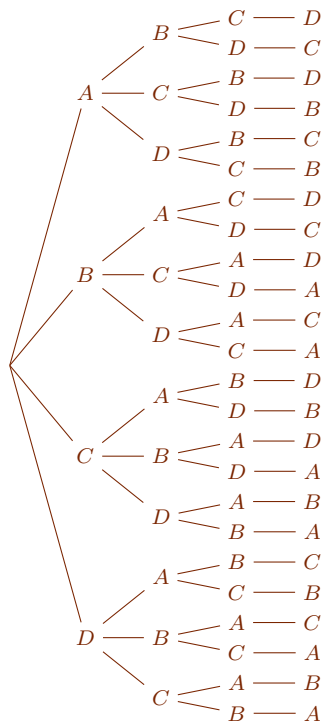
$$B = \{FFP, FPP, PFF, PPF\}.$$

Il y a équiprobabilité, B est réalisé par 4 issues et l'univers contient 8 issues donc $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{8}$.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 288. ✍

1. L'arbre est particulièrement recommandé pour représenter une situation où des choix successifs sont fait : chaque niveau de l'arbre correspond un choix. Ainsi les niveaux de l'arbre représentent une chronologie.



L'univers contient 24 issues.

Rappelons qu'une issue correspond à un chemin sur l'arbre donc ici une issue peut être représentée par une succession de 4 lettres.

2. Calculons $P(E)$.

$E = \{BACD; BADC; BCAD; BCDA; BDAC; BDCA\}$.

Il y a équiprobabilité, E est réalisé par 6 issues, l'univers contient 24 issues, donc

$$P(E) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Calculons $P(F)$.

$F = \{ABDC; ADBC; BADC; BDAC; DABC; DBAC\}$.

Il y a équiprobabilité, F est réalisé par 6 issues, l'univers contient 24 issues, donc

$$P(F) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Calculons $P(G)$.

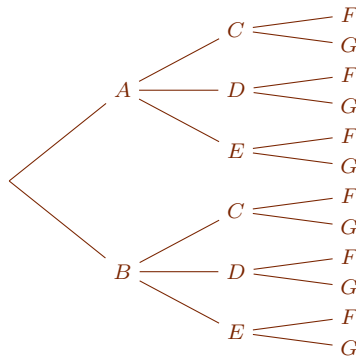
$G = \{ACDB; ADBC; ADCB; CADB; CDAB; CDBA; DABC; DACB; DBAC; DBCA; DCAB; DCBA\}$.

Il y a équiprobabilité, G est réalisé par 12 issues, l'univers contient 24 issues, donc

$$P(G) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 289.

1. En utilisant des notations transparentes au vu de l'énoncé :



L'univers comporte donc 12 issues. Par exemple BDF est une issue.

2. D'après l'arbre

12 menus sont possibles.

3. (a) Notons M_1 : « le menu comporte une escalope ».

Calculons $\mathbb{P}(M_1)$.

$M_1 = \{AEF, AEG, BEF, BEG\}$

Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et M_1 est réalisé par 4 issues donc :

$$\mathbb{P}(M_1) = \frac{4}{12}.$$

$$\mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{3}.$$

(b) Notons M_2 : « le menu comporte de l'artichaut et du fromage ».

Calculons $\mathbb{P}(M_2)$.

$M_2 = \{ACF, ADF, AEF\}$

Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et M_2 est réalisé par 3 issues donc :

$$\mathbb{P}(M_2) = \frac{3}{12}.$$

$$\mathbb{P}(M_2) = \frac{1}{4}.$$

(c) Notons M_3 : « le menu ne comporte pas de cheval ».

Calculons $\mathbb{P}(M_3)$.

$\overline{M_3} = \{ACF, ACG, BCF, BCG\}$

Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et $\overline{M_3}$ est réalisé par 4 issues donc :

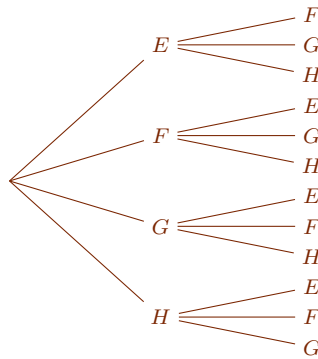
$$\mathbb{P}(\overline{M_3}) = \frac{4}{12}.$$

Nous en déduisons : $\mathbb{P}(M_3) = 1 - \mathbb{P}(\overline{M_3}) = 1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12}$.

$$\mathbb{P}(M_3) = \frac{2}{3}.$$

Exercice 290. ✍

1.



2. (a) Notons R_1 : « un garçon rame ».

Calculons $\mathbb{P}(R_1)$.

$$R_1 = \{EF, EG, EH, GE, GF, GH\}$$

Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et R_1 est réalisé par 6 issues donc :

$$\mathbb{P}(R_1) = \frac{6}{12}.$$

$$\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{2}.$$

- (b) Notons R_2 : « Hélène écope ».

Calculons $\mathbb{P}(R_2)$.

$$R_2 = \{HE, HF, HG\}$$

Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et R_2 est réalisé par 3 issues donc :

$$\mathbb{P}(R_2) = \frac{3}{12}.$$

$$\mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{4}.$$

- (c) Notons R_3 : « les deux qui travaillent sont de même sexe ».

Calculons $\mathbb{P}(R_3)$.

$$R_3 = \{EG, H, GE, HF\}$$

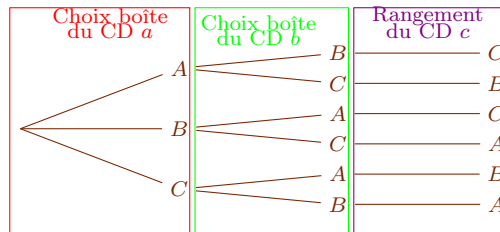
Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et R_3 est réalisé par 4 issues donc :

$$\mathbb{P}(R_4) = \frac{4}{12}.$$

$$\mathbb{P}(R_3) = \frac{1}{3}.$$

Exercice 291. 

1.



2. (a) Notons E_1 : « les trois CD sont bien rangés ».

Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

$$E_1 = \{ABC\}.$$

La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'univers comporte 6 issues et E_1 est réalisé par une issue donc :

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{6}.$$

- (b) Notons E_2 : « exactement un CD est bien rangé ».

Calculons $\mathbb{P}(E_2)$.

$$E_2 = \{ACB, BAC, CBA\}.$$

La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'univers comporte 6 issues et E_2 est réalisé par 3 issues donc : $\mathbb{P}(E_2) = \frac{3}{6}$.

$$\mathbb{P}(E_2) = \frac{1}{2}.$$

- (c) Notons E_3 : « exactement deux CD sont bien rangés ».

Calculons $\mathbb{P}(E_3)$.

$$E_3 = \emptyset.$$

$$\mathbb{P}(E_3) = 0.$$

3. Notons E_4 : « aucun CD n'est bien rangé ».

Calculons $\mathbb{P}(E_4)$.

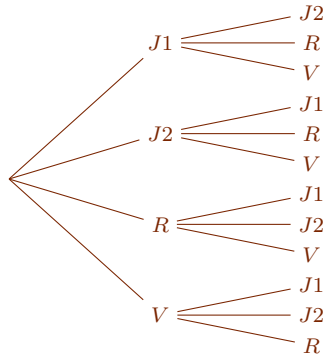
$$\overline{E_4} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

Comme E_1 , E_2 et E_3 sont incompatibles (disjoints) deux à deux : $\mathbb{P}(\overline{E_4}) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{2}{3}$. Donc : $\mathbb{P}(E_4) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E_4}) = 1 - \frac{2}{3}$.

$$\mathbb{P}(E_4) = \frac{1}{3}.$$

Exercice 292. ✍

1. La modélisation la plus simple (car utilisant l'équiprobabilité) nécessite de distinguer les deux jetons jaunes : $J1$ et $J2$.



2. D'après l'arbre précédent : $\#(\Omega) = 12$.

Il y a 12 tirages possibles.

3. (a) Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R})$.

$$\tilde{R} = \{RJ1, RJ2, RV\}.$$

Il y a équiprobabilité, $\tilde{R}$ est réalisé par 3 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{3}{12}$.

$$\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{1}{4}.$$

Calculons $\mathbb{P}(\tilde{J})$.

$\tilde{J} = \{J1J2, J2J1, RJ1, RJ2, VJ1, VJ2\}$.

Il y a équiprobabilité, $\tilde{J}$ est réalisé par 6 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{6}{12}$.

$$\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{1}{2}.$$

(b)

$\tilde{R} \cap \tilde{J}$: « le premier jeton est rose et le second est jaune ».

Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J})$.

$\tilde{R} \cap \tilde{J} = \{RJ1, RJ2\}$.

Il y a équiprobabilité, $\tilde{R} \cap \tilde{J}$ est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{2}{12}$.

$$\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{1}{6}.$$

(c) Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J})$.

Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

$$\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) = \mathbb{P}(\tilde{R}) + \mathbb{P}(\tilde{J}) - \mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}.$$

$$\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) = \frac{7}{12}.$$

4. (a) Calculons $\mathbb{P}(N)$.

$N = \{VR, RV\}$.

Il y a équiprobabilité, N est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(N) = \frac{2}{12}$.

$$\mathbb{P}(N) = \frac{1}{6}.$$

(b)

$\overline{N}$: « au moins un jeton est jaune ».

(c) Calculons $\mathbb{P}(N)$.

Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

$$\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(\overline{N}) = 1 - \frac{1}{6}.$$

$$\mathbb{P}(N) = \frac{5}{6}.$$

Exercice 293. ✎ Choisir un élève parmi les 35 est une expérience aléatoire nous modélisons cette expérience par un univers de 35 issues muni de l'équiprobabilité (chaque élève a autant d'être choisi qu'un autre).

Remarquons que, comme tout modélisation, le choix de l'équiprobabilité est arbitraire.

1. Calculons $\mathbb{P}(E \cap F)$.

Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $E \cap F$ est réalisé par 6 issues et l'univers comporte 35 issues donc

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \frac{6}{35}.$$

2. Calculons $\mathbb{P}(E \cup F)$.

Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $E \cup F$ est réalisé par $10+4+6+4 = 24$

issues et l'univers comporte 35 issues donc

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \frac{24}{35}.$$

3. Calculons $\mathbb{P}(\overline{E} \cup \overline{F})$.

Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $\overline{E} \cap \overline{F}$ est réalisé par $8 + 3 = 11$ issues et l'univers comporte 35 issues donc

$$\mathbb{P}(\overline{E} \cup \overline{F}) = \frac{11}{35}.$$

4. Calculons $\mathbb{P}(E \cup \overline{F})$.

Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $E \cup \overline{F}$ est réalisé par $8 + 3 + 4 + 6 = 21$ issues et l'univers comporte 35 issues donc

$$\mathbb{P}(E \cup \overline{F}) = \frac{21}{35}.$$

Exercice 294. ✎ Illustre bien le fait que sur un univers fini muni de l'équiprobabilité probabilité et proportions se confondent.

1.

	Aime	N'aime pas	Ne connaît pas	Total
Garçons	8	16	16	40
Filles	1	16	18	35
Total	9	32	34	75

2. Nous choisissons l'équiprobabilité sur un univers de 75 issues pour modéliser l'expérience aléatoire.

(a) Notons G : « la fiche est celle d'un garçon ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

Il y a équiprobabilité, G est réalisé par 40 issues et l'univers contient 75 issues donc : $\mathbb{P}(G) = \frac{40}{75}$.

$$\mathbb{P}(G) = \frac{8}{15}.$$

(b) Notons H : « la fiche est celle d'un garçon qui aime les chants grégoriens ».

Calculons $\mathbb{P}(H)$.

Il y a équiprobabilité, H est réalisé par 8 issues et l'univers contient 75 issues donc :

$$\mathbb{P}(G) = \frac{8}{75}.$$

(c) Notons L : « la fiche est celle d'un garçon ou un élève qui aime le chant grégorien ».

Calculons $\mathbb{P}(L)$.

Il y a équiprobabilité, L est réalisé par $8 + 16 + 16 + 1 = 41$ issues et l'univers contient 75 issues donc :

$$\mathbb{P}(G) = \frac{41}{75}.$$

3. Puisque la fiche est tirée parmi celle des garçons l'univers est modifié. Choisissons une modélisation adaptée.

Choisissons la loi de probabilité uniforme sur un univers de 40 issues.

Notons M : « la fiche est celle d'un garçon qui aime le chant grégorien ».

Calculons $\mathbb{P}(M)$.

Il y a équiprobabilité, M est réalisé par 8 issues et l'univers contient 40 issues donc : $\mathbb{P}(M) = \frac{8}{40}$.

$$\mathbb{P}(M) = \frac{1}{5}.$$

Vous verrez l'année prochaine un outils qui permet de faire ce genre de calcul sans avoir besoin de choisir une nouvelle modélisation appelé la probabilité conditionnelle.

Exercice 295. ✍ Commençons par modéliser cette situation avec l'équiprobabilité.

Notons $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, Bl_1, Bl_2, R\}$ et munissons cet univers de l'équiprobabilité.

Notons

- E_1 : « obtenir le bleu »,
- E_2 : « obtenir le blanc »,
- E_3 : « obtenir le rouge ».

Comme dans tous les exercices précédents : $\mathbb{P}(E_1) = \frac{3}{6}$, $\mathbb{P}(E_2) = \frac{2}{6}$ et $\mathbb{P}(E_3) = \frac{1}{6}$.

Les trois couleurs ne sont pas équiprobables.

Considérons une autre modélisation.

On considère $\Omega = \{B, Bl, R\}$ muni de la loi de probabilité :

ω	B	Bl	R
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Nous avons bien une probabilité puisque la somme des probabilités égale 1.

Les probabilités sont alors immédiates et la conclusion est bien

les trois couleurs ne sont pas équiprobables.

Exercice 296. ✍ Pour cet exercice, à titre d'exemple je choisis une modélisation qui n'utilise pas l'équiprobabilité.

1. Au brouillon avec un tableau double entrée :

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Ce qui nous permet de choisir une modélisation.

Notons $\omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ et munissons Ω de la loi :

ω	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. Notons A : « obtenir un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$A = \{2; 4; 6; 8\}$.

Par définition :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) + \mathbb{P}(\{8\})$$

D'après la loi de probabilité (tableau ci-dessus) :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}.$$

3. Notons B : « obtenir un multiple de trois ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$B = \{3; 6\}$.

Par définition :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{6\})$$

D'après la loi de probabilité (tableau ci-dessus) :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2}{16} + \frac{3}{16}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{5}{16}.$$

Exercice 297.

1. (a) Modélisons la situation. Sans indication spécifique on peut estimer que toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées : il y a équiprobabilité. Ainsi l'univers formé des 52 cartes est muni de la loi uniforme.

La moitié des cartes étant rouges :

la probabilité d'obtenir une carte rouge est $\frac{1}{2}$.

- (b) Un quart des cartes étant des piques :

la probabilité d'obtenir un pique est $\frac{1}{4}$.

- (c) Il y a quatre valets parmi les 52 cartes donc

la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

- (d) Il y a deux dames de couleur rouge parmi les 52 cartes donc

la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.

- (e) Il y a 26 cartes rouges et deux dames noires parmi les 52 cartes donc

la probabilité d'obtenir une carte de couleur rouge ou une dame est $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$.

2. Déterminons le nombre N de cartes joker rajoutées.

La probabilité d'obtenir une des N cartes joker parmi les $52 + N$ cartes est (en supposant toujours l'équiprobabilité) : $\frac{N}{52+N} = \frac{1}{14}$. On en déduit par un produit en croix : $14N = 52 + N \Leftrightarrow 14N - N = 52 + N - N \Leftrightarrow 13N = 52 \Leftrightarrow \frac{13N}{13} = \frac{52}{13}$.

$$N = 4.$$

Exercice 298. ✍

1. Les deux nombres étant distincts il peut prendre le nombre de jeton égale soit au plus grand des deux nombres obtenus, c'est-à-dire 3, soit le double du plus petit donc $2 \times 2 = 4$, soit encore passer son tour et n'obtenir aucun jeton.

L'ensemble des cas possibles est $\{3; 4; 0\}$.

2. En distinguant les deux dés, un tirage est assimilable à un couple de nombre entiers compris (au sens large) entre 1 et 6. Par exemple (1,3) représente l'événement obtenir 1 avec le premier dé et 3 avec le second.

Intuitivement :

L'ensemble des tirages permettant d'obtenir 3 est $\{(1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1)\}$.

Pour s'en convaincre nous pouvons représenter dans un tableau double entrée le nombre de jetons obtenus en fonction des résultats des dés (sans tenir compte de la possibilité de passer son tour qui rajouterai un zéro dans chaque casse du tableau.

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2 3	2 4	2 5	2 6
2	2	2	4 3	4	4 5	4 6
3	3 2	3 4	3	6 4	6 5	6
4	4 2	4	4 6	4	8 5	8 6
5	5 2	5 4	5 6	5 8	5	10 6
6	6 2	6 4	6	6 8	6 10	6

3. (a) Notons A : « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Les deux dés étant bien équilibrés il semble naturel de modéliser la situation en choisissant pour univers l'ensemble des 36 couples de nombres que donnent les dés et pour loi de probabilité la loi uniforme (équiprobabilité).

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et $A = \{(2,3),(3,2)\}$ est réalisé par deux issues donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{36}.$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{18}.$$

- (b) Notons B : « au moins un des nombres obtenus est 3 ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et

$$B = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(2,6),(3,5),(3,4),(3,2),(3,1)\}$$

est réalisé par 11 issues donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}.$$

- (c) Notons C : « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et, d'après ce tableau

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2 3	2 4	2 5	2 6
2	2	2	4 3	4	4 5	4 6
3	3 2	3 4	3	6 4	6 5	6
4	4 2	4	4 6	4	8 5	8 6
5	5 2	5 4	5 6	5 8	5	10 6
6	6 2	6 4	6	6 8	6 10	6

C est réalisé par 13 issues donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{13}{36}.$$

4. Il n'y a aucun lien entre deux lancés de dé. Les lancés sont indépendants. Ces sont des expériences aléatoires indépendantes et par conséquent

la probabilité reste identique.

5. Il peut prendre $2 \times 1 = 2$ jetons ou 4 jetons.

Il ne peut pas prendre 4 jetons puisqu'il a déjà 12 jetons et qu'il dépasserait l'objectif de 15 jetons.

S'il prend les 2 jetons il en aura maintenant 14 et il devra n'en obtenir qu'un seul ensuite. Or la probabilité d'obtenir un seul jeton est de $\frac{1}{36}$ et celle d'obtenir directement 3 jetons est bien plus élevée.

Il est préférable qu'il passe son tour en espérant obtenir un 3 au tour suivant.

Exercice 299.

1. (a) Notons T_1 : « elle touche un bateau au premier tir ».

Calculons $\mathbb{P}(T_1)$.

L'univers est formé des $8 \times 8 = 64$ cases de la grille. Les choix d'une telle case sont supposés équiprobables. T_1 est réalisé par 12 issues, à savoir les cases grisées : (A,4), (B,4), ...

donc $\mathbb{P}(T_1) = \frac{12}{64}$.

$$\mathbb{P}(T_1) = \frac{3}{16}.$$

- (b) Calculons $\mathbb{P}(\overline{T_1})$.

$$\mathbb{P}(\overline{T_1}) = 1 - \mathbb{P}(T_1) = 1 - \frac{3}{16}.$$

$$\mathbb{P}(\overline{T_1}) = \frac{13}{16}.$$

- (c) Déterminons le nombre n_c de cases formant le bateau recherché.

Il y a équiprobabilité entre les cases, il y a 64 cases au total, est l'événement T_2 : « le bateau recherché est touché » est réalisé par n_c cases donc : $\mathbb{P}(T_2) = \frac{n_c}{64}$. Or, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{16}$ donc : $\frac{1}{16} = \frac{n_c}{64} \Leftrightarrow \frac{1}{16} \times 64 = \frac{n_c}{64} \times 64 \Leftrightarrow 4 = n_c$.

Le bateau recherché est formé de 4 cases.

- (d) Notons T_3 : « toucher un bateau en tirant dans la colonne B ».

Calculons $\mathbb{P}_2(T_3)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 8 cases de la colonne B qui sont toutes équiprobables et l'événement T_3 regroupe les 4 cases grisées de la colonne B donc : $\mathbb{P}_2(T_3) = \frac{4}{8}$.

$$\mathbb{P}_2(T_3) = \frac{1}{2}.$$

2. Notons T_4 : « couler le bateau au coup suivant ».

Calculons $\mathbb{P}_3(T_4)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 3 cases qui entourent la case E1 et qui permettent de placer un bateau et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_4 regroupe la seule case grisée adjacente à E1 donc

$$\mathbb{P}_3(T_4) = \frac{1}{3}.$$

3. L'utilisation du présent dans l'énoncé des questions 3 et 4 crée une ambiguïté. Nous admettons que la question 2 n'a pas eu lieu.

Notons T_5 : « toucher un bateau après deux coups dans l'eau suivant ».

Calculons $\mathbb{P}_4(T_5)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des $64 - 2 = 62$ cases qui n'ont pas été visées et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_5 regroupe les 12 cases grisées donc : $\mathbb{P}_4(T_5) = \frac{12}{62}$.

$$\mathbb{P}_4(T_5) = \frac{6}{31}.$$

Exercice 300.

1.

	Nombres d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles	20 (1)	60 (2)	80
Nombre de garçons	16	54 (3)	70 (4)
Total	36	114	150

* Nombre de filles : 80.

* 24 % des élèves sont musiciens : $\frac{24}{100} \times 150 = 36$.

* Parmi les élèves musiciens 16 sont des garçons.

Les autres les valeurs se déduisent par sommes ou différences dans l'ordre (1), (2), (3) puis (4) (d'autres ordres sont possibles).

2. (a) Notons G l'événement « l'élève choisi est un garçon ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

Modélisons l'expérience aléatoire : Ω , l'univers, est l'ensemble des élèves, et nous le munissons de l'équiprobabilité.

G est réalisé par 70 issues, Ω en contient 150 donc : $\mathbb{P}(G) = \frac{70}{150}$. Des décompositions en facteurs premiers $70 = 2 \times 5 \times 7$ et $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ nous déduisons la forme irréductible de la réponse :

$$\mathbb{P}(G) = \frac{7}{15}.$$

- (b) Notons FM : « l'élève est une fille musicienne ».

Calculons $\mathbb{P}(FM)$.

FM étant réalisé par 20 issues donc : $\mathbb{P}(FM) = \frac{20}{150} = \frac{2^2 \times 5}{2 \times 3 \times 5^2}$.

$$\mathbb{P}(FM) = \frac{2}{15}.$$

- (c) Notons M : « l'élève est un musicien ».

Calculons $\mathbb{P}(\overline{M})$.

$\overline{M}$ est réalisé par 114 issues donc : $\mathbb{P}(\overline{M}) = \frac{114}{150} = \frac{2 \times 3 \times 19}{2 \times 3 \times 5^2}$.

$$\mathbb{P}(\overline{M}) = \frac{19}{25}.$$

3. Avec les probabilités conditionnelles :

Calculons $\mathbb{P}_G(M)$.

$$\mathbb{P}_G(M) = \frac{\mathbb{P}(G \cap M)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\frac{16}{150}}{\frac{70}{150}} = \frac{16}{70} = \frac{2^4}{3 \times 5 \times 7}.$$

$$\mathbb{P}_G(M) = \frac{16}{70}.$$

Il est possible de raisonner en changeant de modélisation.

Notons Ω l'ensemble 70 garçons et munissons-le de l'équiprobabilité.

Dans cet univers M est réalisé par 16 donc : $\mathbb{P}(M) = \frac{16}{70}$.

4. Calculons la proportion de musiciennes d'instruments à vent dans l'école.

* Le nombre de filles jouant d'un instrument à vent est : $\frac{30}{100} \times 20 = 6$.

* La proportion représentée par les 6 filles est $\frac{6}{150} = \frac{1}{25}$.

Enfin, comme $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$.

4 % des élèves sont des filles jouant d'un instrument à vent.

Exercice 301. Il faut calculer la probabilité de l'événement contraire.

Exercice 302.

1. Il y a 20 issues au total et il y a équiprobabilité.
2. $\mathbb{P}(M) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.
3. $\mathbb{P}(N) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.
4. $M \cap N$: « obtenir un nombre strictement supérieur à 46 qui soit pair. » $\mathbb{P}(M \cap N) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.
5. $M \cup N$: « obtenir un nombre pair ou un nombre supérieur à 46 ». $\mathbb{P}(M \cup N) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$.

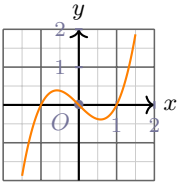
Partie 6. Analyse.

I Généralités sur les fonctions.

Ce qui attendu d'un élève de lycée.

L'objectif est que vous soyez capable de traduire géométriquement, graphiquement, une formule de calcul.

Au collège vous avez étudié des fonctions affines dont les courbes représentatives sont des droites. Voici une autre fonction $f(x) = x^3 - x$ dont la courbe représentative est ci-dessous.



Notre objectif sera d'apprendre à jongler entre l'aspect géométrique (la courbe) et l'aspect algébrique (la formule de calcul).

Y a-t-il des valeurs de x pour lesquelles il n'y a pas de point de la courbe	Étude du domaine de définition, recherche des valeurs interdites.
La courbe est-elle au-dessus de l'axe des abscisses ?	Étude du signe de $f(x)$.
La courbe monte-t-elle ou descend-t-elle ?	La fonction est-elle croissante ou décroissante ?
Pente de la courbe en chaque point.	Nombre dérivé.
La courbe est-elle arrondie ou avec des angles piquants ?	Étude de la dérivabilité de la fonction
En certaines parties la courbe ne ressemble-t-elle pas à une droite ?	Étude des tangentes et asymptotes.
L'arrondi de la courbe se fait-il vers le haut ou vers le bas ?	Étude de la convexité de la fonction.
Étude du signe de la différence de deux fonctions.	Position relative des courbes.
Aire sous la courbe.	Calcul intégral.

Équations de courbes.

Les courbes (les lignes) sont des ensembles infinis de points. Une façon de décrire une courbe consiste à donner une relation de calcul qui lie abscisse et ordonnée de chacun des points de la courbe, une équation liant l'abscisse x et l'ordonnée y de chaque point de la courbe. Ainsi : $x^2 + y^2 = 16$ ou $2x - y + 1 = 0$ ou $y = x^2$ sont des équations de courbes. La première correspond à un cercle la seconde à une droite.

Nous nous intéresserons aux courbes dont l'équation est de la forme $y = f(x)$ qui sont les courbes associées à des fonctions.

Définition de la fonction.

Une fonction f indique des liens entre des nombres. Par exemple pour indiquer que f relie le nombre 2 au nombre 3 nous écrirons : $f(2) = 3$.

Nous dirons alors que 2 est *un antécédent* de 3 par f . Nous dirons aussi que 3 est *l'image* de 2 par f .

Définition 34. Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de nombres. On définit une *fonction f sur $\mathcal{D}$* en associant à chaque nombre x appartenant à $\mathcal{D}$ un seul nombre y , noté $f(x)$. Nous dirons que f est une fonction de la *variable x* . La *courbe représentative de f* , que nous noterons souvent $\mathcal{C}_f$ est l'objet géométrique formé de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ est *l'ensemble* (ou *domaine*) *de définition* de f .

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des nombres auxquels un nombre est associé par f . On dit que f est définie sur $\mathcal{D}$.

$$f : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto y \end{cases}$$

Cette présentation se lit : « la fonction f , définie sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui à x associe y ».

x est *un antécédent* de y par f .

y est *l'image* de x par f . On le note $f(x)$ et on lit « f de x ».

Remarques.

1. Pour désigner la fonction (et donc tous les liens qu'elle représente) nous écrirons $x \mapsto y$ ou $f : x \mapsto y$ (et non pas $f(x)$).
2. La première ligne ($\mathcal{D}$ et $\mathbb{R}$) est celle des ensembles, la seconde (x et y) celle des variables.
3. La première colonne ($\mathcal{D}$ et x) correspond à l'axe des abscisses, la seconde ($\mathbb{R}$ et $y = f(x)$) à celui des ordonnées.
4. Le préfixe « anté- » signifie avant (latin).
5. « un » antécédent car il peut y en avoir plusieurs.
6. « l' » image car (par construction) il ne peut y en avoir qu'une.

Exemples.

1. Fonction définie par un diagramme sagittal.
2. Fonction définie par une situation géométrique : l'aire d'un rectangle en fonction de la longueur d'un côté.
3. La fonction qui à un nombre de points associe le nombre d'arêtes du graphe.
4. Le mot « fonction » est utilisé pour la première fois par Gottfried Leibniz (1646-1716) à la fin du XVII^e siècle à propos de l'étude des courbes. La notion est ensuite affinée par Leonhard Euler (1707-1783) qui définit les fonctions à partir d'expression algébriques littérales (comme, par exemple, $2x + 4xx$) et qui est le premier à utiliser la notation $f(x)$. Enfin, la fonction en tant que correspondance, telle qu'on la définit aujourd'hui, n'émerge qu'au milieu du XIX^e siècle, pour devenir une notion réellement centrale en mathématiques.

Représenter des liens par une formule de calcul ou un procédé implicite.

Très souvent les liens entre les nombres seront représentés par des calculs. Par exemple nous écrirons

$$f : x \mapsto 2x - 1,$$

et nous lirons « la fonction f qui à x associe $2x - 1$ », pour indiquer qu'à chaque nombre x choisi nous associerons le résultat du calcul $2x - 1$. Ce lien que vous avez déjà rencontré au collège définit une fonction affine.

Exemples.

1. Les fonctions affines. $f : x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Les fonctions linéaires. $f : x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
3. Les fonctions constantes. $f : x \mapsto b$ où $b \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
4. La fonction carré. $x \mapsto x^2$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
5. La fonction cube. $f : x \mapsto x^3$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
6. La fonction inverse. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
7. La fonction racine carrée. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[= \mathbb{R}_+$. Définition avec une phrase définissant la racine carrée : l'unique nombre positif qui élevé au carré égale x . Nous n'avons pas de formule de calcul pour $\sqrt{x}$. Nous ne connaissons pas de procédé de calcul de ces valeurs mais seulement des algorithmes, des programmes, qui permettent d'obtenir des valeurs approchées aussi précises que possibles.

Remarques.

1. Les noms et formules littérales des fonctions données en exemples, qui sont appelées des fonctions de référence, sont à connaître par cœur.
2. Si, pour les modélisations en sciences expérimentales (physique, chimie, biologie, géologie, économie,...), les fonctions constantes et linéaires correspondent à des modélisations spécifiques, pour l'étude mathématique, elles ne sont que des cas particuliers de fonctions affines.
3. Pour la fonction racine carrée nous n'avons pas réellement une formule. Nous ne connaissons que les racines carrées des carrés parfaits (0, 1, 4, 9, 16, ...). L'utilisation du symbole $\sqrt{}$ n'indique pas un procédé de calcul pour obtenir ne serait-ce qu'une valeur approchée de la valeur désirée. Nous verrons des algorithmes pour obtenir des valeurs approchées. Ainsi pour obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de $\sqrt{x}$:

```
v=0
while v**2<x:
    v=v+0.01
print(v-0.01)
```

Il s'agit, hormis pour les carrés parfaits, d'un procédé de définition implicite : la racine carrée est l'antécédent positif par la fonction carrée.

Tableau de valeurs.

Il est possible de représenter des nombres reliés par une fonction en les plaçant en vis-à-vis dans un tableau. Par exemple, en utilisant la fonction affine précédente, nous voyons : $f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3$.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

Nous utiliserons en général la calculatrice pour obtenir le tableau.

Exemples.

1. Déterminons le tableau de valeurs de $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ pour x allant de -1 à 2 avec un pas de 0,5.

2. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$. Complétons le tableau de valeurs :

x	0	2	3,5	10^{15}
$f(x)$				

Remarques.

1. Vous devez savoir obtenir un tableau de valeurs avec votre calculatrice en modifiant éventuellement les pas (écart entre deux valeurs de x).

Représentation graphique.

Définition 35. Soient $\mathcal{D}$ un ensemble de nombres, $f : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ une fonction.

La *représentation graphique* de f , que nous noterons souvent $\mathcal{C}_f$ est l'objet géométrique formé de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ (dans un certain repère) lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $\mathcal{D}$.

Remarques.

1. La courbe représentative (pas le dessin mais l'ensemble des couples $(x; f(x))$) est le point de vue retenu pour la définition générale d'une fonction. L'ensemble des couples $(x, f(x))$ est appelé le *graphe* de la fonction.
2. Comme $f(x)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse x nous dirons aussi que $\mathcal{C}_f$ est la *courbe d'équation $y = f(x)$* .
3. Le tableau de valeurs est donc formé des coordonnées de points de la représentation

graphique de la fonction :

x	abscisse du point
$y = f(x)$	ordonnée du point.

Exemples. Dressez un tableau de valeurs puis avec la représentation graphique fournie par la calculatrice, tracez les courbes représentatives des fonctions de références en se limitant à la partie de l'ensemble de définition incluse dans $[-2; 2]$.

1. Fonction affine. La courbe est une *droite* (nous le démontrerons après avoir défini proprement les droites).
2. Fonction carré. La courbe est une *parabole*.
3. Fonction cube.
4. Fonction inverse. La courbe est une *hyperbole*.
5. Fonction racine carrée. La courbe est une branche de parabole.

Tableau de signe.

Étudier le signe d'une fonction c'est déterminer le signe du nombre $f(x)$ en fonction des diverses valeurs prises par x . Plus précisément c'est déterminer pour quelles valeurs de x , $f(x)$ est strictement positif, strictement négatif et enfin nul.

Une autre façon de le dire : c'est résoudre les inéquations $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ et l'équation $f(x) = 0$.

Le tableau de signe est un tableau ressemblant au tableau de valeurs qui permet de résumer l'étude du signe d'une fonction f . Autrement dit c'est une schématisation de la position de la courbe représentative de la fonction par rapport à l'axe des abscisses. Confer la leçon sur le tableau de signe et celle sur les fonctions de références à titre d'exemples.

Exemples.

1. Aspect analytique. Étudions le signe de $f : x \mapsto 2x - 1$.

$$\begin{aligned}
 f(x) > 0 &\Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \\
 &\Leftrightarrow 2x - 1 + 1 > 0 + 1 \\
 &\Leftrightarrow 2x > 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x}{2} > \frac{1}{2} \text{ car } 2 > 0 \\
 &\Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[
 \end{aligned}$$

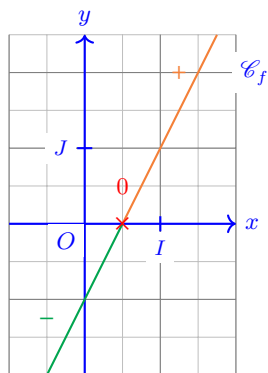
De même : $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

On résume cette étude par :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$-$	0	$+$

Cette façon de procéder nécessite que nous améliorions nos compétences en matière de résolution d'inéquations.

2. Aspect géométrique.



Partie de la courbe correspondant à des $f(x)$ strictement positifs.

Partie de la courbe correspondant à des $f(x)$ nuls.

Partie de la courbe correspondant à des $f(x)$ strictement négatifs.

On retrouve :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$-$	0	$+$

Tableau de variation.

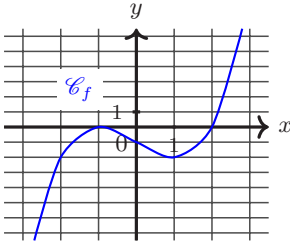
Le tableau de variation est un tableau ressemblant au tableau de signe qui permet de résumer l'étude des variations d'une fonction f . Autrement dit c'est une schématisation du fait que la courbe représentative de la fonction monte ou descend. Confer les fonctions de références à titre d'exemples.

Pour l'instant nous nous contenterons de lectures graphiques pour déterminer la variation d'une fonction. Nous ferons quelques démonstrations plus tard. Confer la leçon sur les variations.

Les fiches d'identité des fonctions de références.

Exercices.

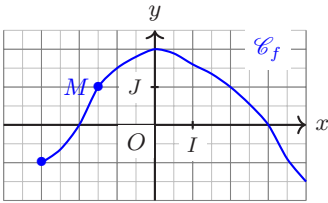
EXERCICE 303. On considère ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f .



Complétez le tableau de valeurs suivant.

x	-2		0		2
$f(x)$		0		-2	

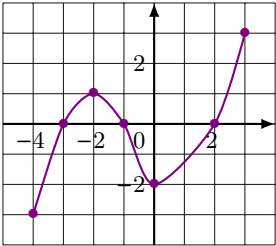
EXERCICE 304. Une fonction f est représentée ci-dessous dans un repère (O,I,J) .



Répondez aux questions suivantes sans justification.

1. Donnez l'ensemble de définition de f .
2. Quel est l'image de 2 par f .
3. Quel est l'ensemble des antécédents de 0 par f ?
4. Quel est l'ensemble des antécédents de -2 par f ?
5. Quel est l'ensemble des antécédents de 2 par f ?
6. Quel est l'ensemble des antécédents de 2,5 par f ?
7. Si x appartient à $[-1;5]$ que peut-on dire de $f(x)$?
8. Quel est l'abscisse de M ?
9. Quel est l'ordonnée de M ?

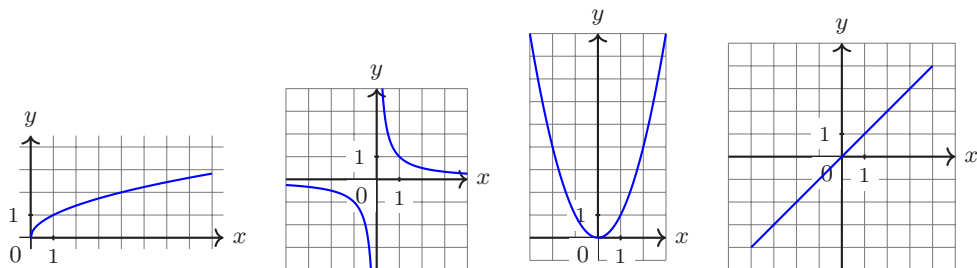
EXERCICE 305. On considère une fonction f définie sur $[-4;3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



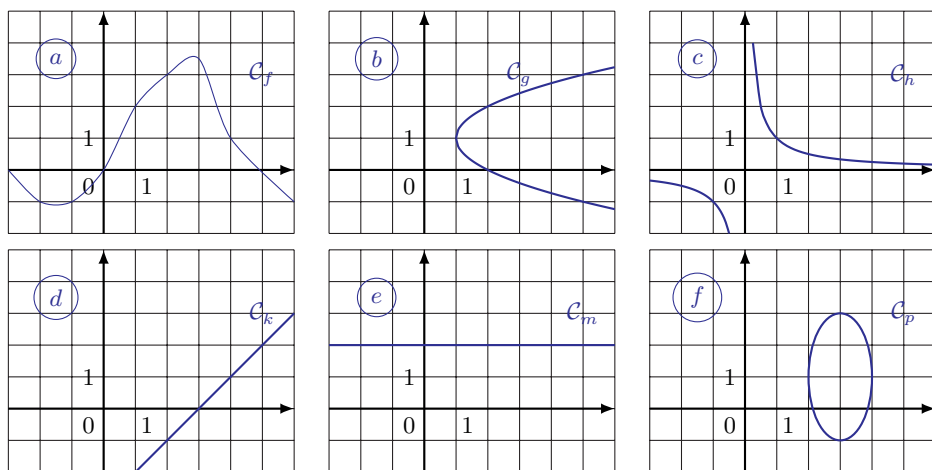
1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quels sont le (ou les) antécédent(s) de 0 par f ?
3. Combien d'antécédent(s) possède 2?

4. Quel est le nombre d'antécédent(s) de 1 ?
5. Donner un nombre réel m qui n'a qu'un unique antécédent par f .
6. Donner le nombre d'antécédent(s) de t par f , suivant les valeurs de t .

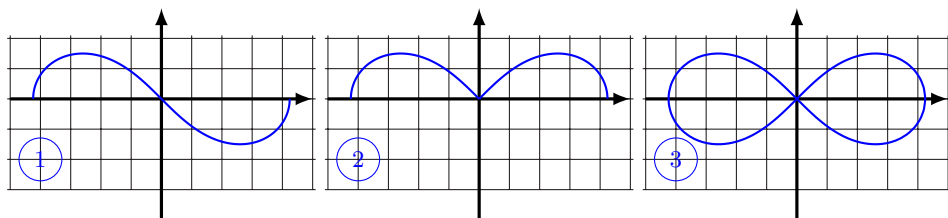
EXERCICE 306. Associez, sans aucune justification, chaque fonction à sa courbe représentative. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$, $f_2 : x \mapsto x$, $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$, $f_4 : x \mapsto x^2$.

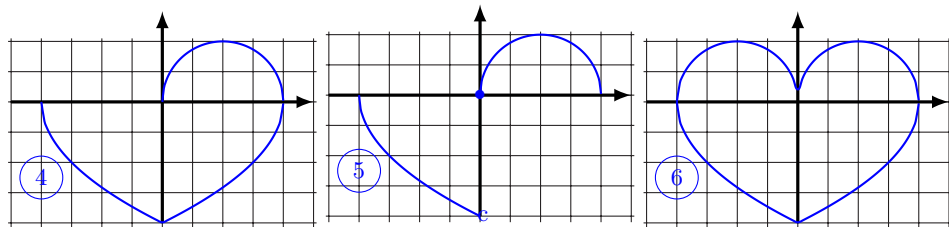


EXERCICE 307. Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?



EXERCICE 308. Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?





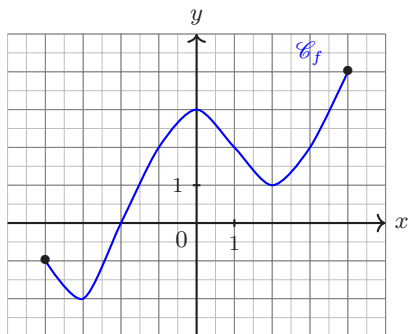
EXERCICE 309. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = 2x^2 - 4x - 1$ (i.e. la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 4x - 1$), où x est un réel de l'intervalle $[-2; 2]$.

- Les points $A(0; 2)$ et $B(-1; 7)$ appartiennent-ils à $\mathcal{C}$?
 - Calculez l'ordonnée du point D de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse est 2.
- Construisez un tableau de valeur de y pour x variant de -2 à 2 avec un pas de 1.
 - Tracez $\mathcal{C}$ dans un repère.

EXERCICE 310. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f : x \mapsto 2x^2 + 6$.

- Donnez sans justification le tableau de valeurs de f pour x variant de -2 à $0,5$ avec un pas de $0,5$.
- Tracez $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.
- Le point $M(0,4; 2,72)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?
- Quelle est l'ordonnée du point K de $\mathcal{C}$ d'abscisse $0,3$?
- Déterminez algébriquement l'abscisse de chacun des points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 8.

EXERCICE 311. Une fonction numérique f est représentée ci-après.



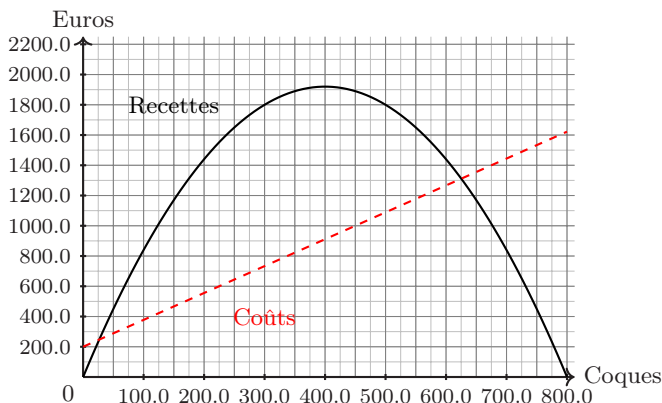
Dans cet exercice nous adopterons la notation suivante : $f([0; 1])$ désignera l'ensemble de toutes les images des nombre compris entre 0 et 1, $f^{-1}([0; 1])$ désignera l'ensemble de tous les antécédents des nombres compris entre 0 et 1.

Déterminez $f([0; 1])$, $f([1; 3])$, $f^{-1}([0; 1])$ et enfin $f^{-1}([-2; 2])$.

EXERCICE 312. Soient $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

- Donnez l'ensemble de définition de f .
- Donnez l'ensemble de définition de g .
- Déduisez des deux questions précédentes l'ensemble de définition de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

EXERCICE 313. Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles. Sur le graphique donné ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de coques fabriquées exprimé en centaines d'unités. Les ateliers permettent la fabrication de 0 à 800 coques. Les recettes et les coûts sont exprimés euros.



Les réponses aux questions suivantes sont à justifier par lecture graphique avec, éventuellement, des tracés sur le graphique.

1. Étude du coût.

- Quel est le coût de production de 125 coques ?
- Pour quelle quantité de coques fabriquées le coût est-il de 1 000 euros ?

2. Étude de la recette.

- Quelle est la recette occasionnée par la vente de 500 coques ?
- Pour quel nombre de coques fabriquées la recette est-elle de 1 300 euros ? de 2 000 euros ?

3. Étude du bénéfice.

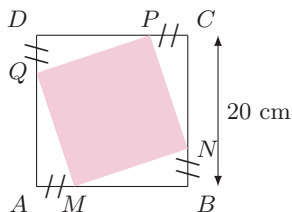
- Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût. Quel est le bénéfice pour une production de 450 coques ?
- Lorsque le bénéfice est positif on dit que l'entreprise est bénéficiaire. Dans quels cas l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

4. Étude des variations des recettes.

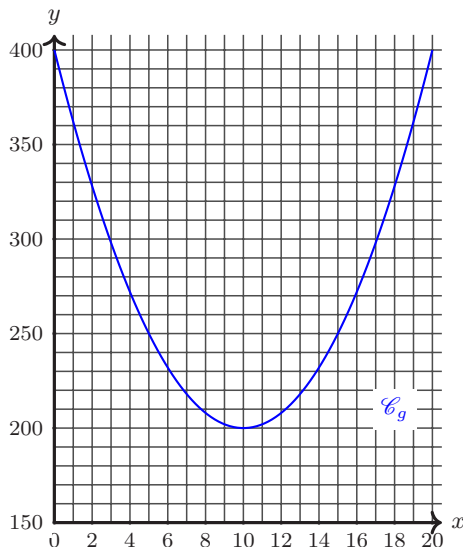
- Lorsque le nombre de coques produites augmente de 0 à 800, les coûts vont croissants. Que peut-on dire des variations des recettes lorsque le nombre de coques produites augmente de 0 à 800 ?
- Proposez une explication possible à ces variations.
- Quel est la recette maximale que peut engendrer la vente des coques ? pour quelle nombre de coques fabriquées la recette est-elle maximale ?
- Quel nombre de coques faut-il recommander à l'entrepreneur de produire ?

EXERCICE 314.

Dans un carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-contre. On pose $x = AM = BN = CP = DQ$. Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ exprimée en cm^2 , que nous noterons $g(x)$, dépasse 272 cm^2 .



1. Déterminez le domaine de définition, $\mathcal{D}_g$ de g .
2. Démontrez que : $g(x) = 2x^2 - 40x + 400$, pour tout $x \in \mathcal{D}_g$.
3. Dressez le tableau de variation de la fonction g d'après sa représentation graphique donnée ci-après.



4. Précisez les extrema de la fonction g d'après le précédent tableau de variation.
5. Complétez le tableau de valeurs donné ci-après sans aucune justification.

x	3	5	7	8,5	10,5	11	13,5	15	17	19
$g(x)$										

6. Utilisez la représentation graphique ci-dessus pour conjecturer l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) > 272$.
7. On se propose de retrouver par le calcul les solutions de l'équation $g(x) = 272$.
 - (a) Prouvez que $g(x) = 272$ équivaut à $2x^2 - 40x + 128 = 0$.
 - (b) On note $f(x) = 2x^2 - 40x + 128$ pour tout x réel. Vérifiez que $f(x) = (8-2x)(16-x)$ pour tout nombre x réel.
 - (c) Résolvez l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 315. Exercice 35 page 56 du manuel lelivrescolaire.fr.

EXERCICE 316. Exercice 41 page 57 du manuel lelivrescolaire.fr.

Corrections.

Exercice 303. Par lecture graphique :

x	-2	-1 ou 2	0	-2 ou 1	2
$f(x)$	-2	0	-1	-2	0

Exercice 304. Par convention : sur une courbe représentative dessinée (contrairement à ce que montre la calculatrice) toute l'information est visible. Un point signifie que la courbe s'arrête à cet endroit. Si la courbe continue jusqu'au bord c'est que la courbe continue indéfiniment de la même façon.

1. $\mathcal{D}_f = [-3, +\infty[$.
2. $f(2) = 1$.
3. L'ensemble des antécédents de 0 par f est $\{-2; 3\}$
4. L'ensemble des antécédents de -2 par f est $\emptyset$.
5. L'ensemble des antécédents de 2 par f est $\{0\}$.

6. L'ensemble des antécédents de 2,5 par f est $\emptyset$.

7. Si x appartient à $[-1,5;1]$ alors $f(x) \in [1;2]$.

8. $x_M = -1,5$.

9. $y_M = 1$.

Exercice 305.

1. $\mathcal{D}_f = [-4;4]$?

2. L'ensemble des antécédents de 0 par f est $\{-3;-1;2\}$.

3. 2 admet un unique antécédent par f (à savoir 2,6).

4. 1 admet deux antécédents par f (à savoir -2 et 2,4).

5. 3 n'a qu'un unique antécédent par f (à savoir 3).

6. Donnons le nombre, $n(t)$, d'antécédents de t par f , suivant les valeurs de t dans un tableau.

t	$t < -2,5$	$-2,5 \leq t < -2$	$t = -2$	$-2 < t < 1$	$t = 1$	$1 < t \leq 3$	$3 < t$
$n(t)$	0	1	2	3	2	1	0

Exercice 306. De droite à gauche les représentation graphiques sont : $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$ (fonction racine carrée), $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ (fonction inverse), $f_4 : x \mapsto x^2$ (fonction carré), $f_2 : x \mapsto x$ (fonction identité).

Exercice 307. a , c , d et e correspondent à des fonctions.

Exercice 308. Seules les courbes 1, 2 et 5 sont des courbes représentatives de fonctions. Les autres ne respectent l'unicité de l'image associée à une valeur de départ. La figure 3 est appelé le lemniscate de Bernoulli tandis que la 6 est appelée une cardioïde.

Exercice 309. ✎ Les fonctions sont des outils assez récents mais la géométrie repérée s'intéressait aux courbe depuis longtemps. Ce sont les équations (égalités liant abscisses et ordonnées) qui étaient privilégiées. Vous pouvez comprendre $y = 4x^2 - 2x - 1$ comme $f : x \mapsto 4x^2 - 2x - 1$.

1. Le point A est un point de la courbe représentative de f , autrement dit $A \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si $A(x_A; f(x_A))$. Autrement dit si $f(x_A) = y_A$.

*

$$\begin{aligned}f(x_A) &= f(0) \\&= 2 \times 0^2 - 4 \times 0 - 1 \\&= -1\end{aligned}$$

Comme $f(x_A) \neq y_A$

$$A \notin \mathcal{C}_f.$$

* De même

$$\begin{aligned}f(x_B) &= f(-1) \\&= 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) - 1 \\&= 5\end{aligned}$$

puisque $f(x_B) \neq y_B$

$$B \notin \mathcal{C}_f.$$

2. Puisque $D \in \mathcal{C}_f$:

$$y_D = f(x_D)$$

Or, d'après l'énoncé, $x_D = 2$ donc

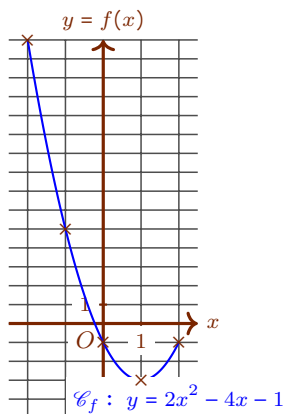
$$\begin{aligned}y_D &= f(2) \\&= 2 \times 2^2 - 4 \times 2 - 1 \\&= -1\end{aligned}$$

$$D(2; -1).$$

3. (a) D'après la calculatrice :

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	15	5	-1	-3	-1

(b)

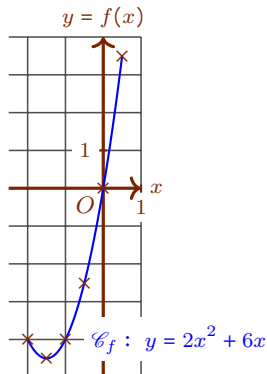


Exercice 310.

1. Tableau de valeurs de y (alias f).

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
$y = f(x)$	-4	-4,5	-4	-2,5	0	3,5

2. (a)



3. $f(0,4) = 2 \times 0,4^2 + 6 \times 0,4 = 2,72$.

$$M \in \mathcal{C}_f.$$

4. (a) $f(0,3) = 1,98$. Donc

$$K(0,3; 1,98).$$

- (b) Si un point N est sur la courbe $\mathcal{C}_f$ alors ses coordonnées sont de la forme $(x; f(x))$.
Donc dire que l'ordonnée de N vaut 0 signifie que $f(x) = 0$. Nous cherchons x tel que

$$f(x) = 0$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$2x^2 + 6x = 0$$

Il s'agit d'une équation qui n'est pas linéaire : nous essayons de nous ramener à une équation produit-nul.

$$\begin{aligned} 2x \times x + 6 \times x &= 0 \\ (2x + 6) \times x &= 0 \\ 2x + 6 &= 0 \quad \text{ou} \quad x = 0 \\ 2x + 6 - 6 &= 0 - 6 \quad \text{ou} \quad x = 0 \\ 2x &= - \quad \text{ou} \quad x = 0 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{-6}{2} \quad \text{ou} \quad x = 0 \\ x &= -3 \quad \text{ou} \quad x = 0 \end{aligned}$$

Les points d'ordonnées 0 de $\mathcal{C}_f$ ont pour coordonnées $(-3; 0)$ et $(0; 0)$.

Exercice 311. $f([0; 1]) = [2; 3]$, $f([1; 3]) = [1; 4]$, $f^{-1}([0; 1]) = [-2; -1,5] \cup \{2\}$ et $f^{-1}([-2; 2]) = [-3; -1] \cup [1; 2]$.

Exercice 312. $\mathcal{D}_f = [0, +\infty[$, $\mathcal{D}_g =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g =]0, +\infty[$.

Exercice 313.

1. (a) 400.
(b) 450
2. (a) 1800.
(b) Recette de 1300 euros pour 175 coques. Recette de 2000 euros jamais atteinte.
3. (a) Le bénéfice est l'écart entre les deux courbes. 900.
(b) $[25; 625]$.
4. (a) De 0 à 400 les recettes sont croissantes. puis de 400 à 800 elles décroissent.
(b) D'abord à la mode puis tout le monde en a et donc plus personne n'achète. Effet ostentatoire.
(c) Recette maximale : 1925 pour 400 coques fabriquées.
(d) Bénéfice maximal pour 350.

Exercice 314.

1. Déterminons $\mathcal{D}_g$.

$$\left. \begin{array}{l} x = AM \\ M \in [AB] \\ AB = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in [0; 20].$$

$$\mathcal{D}_g = [0; 20].$$

2. Utilisons la notation $\mathcal{A}$ pour désigner les différentes aires.

Déterminons $g(x)$.

Soit $x \in [0; 20]$.

$$\mathcal{A}(MNPQ) = \mathcal{A}(ABCD) - 4 \times \mathcal{A}(AMQ)$$

Puisque $ABCD$ est un carré et puisque AMQ est rectangle en A :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(MNPQ) &= 20^2 - 4 \times \frac{1}{2}x(20 - x) \\ &= 400 - 2x(20 - x) \\ &= 400 - 40x + 2x^2 \\ &= 2x^2 - 40x + 400 \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0; 20], g(x) = 2x^2 - 40x + 400.$$

x	0	10	20
g	400	200	400

3.

4. D'après le précédent tableau de variation :

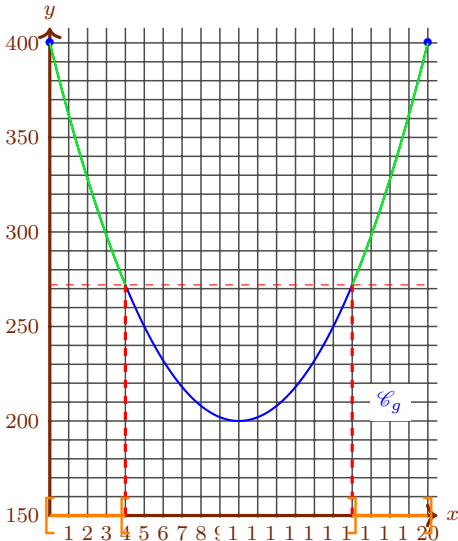
g admet un maximum égale à 400 qui est atteint pour $x = 0$ ou $x = 20$.
 g admet un minimum égale à 200 qui est atteint pour $x = 10$.

5. Avec la calculatrice :

x	3	5	7	8,5	10,5	11	13,5	15	17	19
$g(x)$	298	250	218	204,5	200,5	202	224,5	250	298	362

6. Par lecture graphique, l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) > 272$ est

$$\mathcal{S}_2 = [0; 4[\cup]16; 20].$$



7. (a) Démontrons l'équivalence.

$$\begin{aligned}
g(x) > 272 &\Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 400 = 272 \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 400 - 272 = 272 - 272 \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 128 = 0
\end{aligned}$$

$$g(x) = 272 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 128 = 0.$$

(b) Soit $x \in [0; 20]$.

Démontrons que $(8 - x)(16 - x) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
(8 - x)(16 - x) &= 8 \times 16 + 8 \times (-x) + (-2x) \times 16 + (-x) \times (-2x) \\
&= 128 - 8x - 32x + 2x^2 \\
&= 2x^2 - 40x + 128 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que, quelque soit $x \in [0; 20]$, $f(x) = (8 - 2x)(16 - x)$.

(c) Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

Soit $x \in [0; 20]$.

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow (8 - 2x)(16 - x) = 0 \\
&\Leftrightarrow 8 - 2x = 0 \quad \text{ou} \quad 16 - x = 0 \\
&\Leftrightarrow 8 - 2x - 8 = 0 - 8 \quad \text{ou} \quad 16 - x - 16 = 0 - 16 \\
&\Leftrightarrow -2x = -8 \quad \text{ou} \quad -x = -16 \\
&\Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2} \quad \text{ou} \quad \frac{-x}{-1} = \frac{-16}{-1} \\
&\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad x = 16
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est

$$\mathcal{S}_2 = \{4; 16\}.$$

Exercice 315.

- * $\mathcal{D}_1 = [0; 10,5]$. $f(0) = 0$ et $f(10,5) = 30$.
 * $\mathcal{D}_2 = [0; 7,3]$. $f(0) = 0$ et $f(7,3) = 30$.
 * $\mathcal{D}_3 = [0; 9,7]$. $f(0) = 0$ et $f(9,7) = 30$.

Les verres n'ont pas tous la même hauteur mais ils sont tous vides au début et leur contenance totale est la même.

- $V_1(5,5) = 16$, $V_2(3,65) = 3,5$, $V_3(4,85) = 7$.
 $V_1^{-1}(\{15\}) = \{5,3\}$, $V_2^{-1}(\{15\}) = \{5,8\}$, $V_3^{-1}(\{15\}) = \{7\}$.
- (6; 17) : pour une hauteur de 6 les verres 1 et 2 contiennent tout deux 17.
 (4; 4,9) : pour une hauteur de 4 les verres 1 et 3 contiennent tout deux 4,9.
 (9; 26) : pour une hauteur de 9 les verres 1 et 3 contiennent tout deux 26.
 (0; 0) : pour une hauteur nulle les verres ne contiennent pas de liquide.
- C'est impossible car il n'y a pas de points qui soit un point d'intersection pour les trois courbes simultanément hormis l'origine du repère qui correspond à des verres vides.

Exercice 316.

- $P(h) = 1$ si et seulement si $h = \frac{4}{3}$.
 $V_B = \frac{4}{3} \times V_{C(1)}$.

2. Il faut que $h = 2$ et dans ce cas :

$$h(2) = \frac{2}{3}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{V_B}{V_{C(2)}} &= \frac{2}{3} \\ \frac{V_B}{V_{C(2)}} \times V_{C(2)} &= \frac{2}{3} \times V_{C(2)} \\ V_B &= \frac{2}{3} V_{C(2)}\end{aligned}$$

II Fonctions de référence.

Fonction identité.

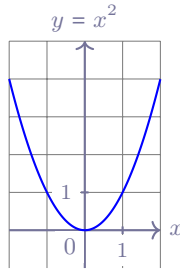
Les informations concernant la fonction identité relèvent de l'étude des fonctions affines. Il faut donc se référer à la leçon idoine.

Fonction carré.

Soit x un nombre réel. Le **carré de x** , qu'on note x^2 , est le nombre réel $x \times x$.

Définition 36. La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à chaque réel x associe son carré x^2 . Autrement dit :
$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

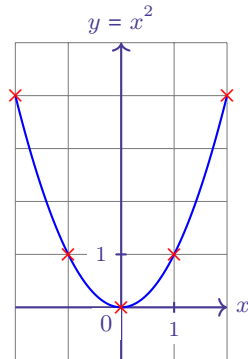
Avec la puissance de calcul des ordinateurs on peut obtenir une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction carré qui est appelée une **parabole** (ici pour $x \in [-2 ; 2]$).



Remarques.

1. Cette représentation graphique doit être apprise par cœur car cela résume l'ensemble des connaissances que vous devez avoir concernant la fonction carré. Ce graphique permet de conjecturer un certain nombre d'éléments de la fonction carrée : un axe de symétrie, le signe (toujours positif), les variations,...
2. La parabole présente une symétrie axiale dont l'axe est l'axe des ordonnées nous en reparlerons à propos de la parité.
3. Commençons à justifier ce tracé en donnant un tableau de valeurs minimaliste et donc les coordonnées de points de la courbe.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4



Proposition 35. Tableau de signe de la fonction carré :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$

Démonstration. Montrons que la fonction carré est positive (ou nulle).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le produit de deux nombres de même signe est un nombre positif donc :
 $x^2 = x \times x \geq 0$.

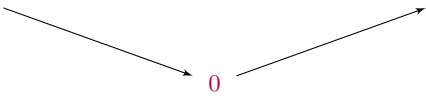
Recherchons les valeurs de x pour lesquelles x^2 égale 0.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x \times x = 0$ est une équation produit. Donc $x^2 = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 0$.
Autrement dit $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarques.

1. Nous retrouvons comme avec le tableau de valeurs que $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine du repère.
Nous pouvons ajouter que c'est le seul point de contact avec l'axe des abscisses et que le reste de $\mathcal{C}_f$ est situé strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

Proposition 36. Tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			

Démonstration. Montrons que la fonction carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques dans $[0 ; +\infty[$ tels que : $x_1 < x_2$.

D'une part :

$$x_1^2 \leq x_2 \times x_1, \text{ car } x_1 \geq 0$$

et d'autre part :

$$x_1 x_2 < x_2^2, \text{ car } x_2 x_2 > x_1 \geq 0$$

On en déduit :

$$x_1^2 \leq x_1 x_2 < x_2^2$$

et donc $x_1^2 < x_2^2$.

Nous avons démontrés que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons que la fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques dans $] -\infty ; 0]$ tels que : $x_1 < x_2$.

D'une part :

$$x_1^2 > x_2 \times x_1, \text{ car } x_1 x_1 < x_2 \leq 0$$

et d'autre part :

$$x_1 x_2 \geq x_2^2, \text{ car } x_2 x_2 \leq 0$$

On en déduit :

$$x_2^2 \leq x_1 x_2 < x_1^2$$

et donc $x_2^2 < x_1^2$.

Nous avons démontrés que la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Remarques.

1. Autrement dit : la fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
2. La fonction carrée n'est pas une fonction affine.

Démonstration. Nous avons vu qu'une fonction est affine si et seulement si son taux d'accroissement est constant (quelles que soient les valeurs choisies pour x_1 et x_2). Nous allons démontrer que le taux d'accroissement n'est pas constant. Déterminons deux taux d'accroissements distincts pour la fonction carrée.

Cas 1 : Si $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ alors le taux d'accroissement de la fonction carrée entre x_1 et x_2 est :

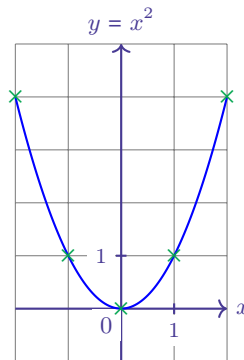
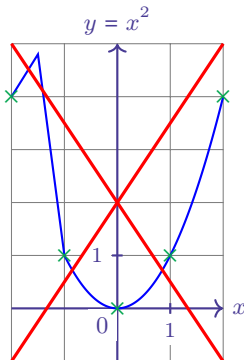
$$\tau = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = 1$$

Cas 2 : Si $x_1 = 0$ et $x_2 = -1$ alors le taux d'accroissement de la fonction carrée entre x_1 et x_2 est :

$$\tau = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = -1$$

Le taux d'accroissement n'est donc pas constant et la fonction carrée n'est pas une fonction affine.

3. Nous pouvons être sûrs qu'entre les points de coordonnées $(-2; 4)$ et $(-1; 1)$ la courbe ne fait que descendre et ne remonte pas (inutile de calculer de nombreuses valeurs intermédiaires).



Exemples.

1. $12 \times 10^{123} < 12 \times 10^{124}$ et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $(12 \times 10^{123})^2 < (12 \times 10^{124})^2$.

2. Résolvons l'inéquation $-\sqrt{x} < -17$.

La fonction carré étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$: $(-\sqrt{x})^2 > (-17)^2$ et donc $x > 289$.

$$\mathcal{S} =]289, +\infty[.$$

EXERCICE 317. Dans chaque cas comparez les nombres A et B sans utiliser la calculatrice.

a) $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ et $B = \left(\frac{4}{3}\right)^2$, b) $A = 1,001^2$ et $B = 1,0099^2$, c) $A = -2,3^2$ et $B = (-2,3)^2$.

EXERCICE 318. Encadrez x^2 , puis $3x^2$, le plus précisément possible, dans les cas suivants :

a) $1 \leq x \leq 4$, b) $-2 \leq x < -0,5$, c) $-2 \leq x < 3$,
d) $-10 \leq x \leq 10$.

EXERCICE 319. Recopiez et complétez sans justification les phrases suivantes.

a) Si $x \leq -7$, alors $x^2 \dots$ b) Si $x \geq 5\sqrt{2}$, alors $x^2 \dots$
c) Si $-7 \leq x \leq 5\sqrt{2}$, alors $\dots \leq x^2 \leq \dots$

EXERCICE 320. Prouvez que les propositions suivantes sont fausses.

a) Si $x \leq 1$, alors $x^2 \leq 1$. b) Si $x > -\sqrt{10}$, alors $x^2 < 10$.

EXERCICE 321. Résolvez graphiquement les inéquations.

a) $x^2 \leq 5$. b) $x^2 > 5$. c) x est négatif et $x^2 \leq 5$.

Fonction inverse.

Définition 37. La *fonction inverse* est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (tous les nombres sauf 0) par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Remarques.

1. La courbe représentative de la fonction inverse est appelée une *hyperbole*.
2. L'hyperbole présente une symétrie centrale dont le centre est l'origine du repère nous en reparlerons à propos de la parité.
3. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ peut aussi être noté $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ ou $\mathbb{R}^*$.

Proposition 37. Tableau de signe de la fonction inverse.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$-$	$ $	$+$

Démonstration. Si $x > 0$, alors : $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \times x > 0 \times x \Leftrightarrow 1 > 0$ et cette dernière assertion est vraie. De même si $x < 0$ alors $\frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0$ et cette dernière assertion est fausse. Le cas $x = 0$ est exclus car la fonction n'est pas définie en 0.

Proposition 38. Tableau de variation de la fonction inverse.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

Démonstration. Nous allons démontrer trois choses : la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, sur $\mathbb{R}_+$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

* Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$ tels que $x_1 < x_2$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &> \frac{x_2}{x_2} \quad \text{car } x_2 < 0 \\ \frac{x_1}{x_2} &> 1 \\ \frac{1}{x_1} \times \frac{x_1}{x_2} &< \frac{1}{x_1} \times 1 \quad \text{car } \frac{1}{x_1} < 0 \\ \frac{1}{x_2} &< \frac{1}{x_1} \end{aligned}$$

Donc

la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

* Idem pour $\mathbb{R}_+$.

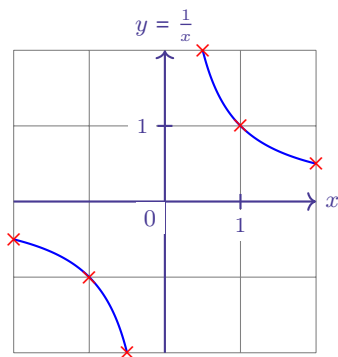
* $-2 < 2$ et pourtant $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ donc la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

1. Aux tableaux de signes et variations adjoignons un succinct tableau de valeurs :

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

et nous pouvons donner l'allure de la représentation graphique de la fonction inverse sur $[-2; 2]$.



Fonction racine carrée.

Définition 38. La *fonction racine carrée* est définie sur $[0; +\infty[$ (tous les nombres positifs) comme la fonction qui a tout $x \in \mathbb{R}_+$ associe l'unique nombre a positif tel que $a^2 = x$.

Remarques.

1. Il s'agit d'une définition implicite nous ne connaissons pas la valeur de a et qui plus son existence est affirmée sans être justifiée.
2. La fonction racine carrée étant définie sur $\mathbb{R}_+$ sa représentation graphique sera tout entière à droite de l'axe des ordonnées.
3. Pour des propriétés algébriques voyez la leçon sur la racine carrée.

Proposition 39. Tableau de signe de la fonction racine carrée.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	+

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition de la racine carrée d'un nombre positif.

Proposition 40. La fonction racine carrée est strictement croissante (sur $\mathbb{R}_+$).

Démonstration. Supposons $a < b$ et démontrons que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Nous allons en fait démontrer que $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$.

Puisque $a < b$:

$$b - a > 0.$$

Or, a et b étant positifs,

$$\begin{aligned} b - a &= \sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2 \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) \end{aligned}$$

donc

$$(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) > 0$$

Et comme $(\sqrt{b} + \sqrt{a}) > 0$:

$$\frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})} > \frac{0}{\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0}$$

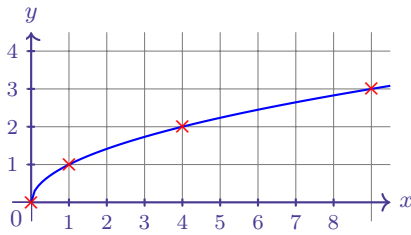
Ainsi dès que $a < b$ forcément $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Remarques.

1. Nous n'avons pas dressé le tableau de variation car la fonction racine carrée est strictement monotone et il est donc plus simple de le dire en français.
2. Ce résultat constitue une nouvelle façon de transformer une inéquation. Lorsque nous verrons $x^2 + x^4 < 8 + x^2$ alors nous pourrions affirmer que $\sqrt{x^2 + x^4} < \sqrt{8 + x^2}$.
3. Ajoutons aux précédentes informations un tableau de valeurs :

x	0	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	1	2	3

et nous pouvons donner l'allure de la représentation graphique de la fonction racine carrée :



4. La courbe représentative de la fonction racine carrée est une branche de parabole.

Fonction cube.

Définition 39. La *fonction cube* est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

Proposition 41. Tableau de signe de la fonction cube.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-$	0	$+$

Démonstration. Avec un tableau de signe en remarquant $x^3 = xx^2$.

Proposition 42. La fonction cube est strictement croissante (sur $\mathbb{R}$).

Démonstration.

* Démontrons que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Nous allons utiliser une identité remarquable qui vous est encore inconnue :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$.

Démontrons que $x_1^3 < x_2^3$.

Ou plutôt, ce qui revient au même démontrons que $x_2^3 - x_1^3 > 0$.

Pour étudier le signe d'une expression il vaut mieux qu'elle soit factorisée : $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$.

D'une part, par hypothèse,

$$x_2 - x_1 > 0.$$

D'autre part, puisque $0 \leq x_1 < x_2$: $x_1 \geq 0$, $x_1x_2 \geq 0$ et $x_2^2 > 0$ donc

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0.$$

Donc :

$$(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) > 0.$$

Ainsi, si $0 \leq x_1 < x_2$ alors $x_1^3 < x_2^3$.

Autrement dit

la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

* La fonction cube étant impaire nous en déduisons par symétrie, que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$.

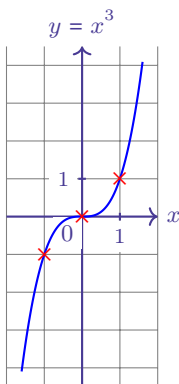
* Il reste à s'assurer que si $x_1 \leq 0 \leq x_2$ nous avons toujours conservation de l'ordre.

Remarques.

1. Ajoutons aux précédentes informations un tableau de valeurs :

x	-1	0	1
$\sqrt{x}$	-1	0	1

et nous pouvons donner l'allure de la représentation graphique de la fonction cube :



Fonction valeur absolue.

Confer la leçon correspondante. La valeur absolue est au programme de seconde mais l'étude de la fonction est plutôt du programme de première.

Positions relatives de fonctions de références.

La position relative des courbes d'équations $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ pour $x \geq 0$ est vue dans la leçon « Signe des fonctions et inéquations ».

Corrections.

Exercice 317.

- a) Comparons A et B .

Nous allons utiliser le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre.

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Or $\frac{3}{4} < 1 < \frac{4}{3}$ et $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ sont dans $[0; +\infty[$ donc

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 < \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

- b) Comparons A et B .

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Or $1,001 < 1,0099$ et $1,001$ et $1,0099$ sont dans $[0; +\infty[$ donc

$$1,001^2 < 1,0099^2.$$

c) Comparons A et B .

$-2,3^2$ n'est pas une image par la fonction carrée. La précédente méthode ne permet pas de conclure.

Clairement : $-2,3^2 < 0 < (-2,3)^2$

$$-2,3^2 < (-2,3)^2.$$

Exercice 318. Pour avoir un résultat très précis il faut raisonner algébriquement. Sinon une résolution graphique convient. Cette dernière est même parfois plus simple et efficace.

Exercice 319.

a) Si $x \leq -7$, alors $x^2 \geq 49$.

b) Si $x \geq 5\sqrt{2}$, alors $x^2 \geq 50$

c) Si $-7 \leq x \leq 5\sqrt{2}$, alors $0 \leq x^2 \leq 50$

Exercice 320.

a) $-2 \leq 1$, et pourtant $(-2)^2 > 1$.

b) $20 > -\sqrt{10}$, et pourtant $20^2 \geq 10$.

Exercice 321.

a) $x^2 \leq 5 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.

b) $x^2 > 5 \Leftrightarrow]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$.

c) x est négatif et $x^2 \leq 5$ si et seulement si $x \in [-\sqrt{5}, 0]$.

III Signe des fonctions et inéquations.

Analyse ou géométrie.

L'analyse (les fonctions) et la géométrie (courbe représentative) se nourrissent mutuellement. Cette leçon du point de vu géométrique cherche à répondre à la question : la courbe représentative de la fonction f est-elle au dessus ou au dessous de l'axe des abscisses ? Du point de vu analytique la question est : quelle est le signe de $f(x)$?

Nous verrons également un prolongement de ces questions : conjecturer par lecture graphique la résolution d'équations et d'inéquations.

Signe d'un nombre.

Le signe d'un nombre x prend trois valeurs différentes :

- *strictement positif* si $x > 0$,
- *strictement négative* si $x < 0$,
- *nul* si $x = 0$.

Remarques.

1. Il y a trois signes différents et non pas deux comme le croient nombre d'élèves.

Signe d'une fonction.

Définition 40. Soient E un ensemble de nombres réels, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On appelle *signe de f* la donnée du signe de $f(x)$ pour chaque x du domaine de définition de f .

Exemples.

1. $f : x \mapsto 2x + 3$. Pour $x = -1$, $f(x) = 1 > 0$. Pour $x = -3$, $f(x) = -3 < 0$. Pour $x = -\frac{3}{2}$. Les signes de ces trois images par la fonction f ne suffisent pas : il faut donner le signe de toutes les images.
2. La fonction carrée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et nulle en 0.

Remarques.

1. Le signe d'une fonction doit être donné pour toutes les valeurs de x et pas uniquement pour quelques-unes. Nous décrirons le signe d'une fonction intervalle par intervalle : « sur tel intervalle la fonction est strictement positive ».

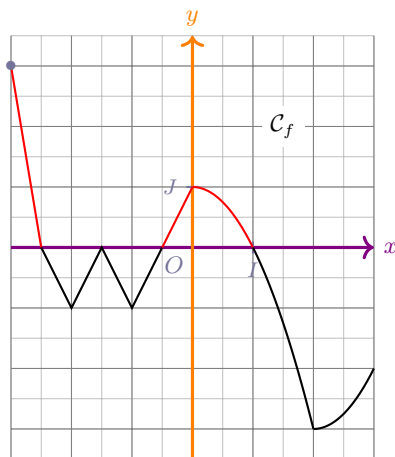
Tableau de signe.

Plutôt que de partir stricto sensu de la géométrie nous allons faire de la lecture graphique et donc conjecturer des résultats.

Le *tableau de signe* d'une fonction est une schématisation de sa courbe représentative qui indique le signe de $f(x)$ en fonction de la valeur de x .

Le tableau de signe indique donc les plus grands intervalles des valeurs prisent par x , pour lesquels :

- la fonction f est *strictement positive*,
- la fonction f est *strictement négative*,
- la fonction f est *nulle*.



Graphiquement les points de la courbe au-dessus de l'axe des abscisses correspondent à des valeurs positives de la fonction.

Nous décrirons cette situation en disant, par exemple :

f est strictement positive sur $[-3; -2,5[$,

f est strictement négative sur $] -2,5; -1,5[$,

f s'annule en chaque valeur de $\{-2,5; -1,5; -0,5; 1\}$.

Nous résumerons tout ceci dans le tableau de signe :

x	-3	$-2,5$	$-1,5$	$-0,5$	1	$+\infty$			
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Remarques.

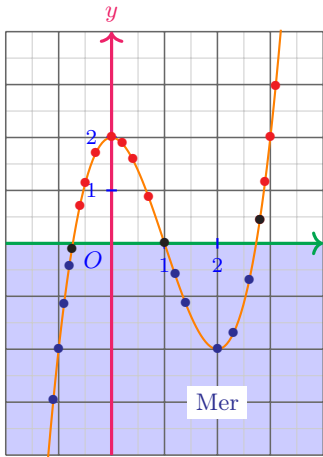
- On attend de l'élève qu'il soit capable de décrire à l'oral le signe : « la fonction est strictement positive sur l'intervalle » et cetera.
- Remarquez le décalage des inscriptions des signes sur la ligne du dessous et des nombres sur la première ligne. le signe est indiqué au milieu en dessous de l'intervalle qui est concerné.
- Il est encore possible d'interpréter ces résultats en termes d'inéquations :
 - $f(x) > 0$ si et seulement si $x \in [-3; -2,5[\cup] -0,5; 1[$,
 - $f(x) < 0$ si et seulement si $x \in] -2,5; -1,5[\cup] -1,5; -0,5[\cup] 1; 3]$,
 - $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{-2,5; -1,5; -0,5; 1\}$

Conjecturer graphiquement le signe d'une fonction.

Exemples.

- La courbe peut être vue comme un relief montagneux dont il s'agit de savoir s'il est au-dessus ou au-dessous de la mer qui est ici l'axe des abscisses. L'altitude du relief en-dessous du niveau de la mer est comptée négativement et positivement au-dessus.

L'axe des ordonnées indique l'altitude des points de la courbe.

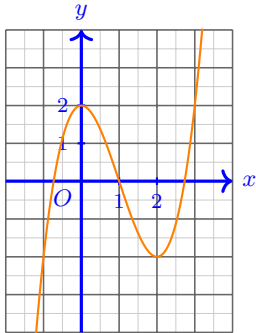


• Les points rouges sont des points au-dessus du niveau de la mer. Ils correspondent à des valeurs strictement positives (+) de la fonction.

L'axe des abscisses indique le niveau de la mer, l'altitude 0.

• Les points bleus sont des points au-dessous du niveau de la mer. Ils correspondent à des valeurs strictement négatives (-) de la fonction.
 • Les points noirs sont des points posés sur la mer. Ils correspondent à des valeurs nulles (0) de la fonction.

2. Voyons comment construire pratiquement un tableau de signe à partir d'une représentation graphique.



Étape 1 : dessiner le tableau.

x	
$f(x)$	

Étape 2 : en se déplaçant de gauche à droite (sens des x croissants) indiquer le signe de la fonction (+ ou - ou 0).

x	
$f(x)$	-

x	
$f(x)$	- 0

x	
$f(x)$	- 0 +

x	
$f(x)$	- 0 + 0

x	
$f(x)$	- 0 + 0 -

x	
$f(x)$	- 0 + 0 - 0

x	
$f(x)$	- 0 + 0 - 0 +

Étape 3 : préciser les valeurs de x pour lesquelles il y a des changements de signe (qui correspondront souvent au 0 du tableau de signe).

x	-1,7
$f(x)$	- 0 + 0 - 0 +

x	-1,7	1	2,8
$f(x)$	- 0 + 0 - 0 +		

x	-1,7	1	2,8
$f(x)$	- 0 + 0 - 0 +		

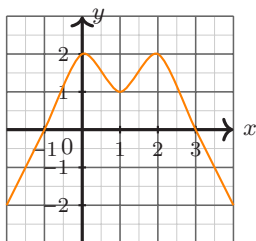
Étape 4 : préciser les bornes du domaine de définition (normalement ce devrait être la première étape mais dans un esprit de découverte des tableaux de signe j'ai fait le choix de le faire en dernier).

x	$-\infty$	-1,7	1	2,8	$+\infty$
$f(x)$		- 0 + 0 - 0 +			

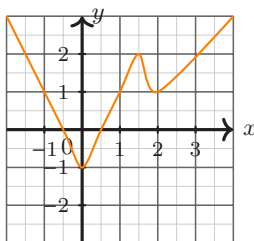
3. Un autre exemple de construction étape par étape consultable sur le Web. [Fichier à télécharger.](#)

EXERCICE 322. Dressez les tableaux de signe des fonctions (nommées génériquement f) représentées ci-dessous.

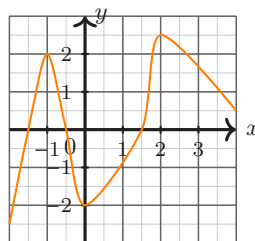
a)



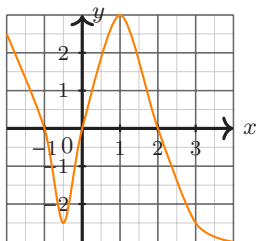
b)



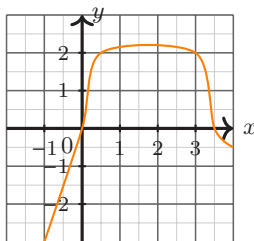
c)



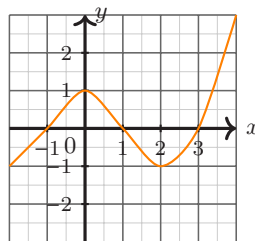
d)



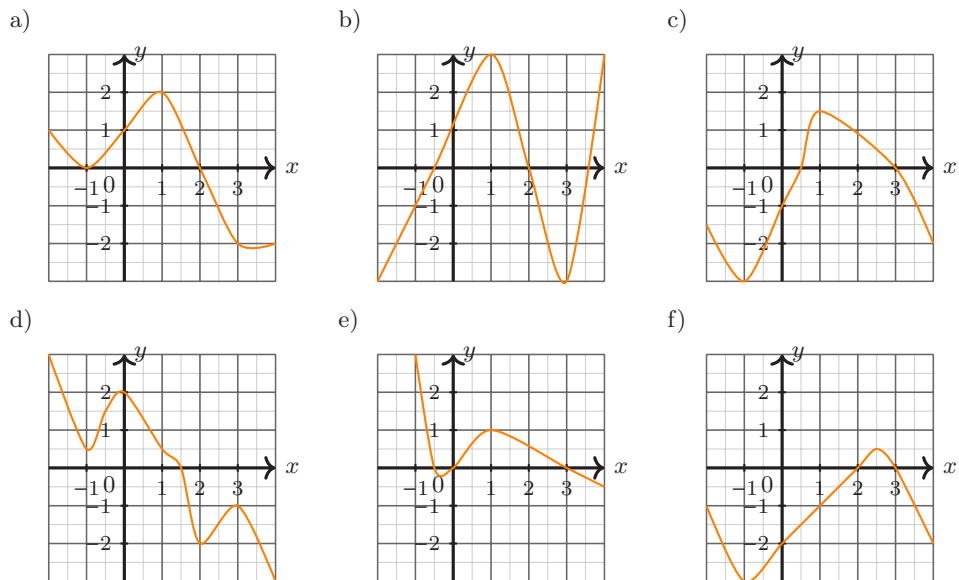
e)



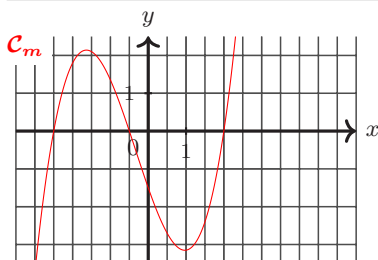
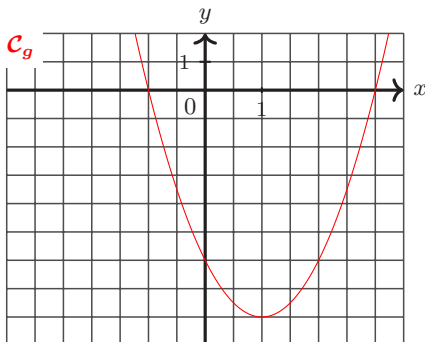
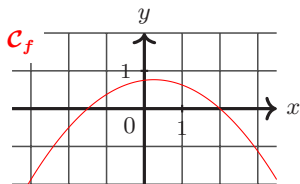
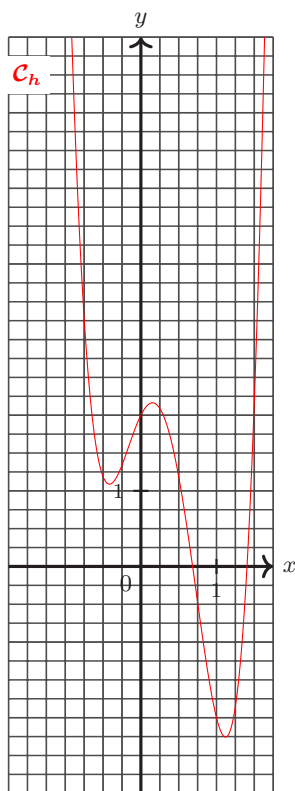
f)



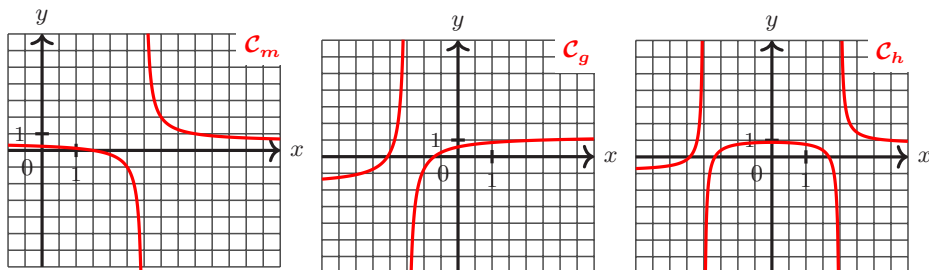
EXERCICE 323. Dressez les tableaux de signe des fonctions (nommées génériquement f) représentées ci-dessous.



EXERCICE 324. Dresser les tableaux de signes des fonctions représentées ci-dessous.



EXERCICE 325. À partir de chaque représentation graphique déterminez les valeurs pour lesquelles la fonction n'est pas définie, celles pour lesquelles la fonction est nulle, puis établissez le tableau de signes de cette fonction.



EXERCICE 326. Un artisan fabrique des vases qu'il met en vente. On suppose que tous les vases fabriqués sont vendus. L'artisan veut faire une étude sur la production d'un nombre de vases compris entre 0 et 60. Il estime que le bénéfice occasionné par la production puis la vente de n vases est modélisé par la fonction B dont l'expression est $B(n) = -n^2 + 60n - 500$.

1. Dessinez la courbe représentative de la fonction B sur $[0; 60]$.
2. Par lecture graphique donnez le tableau de signe de B .
3. Quel nombre de vases l'artisan doit-il fabriquer puis vendre pour réaliser un bénéfice ?
4. Quel nombre de vases l'artisan doit-il fabriquer puis vendre pour réaliser un bénéfice maximal ?

De l'analyse vers la géométrie.

Le plus souvent notre démarche en mathématique est celle contraire : à partir de l'expression algébrique déterminer si la courbe est au-dessus ou en-dessous de l'axe des abscisses.

Il n'existe pas de recette magique pour l'étude (démontrée) du signe d'une fonction. Cependant vous devez connaître déjà celles-ci :

- Étape 1 si la fonction fait partie des fonctions de référence (identité, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) vous devez connaître par cœur son signe,
- Étape 2 si la fonction fait partie de la classe des fonctions affines vous devez être capable d'en déterminer le signe (résultats de cours ou résolution d'inéquations du premier degré),
- Étape 3 si la fonction est un quotient ou un produit de fonctions de références ou affines vous devez utiliser des tableaux de signe et les deux points précédents,
- Étape 4 sinon, pour l'instant il ne vous reste que la conjecture grâce à un moyen informatique (ce qui pour des maths appliquées peut s'avérer très satisfaisant).

Il vous reste à consulter les leçons concernées.

Position relative de deux courbes.

Définition 41. Soient I un intervalle, f et g des fonctions définies sur I . La courbe représentative $\mathcal{C}_f$, de f , est dite *au-dessus de la courbe représentative $\mathcal{C}_g$, de g , sur I* si et seulement si : $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I$.

Remarques.

1. On peut faire une définition semblable pour définir le fait qu'une courbe est au-dessous d'une autre.

- Rappelons que la principale méthode dont vous disposez pour résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ consiste à résoudre $f(x) - g(x) \geq 0$. Bref il s'agit d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ (tableau de signe et tout et tout).
- Il arrive qu'une partie seulement de $\mathcal{C}_f$ soit au-dessus de $\mathcal{C}_g$. Dans ce cas nous détaillerons sur quels intervalles c'est vrai.

Exemples.

- La courbe représentative de la fonction constante égale à 3 est au-dessus de la courbe représentative de la fonction constante égale à $-\pi$ car $-\pi \leq 3$.
- Soit $f : x \mapsto 3x + 1$ et $g : x \mapsto -7x + 3$.

Étudions le signe de $f - g$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) - g(x) = 10x - 2$. $f - g$ est une fonction affine avec $a = 10$ et $b = -2$ donc

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$f - g$	-	0	+

Nous en déduisons que

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty, \frac{1}{5}]$ et en-dessous sinon.

Nous pourrions également ajouter que les courbes sont sécantes au point de coordonnées $(\frac{1}{5}, f(\frac{1}{5})) = (\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$.

- Démontrez que $-2x^2 + 2x + 4 = -2(x+1)(x-2)$ puis déduisez-en la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ où $f(x) = x^2 - 6x + 1$ et $g(x) = 3x^2 - 8x - 3$.

Dans cette partie nous parlerons des courbes d'équations $y = f(x)$ plutôt que des courbes représentatives des fonctions ce qui est équivalent.

Proposition 43. La courbe d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$ sur $[0; 1]$ et au-dessous sinon.

Démonstration. $x^2 - x = x(x-1)$ d'où le tableau de signe et le résultat.

Proposition 44. La courbe d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = x^3$ sur $]-\infty, -1] \cup [0; 1]$ et au-dessous sinon.

Démonstration. $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ d'où le tableau de signe et le résultat.

Proposition 45. La courbe d'équation $y = x^2$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = x^3$ sur $[0; 1]$ et au-dessous sinon.

Démonstration. $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ d'où le tableau de signe et le résultat.

Remarques.

- On remarque que sur $[0; 1]$, $x \geq x^2 \geq x^3$ et sur $[1, +\infty[$, $x \leq x^2 \leq x^3$. On peut d'ailleurs conjecturer une généralisation de ce résultat à d'autres puissances ...

EXERCICE 327. Soient $f : x \mapsto x + 1$ et $g : x \mapsto x^2 - 2x - 9$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

- Exprimez $g(x) - f(x)$ en fonction de x .
- Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$.
- Étudiez le signe de $g(x) - f(x)$.
- Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) - f(x) > 0$.
- Décrivez la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Conjecturer graphiquement la résolution d'équation et d'inéquations.

Exemples.

- 1. Résoudre l'équation $-2x + 3 = 1$. Équation du premier degré se résolvant en isolant l'inconnue.
- 2. Résoudre l'équation $x^2 = 4$. Équation se ramenant ç une équation produit nul : $(x - 2)(x + 2) = 0$.
- 3. Résoudre l'équation $x^3 = 1$. Nous n'avons pas de méthode de résolution.

Résoudre une équation (problème du domaine de l'algèbre) peut être interprété comme la recherche d'antécédents par une fonction (problème du domaine de l'analyse). Avec l'informatique il est très rapide et facile d'obtenir la courbe représentative d'une fonction et donc de faire une lecture graphique. Cependant ce n'est pas une démonstration mais un puissant outil de conjecture.

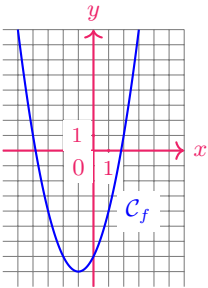
Exemples.

1.

Pour conjecturer les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 3$ nous introduisons la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 + 2x - 7 \end{cases}$$

puis traçons sa courbe représentative C_f avec un logiciel :



Résoudre l'équation équivaut donc à rechercher les antécédents de 3 par la fonction f . Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 3.

Concrètement pour les trouver il faut suivre les étapes suivantes.

1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points d'intersection.	Lire les abscisses correspondantes.

Conclusion :

l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 3$ est $\{-4,3 ; 2,3\}$.

Remarques.

1. Inconvénients de la méthode :

- comme pour toute lecture graphique les résultats sont approximatifs (insuffisant en mathématique)
- il s'agit d'une partie de la courbe et nous ne savons pas ce qu'il en est pour le reste de la courbe.

EXERCICE 328. Déterminez graphiquement les solutions des équations suivantes :

a) $0,5x^2 - 0,5x - 10 = -9.$

b) $-\frac{1}{4}(x^2 + 7x + 6) = -3.$

EXERCICE 329. Résolvez graphiquement ou algébriquement (selon ce qui est le plus pertinent) les équations suivantes.

a) $-\frac{1}{3}x + 3 = 1.$

b) $x^2 = 4.$

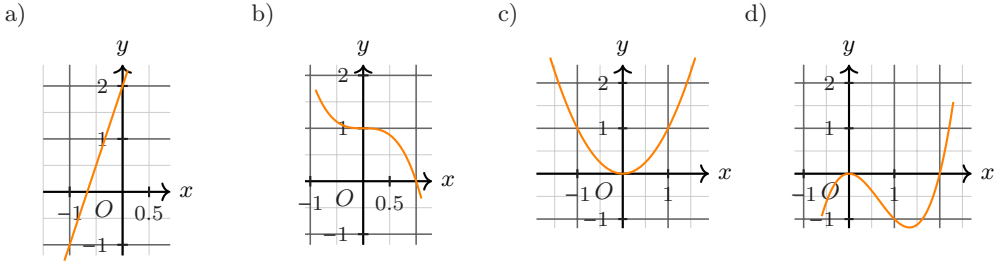
c) $x^2 = 6.$

d) $3x^2 = 48.$

e) $(x + 1)(x - 2) = -2.$

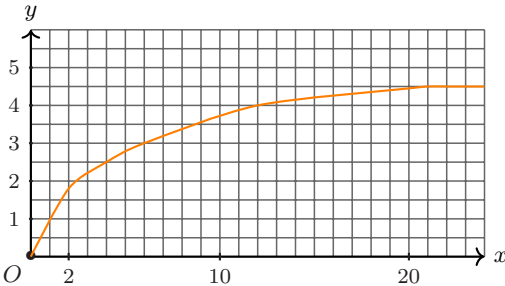
f) $5x^3 + x = 13.$

EXERCICE 330. Dans chaque cas, on a représenté dans un repère orthonormé une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Dans chaque cas précisez graphiquement les solutions des équations $f(x) = -0,5$; $f(x) = 0$; $f(x) = 1$; $f(x) = 2$.
2. Dans chaque cas déterminez, suivant les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 331. On considère la hauteur H , en mètre, d'un type d'arbre en fonction de son âge t en mois.



1. Déterminez et interprétez $H(1)$.
2. Ces arbres sont commercialisables dès qu'ils mesurent au moins 2 m : traduisez cela par une inéquation et résolvez-la.
3. À partir de quelle année ces arbres atteignent-ils leur hauteur maximale ?

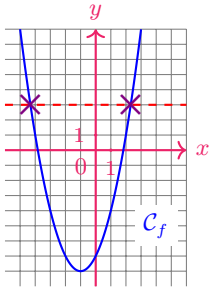
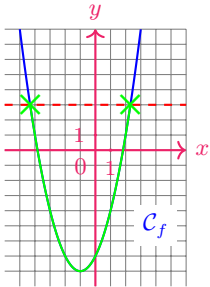
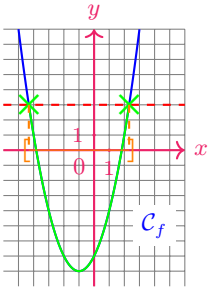
4. Dès qu'ils atteignent 3,5 m, Jean taille ses arbres à une hauteur de 3 m. les arbres repoussent au même rythme : quelle sera la fréquence des coupes après la première ?

Exemples.

1. Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ nous introduisons encore la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 2x - 7$ puis traçons sa courbe représentative C_f avec un logiciel.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée plus petite ou égale à 3.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

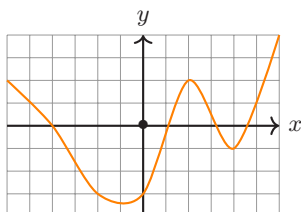
1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points de la courbe dont l'ordonnée est plus petite que 3.	Lire les abscisses correspondantes.
		

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble :

l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ est $[-4,3 ; 2,3]$.

Remarquons enfin que si l'inégalité avait été stricte ($x^2 + 2x - 7 < 3$) l'ensemble des solutions eut été ouvert $] -4,3 ; 2,3[$.

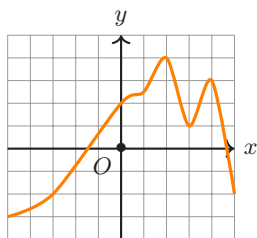
EXERCICE 332. On a dessiné ci-dessous la courbe représentative de la fonction f .



Résolvez les inéquations :

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $f(x) \leq -3$. | b) $f(x) > 1$. |
| c) $f(x) < 0$. | d) $f(x) \leq -1$. |
| e) $f(x) \leq -4$. | f) $f(x) > 2$. |

EXERCICE 333. Voici la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[-5; 5]$.



Estimez les solutions des inéquations.

- a) $h(x) \geq 0$ b) $h(x) < -4$
c) $h(x) < -2$ d) $h(x) > 3$

Résoudre des inéquations de la forme $f(x) \leq g(x)$ revient à étudier la position relative des deux courbes représentatives. Lorsque la résolution de l'inéquation est trop ardue nous pouvons exploiter la représentation graphique pour conjecturer des solutions.

Exemples.

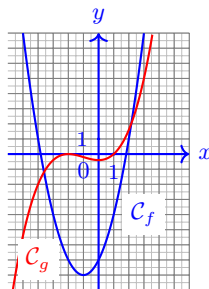
1.

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0,1(x+2)^3 - 0,3(x+2)^2$ nous introduisons encore les fonctions

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 2x - 7 \quad \text{et}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0,1(x+2)^3 - 0,3(x+2)^2$$

puis traçons leurs courbes représentatives C_f et C_g avec un logiciel.



Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés en dessous de ceux de la courbe C_g .

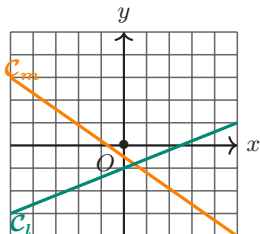
Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2
Identifiez les points de C_f situés en dessous de ceux de C_g.	Lire les abscisses correspondantes.

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble :

$$\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation } x^2 + 2x - 7 \leq 0, 1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2 \text{ est } [-3,6 ; 2,2].$$

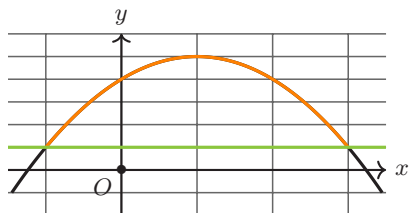
EXERCICE 334. Voici les courbes représentatives sur $[-5;5]$ de deux fonctions affines l et m .



Estimer les solutions des (in)équations ci-dessous.

- a) $l(x) = -1$ b) $m(x) > 0$
c) $l(x) = m(x)$ d) $l(x) < m(x)$

EXERCICE 335. Ci-dessous est représentée la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$.



- Décrire, en notation mathématique, l'ensemble des abscisses des points orange de la courbe.
- De quelle inéquation cet ensemble semble-t-il être l'ensemble des solutions ?

Corrections.

Exercice 322.

a)

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

c)

x	$-\infty$	$-1,5$	$-0,5$	$1,5$	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

e)

x	$-\infty$	0	$3,5$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b)

x	$-\infty$	$-0,5$	$0,5$	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

d)

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

f)

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Exercice 323.

a)

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

c)

x	$-\infty$	$0,5$	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b)

x	$-\infty$	$-0,5$	2	$3,5$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

d)

x	$-\infty$	$1,5$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

e)

x	$-\infty$	$-0,5$	0	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

f)

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Exercice 324.

x	$-\infty$	$-1,5$	2	$+\infty$	
f	$-$	0	$+$	0	$-$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
g	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$0,6$	$1,4$	$+\infty$	
h	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$-2,5$	$-0,5$	2	$+\infty$		
m	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Exercice 325. Une valeur de x pour laquelle la fonction n'est pas définie est une valeur pour laquelle il n'y a pas d'image.

1. f n'est pas définie pour $x = 3$.

x	$-\infty$	$2,5$	3	$+\infty$
f	$+$	0	$-$	$+$

2. g n'est pas définie pour $x = -1,5$.

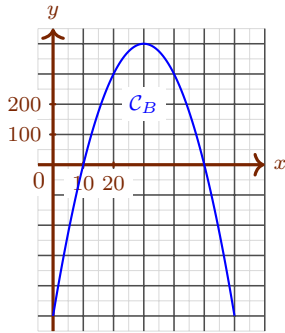
x	$-\infty$	-2	$-1,5$	$-0,75$	$+\infty$	
g	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

3. h n'est pas définie pour $x = -2$ ou $x = 2$.

x	$-\infty$	$-2,4$	-2	$-1,6$	$1,6$	2	$+\infty$
h	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	$-$

Exercice 326.

- Rappelons que pour tracer une courbe représentative sur papier il faut un certains nombre de points (dont les coordonnées sont obtenues avec le tableau de valeurs de la calculatrice) et l'allure générale de la courbe représentative est obtenue avec la courbe donné par la calculatrice.



2.

x	0	10	50	60	
$B(x)$	-	0	+	0	-

- Pour que l'artisan réalise un bénéfice il faut que $B(x) > 0$. D'après le tableau de signe cela est vrai lorsque $x \in]10; 50[$.

Pour que l'artisan réalise un bénéfice il doit produire de 11 à 49 articles.

- Par lecture graphique nous voyons que le maximum est de 400 € et que pour atteindre ce bénéfice il doit produire 30 vases.

Exercice 327.

- $g(x) - f(x) = x^2 - 3x - 10$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. $(x+2)(x-5) = x \times x + x \times (-5) + 2 \times x + 2 \times (-5) = x^2 - 3x - 10$.

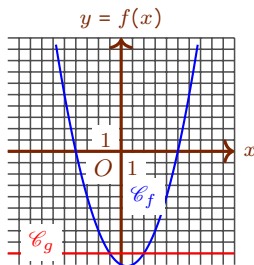
x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	
$x-5$	$-$	$-$	0	$+$	
$g(x)-f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

3.

- $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$.
- $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$ et au-dessus sinon.

Exercice 328.

- a) Avec la calculatrice nous traçons les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto 0,5x^2 - 0,5x - 10$ et $g : x \mapsto -9$.

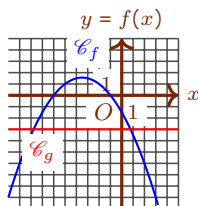


Par lecture nous pouvons conjecturer que

l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1; 2\}$.

Si nous pouvons vérifier que -1 et 2 sont effectivement des solutions en remplaçant dans l'équation rien ne garantit que nous ayons toutes les solutions : peut-être le graphique ne nous montre-t-il pas tous les points d'ordonnée -9 . Nous en restons donc à une conjecture sans pouvoir affirmer que nous avons résolu l'équation.

- b) Avec la calculatrice nous traçons les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto -\frac{1}{4}(x^2 + 7x + 6)$ et $g : x \mapsto -3$.



Exercice 329. Nommons (E_i) les équations successives pour $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$.

1. $(E_1) \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + 3 = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + 3 - 3 = 1 - 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x = -2 \Leftrightarrow -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)x = -3 \times (-2) \Leftrightarrow x = 6$.
L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est

$$\mathcal{S}_1 = \{6\}.$$

2. Nous remarquons une équation qui n'est pas linéaire. Nous allons donc essayer de nous ramener à une équation produit-nul.

$(E_2) \Leftrightarrow x - 4 = 4 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$. Nous avons une équation égale à 0 il faut maintenant obtenir un produit, c'est-à-dire factoriser. Nous avons deux méthodes de factorisation qui restent du collège : facteur commun (autrement dit distributivité) et identité remarquable (uniquement $a^2 - b^2$). Ici il n'y a pas de facteur commun. Par contre : $(E_2) \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$. Nous reconnaissons un produit nul donc : $(E_2) \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. L'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\mathcal{S}_2 = \{2; -2\}.$$

3. De même $(E_3) \Leftrightarrow (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0$.

$$\mathcal{S}_3 = \{\sqrt{6}; -\sqrt{6}\}.$$

4. De même $(E_4) \Leftrightarrow 3(x - 4)(x + 4) = 0$.

$$\mathcal{S}_4 = \{4; -4\}.$$

5. $(E_5) \Leftrightarrow (x+1)(x-2)+2 = -2+2 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) + 2 = 0$. À ce stade nous bloquons : impossible de factoriser. En désespoir de cause essayons de tout développer. $(E_5) \Leftrightarrow x \times x + x \times (-2) + 1 \times x + 1 \times (-2) + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + x - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$. Maintenant que tout est développé nous recommençons à essayer de factoriser : il y a maintenant un facteur commun. $(E_5) \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 1 = 0$.

$$\mathcal{S}_5 = \{0; 1\}.$$

Exercice 330.

1. (a) $f(x) = -0,5 \Leftrightarrow x \in \{-0,8\}$.
(b) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$ admet une unique solution.
2. (a) $f(x) = -0,5 \Leftrightarrow x \in \{0\}$.
(b) Si $k = 0$, alors $f(x) = k$ admet une unique solution sinon $f(x) = k$ admet deux solutions distinctes (et opposées).
3. (a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{0\}$.
(b) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$ admet une unique solution.
4. (a) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \{2,3\}$.
(b) Répondons à la question pour la courbe d).

k	$] -\infty; -1,2[$	$\{1,2\}$	$] -1,2; 0[$	$\{0\}$	$]0; +\infty[$
Nombre de solutions de $f(x) = k$.	1	2	3	2	1

Exercice 331.

1. $H(1) = 1$. Au bout d'un mois l'arbre mesure 1 mètre.
2. $H(t) > 2$ si et seulement si $t > 2,5$. Ils seront commercialisable lorsque $t \in [2,5; +\infty[$.
3. En année arrondi au bout de 2 ans. En mois : au bout de 19 mois.
4. Tous les 2,5 mois.

Exercice 332.

- a) $f(x) \leq -3 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 5,6[$.
- b) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 5[\cup]1,4; 2,7[\cup]5; +\infty[$.
- c) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-4; 0[\cup]3,2; 4,6[$.
- d) $f(x) \leq -1 \Leftrightarrow [-3,4; 0,6] \cup \{4\}$.
- e) $f(x) \leq -4 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.
- f) $f(x) > 2 \Leftrightarrow x \in]5,3; +\infty[$.

Exercice 333.

- a) $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-5, -1,5[\cup [4,6; 5]$
- b) $h(x) < -4 \Leftrightarrow x \in \emptyset$
- c) $h(x) < -2 \Leftrightarrow [-5; -3[$
- d) $h(x) > 3 \Leftrightarrow x \in]1,3; 2,3[$

Exercice 334.

- a) $l(x) = -1 \Leftrightarrow x \in \{0\}$
- b) $m(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-5; -0,7]$
- c) $l(x) = m(x) \Leftrightarrow x \in \{0,4\}$
- d) $l(x) < m(x) \Leftrightarrow x \in [-5; 0,4[$

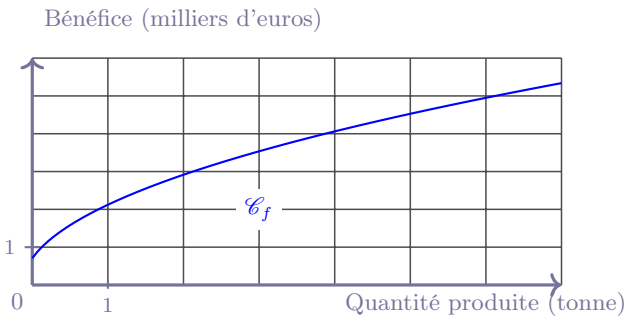
Exercice 335.

1. L'ensemble des abscisses des points orange de la courbe est $[-1; 3]$.
2. Cet ensemble est solution de l'inéquation $f(x) \geq 1$.

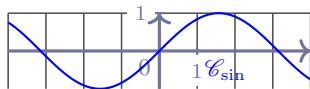
IV Monotonie des fonctions.

Variation et courbe représentative.

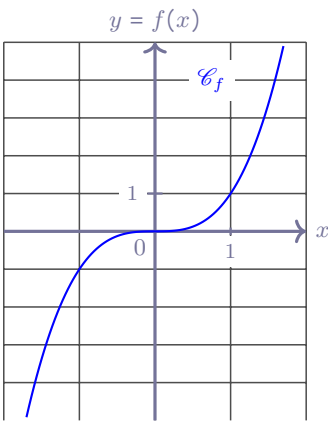
Lorsque nous voyons que la courbe représentative d’une fonction f monte cela traduit le fait que la quantité $f(x)$ augmente à mesure que x augmente. Ci-contre le bénéfice augmente à mesure que la quantité produite augmente.



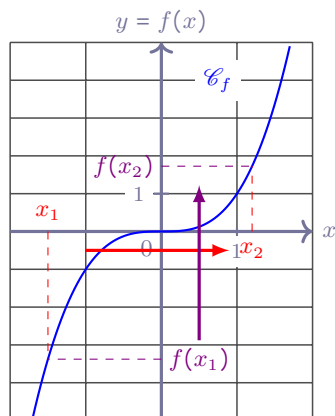
La situation n’est pas toujours aussi simple : il peut y avoir des changement de sens de variation comme pour le sinus ci-dessous.



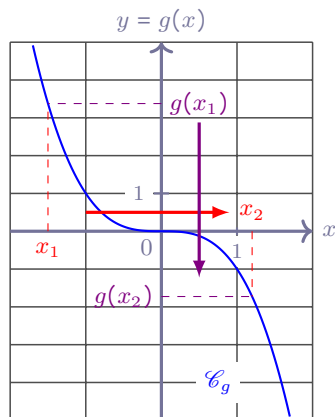
Regardons ce qui se passe dans une situation purement mathématique. Nous allons essayer comme d’habitude d’étudier le géométrique (la courbe monte) en en donnant une interprétation avec des coordonnées. On a dessiné ci-contre la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto (x - 0,001)^2(x + 0,001)$. Nous voyons que la courbe monte. Cela traduit bien le fait que les $f(x)$ augmentent à mesure que les x augmentent.



Par exemple si les x passent d'une valeur x_1 à une plus grande valeur x_2 on constate qu'on est passé d'une image $f(x_1)$ à une plus grande image $f(x_2)$.



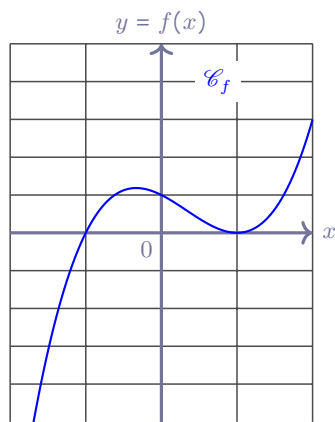
Alors que si la courbe descend, lorsque les x augmentent les images $g(x)$ diminuent :



Pourquoi aller regarder ce qui se passe pour les x et les $f(x)$? Pourquoi ne pas se contenter de la représentation graphique pour dire si ça augmente ou diminue ?

Parce que nous ne pouvons nous fier à nos sens. Agrandissons la courbe représentative au voisinage de 0 en nous plaçant sur $[-2 \times 10^{-9}, 2 \times 10^9]$.

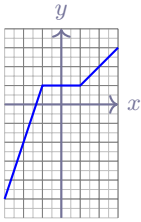
Nous avons besoin d'un outil qui ne peut se tromper : une définition analytique des variations d'une fonction.



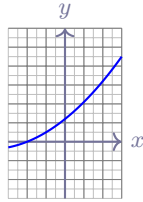
Décrire la variation par des phrases en français.

Les *fonctions monotones* sont les fonctions dont le sens de variation ne change pas. Graphiquement : la courbe ne fait que monter ou que descendre.

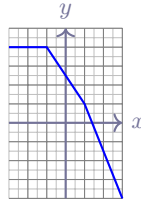
Fonction *crois-*
sante.



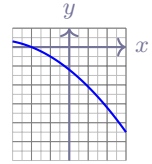
Fonction *stricte-*
ment croissante.



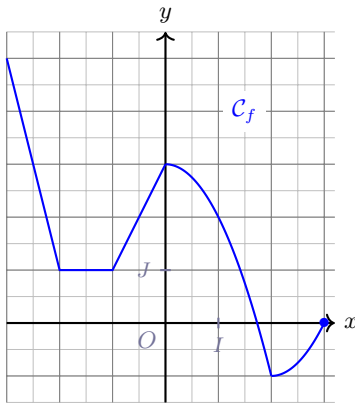
Fonction *décrois-*
sante.



Fonction *stricte-*
ment décroissante.



Une fonction n'est pas monotone lorsqu'elle est tantôt croissante tantôt décroissante. Dans ce cas il faut préciser sur quelles parties du domaine de définition elle est croissante ou décroissante.



Nous dirons que :

f est strictement décroissante sur $] -\infty; -2]$,
 f est constante sur $[-2; -1]$,
 f est strictement croissante sur $[-1; 0]$,
 f est strictement décroissante sur $[0; 2]$,
 f est strictement croissante sur $[2; 3]$.

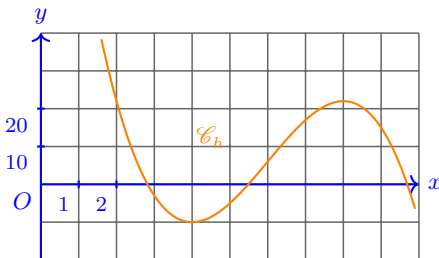
La courbe fait également apparaître des *sommets* (points haut ou bas de la courbe).

Nous dirons que, par exemple, f admet un *minimum (absolu) égale à -1 qui est atteint pour $x = 2$.*

Ou encore que f admet un *maximum local sur $] -2; 3[$ qui est égale à 3 et qui est atteint en $x = 0$.*

Exemples.

1. Avec un moyen informatique on obtient la courbe représentative de $h : x \mapsto -x^3 + 18x^2 - 99x + 162$.



Décrivons les variations de h . h est strictement décroissantes sur $] -\infty, 4]$ et sur $[8, +\infty[$. h est strictement croissante sur $[4; 8]$.

Décrivons les extrema. f n'admet aucun maximum ou minimum (absolu). f admet un minimum local sur $] -\infty, 8[$ égale à -10 qui est atteint en 4 ; f admet un maximum local sur $] 4, +\infty[$ égale à 13 qui est atteint en 8 .

2. Description de la variation des fonctions de référence d'après la courbe représentative que nous connaissons par cœur. La fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $] 0, +\infty[$.

Pour avoir des démonstrations de ces résultats confer infra.

Remarques.

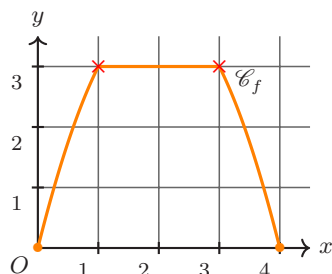
1. Ici l'adjectif local utilisé pour parler d'un extremum n'est pas nécessairement pertinente. En effet il n'y a un extremum local que s'il existe un intervalle ouvert sur lequel la fonction admet un extremum. Si bien qu'un maximum absolu obtenu au borne du domaine de définition n'est pas un maximum local. On parle plutôt d'*extremum relatif à un intervalle* (une partie du domaine de définition). J'ai choisi de parler d'extremum local car cette notion apparaît dans le programme de première.

EXERCICE 336. Avec la calculatrice affichez la courbe représentative de la fonction f puis décrivez la variation de f et enfin précisez les extrema de f sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1.$

b) $f : x \mapsto x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 60x + 55.$

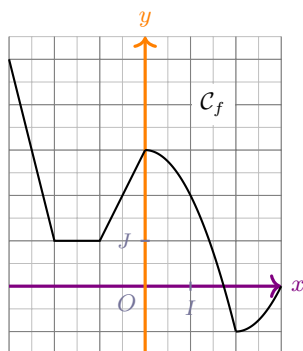
EXERCICE 337. On représentée une fonction définie sur $[0; 4]$.



1. Résolvez graphiquement l'équation $f(x) = 3$.
2. Décrivez par des phrases en français les variations de f sur son domaine de définition.
3. La fonction f admet-elle un maximum sur $[0; 4]$? Si oui, combien vaut-il et pour quelles valeurs de x est-il atteint?

Un schéma pour décrire les variations d'une fonction.

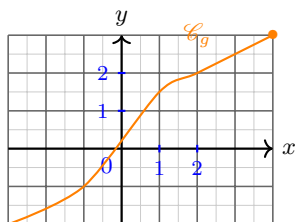
Les longues phrases n'étant pas du goût des mathéux nous préférons un schéma. Nous schématiserons la courbe représentative de la fonction par un *tableau de variation*.



x	$-\infty$	-2	-1	0	2	3
f	$\square$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		1	1	3	-1	0

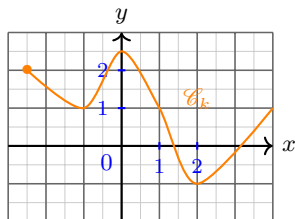
Exemples.

1. Une courbe correspondant à une fonction monotone et le tableau de variation correspondant.



x	$-\infty$	4
g	$\nearrow$ 3	

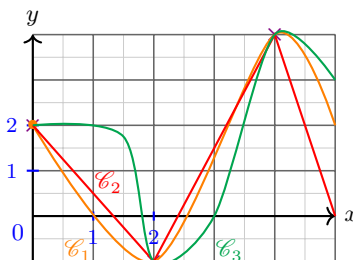
2. Une courbe correspondant à une fonction non monotone et le tableau de variation correspondant.



x	$-\infty$	$-2,5$	-1	0	$+\infty$
k	2	$\searrow$ 1		2,5	$\searrow$ -1

3. Dressons le tableau de variation de la fonction $x \mapsto 0,06(x-2)(x-3)(x+5)$ sur $[-10; 10]$ d'après la calculatrice.
 4. Proposons trois représentations graphiques de la fonction f à partir de son tableau de variation.

x	0	2	4	$+\infty$
f	2	$\searrow$ -1		4

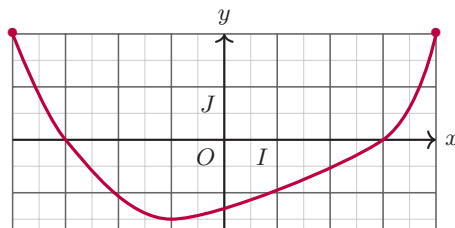


Remarques.

- Dans un tableau de variation apparaissent bien sûr les variations mais aussi les *extremum* (*minimum* ou *maximum*, *absolu* ou *local*).
- Les valeurs dans un tableau de variation sont toutes exactes. Pas de valeur approchée. Comme d'habitude si on ne possède pas la valeur exacte on utilise une lettre pour désigner ce nombre.
- Il est possible de décrire la variation de la fonction à partir du tableau de variation sans connaître la courbe représentative.

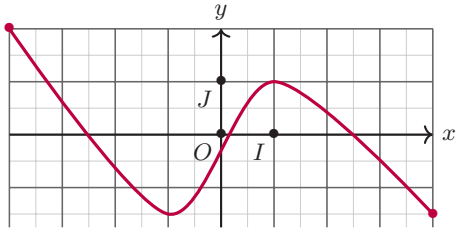
EXERCICE 338. Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique.

x	-4	4
f	2	2



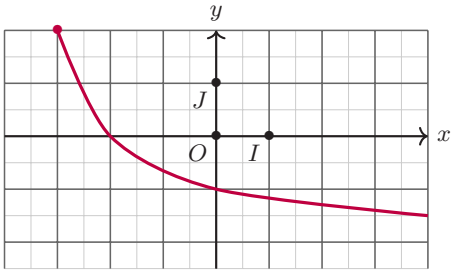
EXERCICE 339. Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique.

x	-4	...	...	...
f	...	↘ ↗ ↘		
			1	-1,5



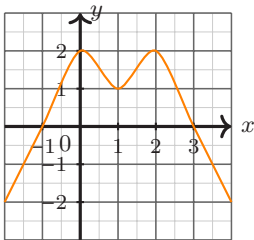
EXERCICE 340. Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique.

x	-3	...
f		

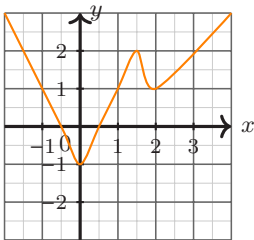


EXERCICE 341. Dressez les tableaux de variation des fonctions (nommées génériquement f) représentées ci-dessous.

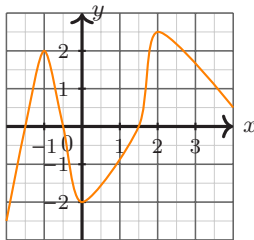
a)



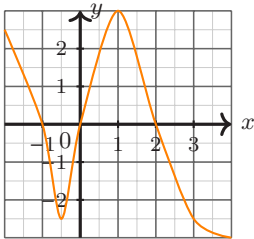
b)



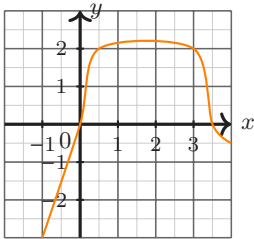
c)



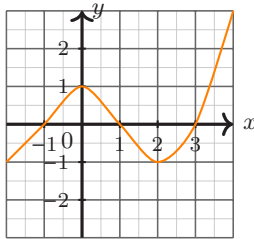
d)



e)

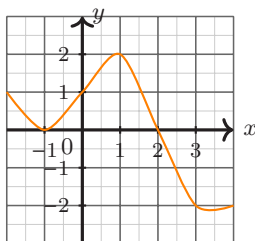


f)

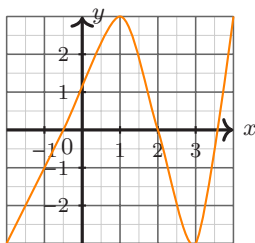


EXERCICE 342. Dressez les tableaux de variation des fonctions (nommées génériquement f) représentées ci-dessous.

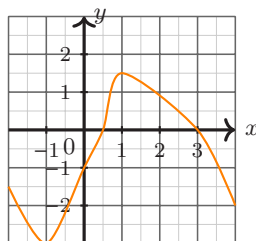
a)



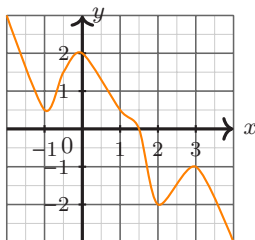
b)



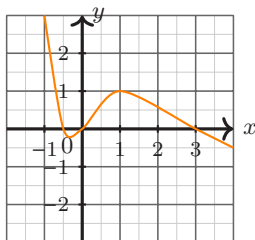
c)



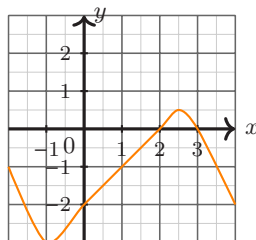
d)



e)



f)



EXERCICE 343. Voici le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$	-2	1	3	5
f	$\searrow$ 2 $\nearrow$ 3 $\searrow$ -2 $\nearrow$ 4				

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Décrivez par des phrases le sens de variation de la fonction f .
3. Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
4. Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f .

EXERCICE 344. On donne le tableau de variation d'une fonction g .

x	-4	-1	2	5
g	$\searrow$ 2 $\nearrow$ 3 $\searrow$ -1			

1. Quel est l'ensemble de définition de g ?
2. Décrivez par des phrases les variations de g .
3. Tracez dans un repère une courbe pouvant représenter g .

EXERCICE 345. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2; 7]$. On sait que :

- f est strictement croissante sur $[-2; 5]$ et sur $[6; 7]$;
- f est strictement décroissante sur $[5; 6]$;

- $f(-2) = f(6) = -1$ et $f(5) = f(7) = 1$.

Construisez le tableau de variation de f puis tracez dans un repère une courbe pouvant représenter f .

EXERCICE 346. Tracez une courbe pouvant représenter graphiquement la fonction g dont le tableau de variation est donné.

x	-5	0	1	2
g				

EXERCICE 347. Voici le tableau de variations d'une fonction f .

x	-4	-1	2	5
f				

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Décrivez par des phrases le sens de variation de la fonction f .
3. Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
4. Tracer une courbe pouvant représenter graphiquement la fonction f .

EXERCICE 348. Voici le tableau de variations d'une fonction f .

x	-1	0	2	$+\infty$
f				

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Décrivez par des phrases le sens de variation de la fonction f .
3. Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
4. Tracez une courbe pouvant représenter graphiquement la fonction f .

EXERCICE 349. Une fonction f définie sur l'intervalle $[-6; 8]$, vérifie :

- f est croissante sur les intervalles $[-6, -2]$ et $[4; 8]$;
- f est décroissante sur $[-2; 4]$;
- $f(-2) = 4$;
- le minimum de f sur $[-6; 8]$ est égale à -3 et est atteint pour $x = 4$.

1. Dressez le tableau de variation de f avec les données ci-dessus.

- Le nombre 2 a au moins deux antécédents par f : -4 et 8 . De plus la courbe représentative de f dans un repère passe par les points $A(-6, -2)$ et $B(6, -2)$ et qu'elle coupe l'axe des ordonnées au point C d'ordonnée 3. Complétez le tableau de variation avec toutes les informations supplémentaires concernant f et sa courbe représentative.
- Tracez une courbe satisfaisant à toutes les conditions concernant f et précisez les coordonnées de C .
- Quel est le nombre d'antécédents de 2 ?
 - En combien de points la courbe tracée coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Traduisez ce résultat en termes d'antécédents.
- Pouvez-vous imaginer plusieurs courbes satisfaisant toutes les conditions sur f ?

EXERCICE 350. Voici des informations concernant une fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 5]$: $\bullet f(-1) = f(5) = 0$; $\bullet f(2) = 3$; $\bullet f(4) = -2$; $\bullet f$ est croissante sur $[-1; 2]$ et sur $[4; 5]$; $\bullet f$ est décroissante sur $[2; 4]$.

- Dresser le tableau de variations de f .
- Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f .
- Préciser les extremums éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.

EXERCICE 351. Pour chaque tableau de variations ci-dessous, déterminez si la fonction représentée admet : un maximum et/ou un minimum, absolu et/ou local.

a)

x	$-\infty$	0	9
f			

b)

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
g				

c)

x	$-\infty$	-2	7	10
h				

d)

x	$-\infty$	15	$+\infty$
m	25		

e)

x	1	$+\infty$
p		

Variation, la vraie définition.

Comme nous l'avons remarqué en introduction nous ne pouvons nous fier à nos yeux, à la calculatrice ou à notre intuition pour connaître la variation d'une fonction. Il nous faut une définition de cette notion qui ne permet aucune ambiguïté. Voici celle qui a été retenue.

Définition 42. Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$, un ensemble E tel que $E \subset \mathcal{D}_f$. Nous dirons que f est **croissante sur E** lorsque, quels que soient x_1 et x_2 choisis dans E , si $x_1 < x_2$ alors, forcément, $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Remarques.

1. Nous pouvons définir de même :
 - (a) f est *strictement croissante* si et seulement si dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) < f(\beta)$.
 - (b) f est *strictement décroissante* si et seulement si dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) > f(\beta)$.
 - (c) f est *décroissante* si et seulement si dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) \geq f(\beta)$.
2. Nous retiendrons que *les fonctions croissantes conservent l'ordre tandis que les fonctions décroissantes ne conservent pas l'ordre.*
3. C'est une définition complexe. Il faut comprendre l'idée correspondante : dire que f est *croissante* c'est dire que *quand les x augmentent les $f(x)$ augmentent aussi*. Il faut commencer à se familiariser avec l'aspect technique.
4. Une fonction qui est croissante ou décroissante sur tout son ensemble de définition est dite *monotone*. Il existe des fonctions qui ne sont pas monotone comme la fonction carré.
5. La monotonie permet de trouver de nouvelles inéquations mais pas d'équivalences. Ainsi, la fonction racine carrée étant croissante, de $x^2 + 1 \leq x^2 + 4$, nous pouvons déduire : $\sqrt{x^2 + 1} \leq \sqrt{x^2 + 4}$.
6. Démontrer qu'une fonction n'est pas monotone sur un ensemble revient à montrer qu'une proposition universelle (quel que soit, pour tout) est fausse : il suffit d'exhiber un contre-exemple.

Exemples.

1. Vous connaissez l'allure des courbes représentatives des fonctions de référence et vous pouvez donc conjecturer leur monotonie. Pour une démonstration confer infra.
2. La monotonie d'une fonction affine est liée au signe de son coefficient dominant (confer infra). Voyons-le sur un exemple.

Démontrons que $f : x \mapsto -2x + 1$ est strictement décroissante.

Soit α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$.

Puisque $-2 < 0 : -2 \times \alpha > -2 \times \beta$.

Et donc : $-2\alpha + 1 > -2\beta + 1$. Autrement dit $f(\alpha) > f(\beta)$.

3. Démontrons que la fonction cube n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

$1 < 2$ et pourtant $1^3 < 2^3$ car $1^3 = 1$ et $2^3 = 8$.

EXERCICE 352.

1. Démontrez que $(x + 1)(x - 2) > 0$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.
2. Déduisez-en que, pour $x \in]2, +\infty[$, $x^2 - x > 2$.
3. Déduisez-en, finalement que $\sqrt{x^2} - x > \sqrt{2}$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.

Extrema, la vraie définition.

Là encore nous allons donner une définition mathématique formelle de la plus grande ou de la plus petite valeur prise par une fonction qui soit exempte d'ambiguïté.

Définition 43. Soient f une fonction et un ensemble $E \subset \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. On dit que f *admet un maximum sur E* si et seulement si il existe $x_0 \in E$ tel que, quel que soit $x \in E$, $f(x) \leq f(x_0)$. Dans ce cas $f(x_0)$ est appelé *le maximum de f sur E* .

Remarques.

1. Nous avons une définition semblable pour le minimum. f *admet un minimum sur E* si et seulement si il existe $x_0 \in E$ tel que : $\forall x \in E, f(x) \geq f(x_0)$. Dans ce cas $f(x_0)$ est appelé *le minimum de f sur E* .

2. Le terme générique pour parler du maximum ou du minimum est *extremum*. Il est surtout utiliser pour poser des questions sans donner la réponse aux élèves.
3. La définition fait intervenir l'existence d'un nombre ce qui n'est jamais simple à établir. Montrer qu'il y a un maximum ou un minimum peut être très difficile.
4. Le plus souvent au lycée pour démontrer l'existence d'un maximum ou d'un minimum nous utiliserons le tableau de variation.
5. Pour montrer qu'une fonction n'a pas de maximum il faut montrer qu'il y a toujours une image plus grande que n'importe quel maximum putatif. Deux cas : inverse sur $\mathbb{R}_-$ et cube sur $\mathbb{R}_+$.

Exemples.

1. La fonction carré n'admet pas de minimum sur $]0;2]$ mais admet un maximum en 2 égale à 4. La fonction carré est croissante sur $]0,2]$ donc son minimum ne pourrait être qu'en 0 mais 0 ne fait pas partie de l'ensemble de définition.
2. La fonction cube n'admet ni minimum ni maximum.
3. Montrons que la fonction $g : x \mapsto -2(x+1)^2 + 3$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en -1 . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &\geq 0 \\ -2(x+1)^2 &\leq -2 \times 0, \text{ car } -2 < 0 \\ -2(x+1)^2 &\leq 0 \\ -2(x+1)^2 + 3 &\leq 0 + 3 \\ g(x) &\leq 3\end{aligned}$$

De plus $g(-1) = 3$.

g admet, sur $\mathbb{R}$, un maximum égale à 3 qui est atteint en -1 .

4. La fonction inverse est minorée, par 0, sur $\mathbb{R}_+$ (elle ne prend pas de valeur plus petite que 0) mais elle n'admet pas de minimum car la valeur 0 n'est jamais atteinte.

EXERCICE 353. Montrez que $f : x \mapsto 7(x-15)^2 - 9$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 354. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{9-x^2}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Résolvez algébriquement l'équation $f(x) = -1$.
(b) Montrez que pour tout réel x , $f(x) \geq -1$. *Pour comparer deux nombres on peut chercher le signe de leur différence.*
(c) -1 est-il le minimum de f sur $\mathbb{R}$?
2. En utilisant la calculatrice tracez la courbe de f dans un repère bien choisi.
3. Conjecturez le maximum de f sur $[-5; 5]$ et en quelle valeur il est atteint.
4. Démontrez que tous les réels ont une image inférieure ou égale à 9 et validez la conjecture précédente.

Variation des fonctions affines, démonstration.

Exemples.

1. Montrons que la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x+1$ est strictement croissante conjecture établie avec une calculatrice.
Il faut démontrer que quelque soient les nombres α et β choisis avec $\alpha < \beta$ on a forcément $f(\alpha) < f(\beta)$.

Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Il faut garder des lettres et ne pas remplacer par des valeurs numériques pour que le résultat reste général, vrai quelque soit les nombres choisis. Démontrons qu'alors nécessairement $f(\alpha) < f(\beta)$.

Le raisonnement consiste à partir de l'inégalité $\alpha < \beta$ et de reconstruire la fonction f de par et d'autre d façon à faire apparaître $f(\alpha)$ et $f(\beta)$. Pour cela nous ferons les étapes correspondant aux priorités opératoires.

L'inégalité $\alpha < \beta$ est successivement équivalente à

$$\begin{aligned}2\alpha &< 2\beta, \text{ le sens est conservé car } 2 > 0. \\2\alpha + 1 &< 2\beta + 1 \\f(\alpha) &< f(\beta)\end{aligned}$$

Nous avons démontré que si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) < f(\beta)$. Les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre.

Ceci étant vrai quelque soit les α et β choisis nous pouvons affirmer que la fonction f est strictement croissante.

2. La fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ n'est pas croissante puisque, par exemple : $-3 < -2$ et pourtant $f(-3) > f(-2)$.

Retenons que pour montrer qu'une fonction n'est pas monotone il suffit de trouver un contre-exemple.

Proposition 46. Soient a et b deux nombres réels, f la fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$ quelque soient $x \in \mathbb{R}$.

- (i) Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- (ii) Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
- (iii) Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Si $a = 0$ la fonction est évidemment constante.

Démontrons l'un des deux cas restants l'autre se traitant de la même façon. Supposons par exemple que $a < 0$.

Il faut démontrer que f est strictement décroissante. D'après la définition de la monotonie, il faut donc montrer que quels que soient les nombres réels α et β si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$.

Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Cette inégalité est successivement équivalente à : $a\alpha > a\beta$ car $a < 0 \Leftrightarrow a\alpha + b > a\beta + b \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta)$. On a donc démontré que si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$. Autrement dit f est strictement décroissante.

Exemples.

1. Étudions les variations de la fonction h , définie par $h(x) = -12x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. h est une fonction affine avec $a = -12$ et $b = 3$. Comme $a < 0$, h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Nous ne pouvons rien dire pour $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ car ce n'est pas une fonction affine.

La connaissance des variations de la fonction affine permet de retrouver les tableaux de signes en raisonnant à partir de la courbe représentative.

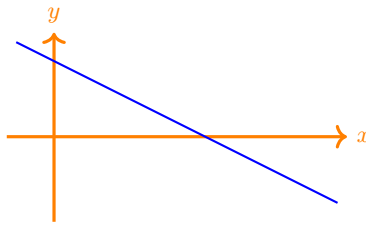
Exemples.

1. Étudions par exemple le signe de $f : x \mapsto -2x + 4$.

* f est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 4$.

* le coefficient directeur est strictement négatif, $a < 0$ donc f est strictement décroissante.

Ceci se traduit graphiquement par une droite qui descend. Quelque chose comme :



Nous voyons sur ce schéma que la fonction prend d'abord des valeurs positives puis des valeurs négatives. Autrement dit nous pouvons déjà compléter le tableau de signe de la façon suivante :

x	$-\infty$	?	$+\infty$
f	+	0	-

Il nous reste à trouver pour quelle valeur de x , f s'annule.

* f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$. Ce résultat a été établi plus tôt dans cette leçon.

Nous en déduisons le tableau de signe de f .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	+	0	-

Les fonctions de référence, démonstrations.

La façon la plus simple de retenir les résultats de cette partie consiste à connaître par cœur les allures des courbes représentatives des fonctions de référence.

Proposition 47. Tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$			

Démonstration. Montrons que la fonction carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques dans $[0 ; +\infty[$ tels que : $x_1 < x_2$.

D'une part : $x_1^2 \leq x_2 \times x_1$, car $x_1 \geq 0$

et d'autre part : $x_1 x_2 < x_2^2$, car $x_2 x_2 > x_1 \geq 0$.

On en déduit : $x_1^2 \leq x_1 x_2 < x_2^2$ et donc $x_1^2 < x_2^2$.

Nous avons démontré que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons que la fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques dans $] -\infty ; 0]$ tels que : $x_1 < x_2$.

D'une part : $x_1^2 > x_2 \times x_1$, car $x_1 < x_2 \leq 0$

et d'autre part : $x_1 x_2 \geq x_2^2$, car $x_2 \leq 0$.

On en déduit : $x_2^2 \leq x_1 x_2 < x_1^2$ et donc $x_2^2 < x_1^2$.

Nous avons démontré que la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Remarques.

1. Autrement dit : la fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Exemples.

1. Montrons que $\left(\frac{4}{12}\right)^2 < \left(\frac{9}{24}\right)^2$. Puisque $\frac{4}{12} = \frac{8}{24}$ nous voyons que $\frac{4}{12} < \frac{9}{24}$. La fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\left(\frac{4}{12}\right)^2 < \left(\frac{9}{24}\right)^2.$$

2. Montrons que si $x \leq -6$ alors $x^2 \geq 36$. Soit x un réel tel que $x \leq -6$. La fonction carré étant décroissante sur $\mathbb{R}_-$: $x^2 \geq 36$.

$$\text{Quelque soit } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq -6, x^2 \geq 36.$$

EXERCICE 355. Dans chaque cas comparez les nombres A et B sans utiliser la calculatrice.

- a) $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ et $B = \left(\frac{4}{3}\right)^2$, b) $A = 1,009^2$ et $B = 1,0029^2$, c) $A = -2,3^2$ et $B = (-2,3)^2$.

EXERCICE 356. Encadrez x^2 , puis $3x^2$, le plus précisément possible, dans les cas suivants :

- a) $1 \leq x \leq 4$. b) $-2 \leq x < -0,5$. c) $4 < x < 11$.
d) $-\frac{13}{5} < x < -\frac{1}{7}$. e) $-2 \leq x < 3$. f) $-10 \leq x \leq 10$.

EXERCICE 357. Démontrez que la fonction $f : x \mapsto 4x^2 + 3x - 12$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 48. Tableau de variation de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$			

Démonstration. Nous allons démontrer trois choses : la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, sur $\mathbb{R}_+$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

* Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$ tels que $x_1 < x_2$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &> \frac{x_2}{x_2} && \text{car } x_2 < 0 \\ \frac{x_1}{x_2} &> 1 \\ \frac{1}{x_1} \times \frac{x_1}{x_2} &< \frac{1}{x_1} \times 1 && \text{car } \frac{1}{x_1} < 0 \\ \frac{1}{x_2} &< \frac{1}{x_1} \end{aligned}$$

Donc

la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

* Idem pour $\mathbb{R}_+^*$.

* $-2 < 2$ et pourtant $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ donc la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Nous avons déjà remarqué qu'il n'est pas possible d'obtenir des identités remarquables, des égalités, liant la somme et la racine carrée. Cependant nous pouvons obtenir une inégalité.

Proposition 49. Soient $a \in [0; +\infty[$ et $b \in [0; +\infty[$. Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Démonstration. Supposons $a < b$ et démontrons que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Nous allons en fait démontrer que $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$.

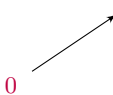
Puisque $a < b$: $b - a > 0$. Or, a et b étant positifs : $b - a = \sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2 = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$ donc $(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) > 0$. Et comme $(\sqrt{b} + \sqrt{a}) > 0$: $\frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})} > \frac{0}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}$ et enfin $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$.

Ainsi dès que $a < b$ forcément $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Remarques.

1. Ce résultat constitue une nouvelle façon de transformer une inéquation. Lorsque nous verrons $x^2 + x^4 < 8 + x^2$ alors nous pourrions affirmer que $\sqrt{x^2 + x^4} < \sqrt{8 + x^2}$.

Proposition 50. Tableau de variations de la fonction racine carrée :

x	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$		

Démonstration. Ce résultat a été établi dans le lemme.

Proposition 51. Tableau de variations de la fonction cube :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$		

Démonstration.

* Démontrons que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Nous allons utiliser une identité remarquable qui vous est encore inconnue :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$.

Démontrons que $x_1^3 < x_2^3$.

Ou plutôt, ce qui revient au même démontrons que $x_2^3 - x_1^3 > 0$.

Pour étudier le signe d'une expression il vaut mieux qu'elle soit factorisée : $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$.

D'une part, par hypothèse, $x_2 - x_1 > 0$.

D'autre part, puisque $0 \leq x_1 < x_2 : x_1 \geq 0$, $x_1 x_2 \geq 0$ et $x_2^2 > 0$ donc $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0$.

Donc : $(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) > 0$.

Ainsi, si $0 \leq x_1 < x_2$ alors $x_1^3 < x_2^3$. Autrement dit

la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

* La fonction cube étant impaire nous en déduisons par symétrie, que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$.

* Il reste à s'assurer que si $x_1 \leq 0 \leq x_2$ nous avons toujours conservation de l'ordre.

Exercices.

EXERCICE 358. Un véhicule commence son trajet au niveau de la mer à 7h00. Il grimpe jusqu'à un sommet d'une montagne à une altitude de 824 m. Il atteint ce sommet à 9h00 puis descend sur l'autre flanc de la montagne jusqu'à une vallée située à une altitude de 522 m. Son arrivée à lieu à 10h00. On note f la fonction qui au temps écoulé depuis le départ du véhicule associe l'altitude du véhicule. Proposez un tableau de variation pour f .

EXERCICE 359.

x	-2	0	3	4
f	-1	$\frac{5}{2}$	-1	6

Comparer si possible les nombres suivants.

- a) $f(-2)$ et $f(-1)$. b) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$. c) $f(-1)$ et $f(1)$.
d) $f(3,6)$ et $f(3,7)$. e) $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et $f(4)$. f) $f(1)$ et $f(3,5)$.

EXERCICE 360. Déterminez si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- a) Si f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
b) Si la fonction f est croissante sur $[-5; 5]$ alors elle est croissante sur $[0; 1]$.
c) Si f est croissante sur $[-5; 0]$ et décroissante sur $[0; 5]$ alors f est constante sur $[-5; 5]$.
d) Si $f(1) \geq f(6)$ alors f est décroissante sur $[1; 6]$.

EXERCICE 361. On considère une fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-4	1	5
f	0	-2	3

1. Décrivez par des phrases les variations de f .

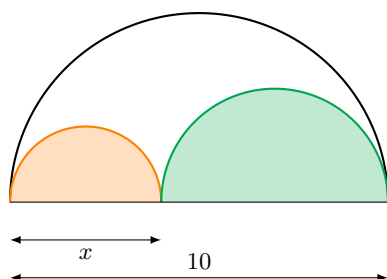
2. Comparez les nombres :

a) $f(2)$ et $f(4)$.

b) $f(-3)$ et $f(0)$.

3. Expliquez pourquoi on ne peut comparer $f(0)$ et $f(2)$.

EXERCICE 362. On considère trois demi-cercles tels que représentés ci-dessous.



1. Conjecturez l'évolution de l'aire du demi-disque orange et celle du demi-disque vert lorsque x augmente.

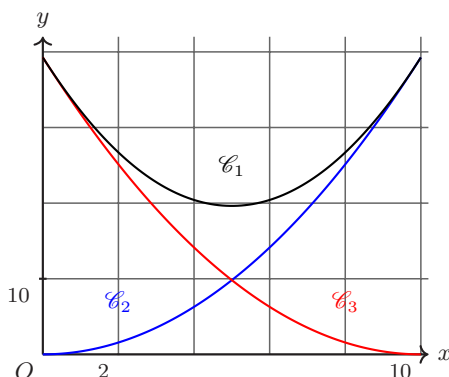
2.

Soient f (respectivement g , resp. h) la fonction définie sur $]0; 10[$ qui à x associe l'aire du demi-disque orange (resp. du demi-disque vert, de la partie colorée).

On a tracé ci-contre les courbes représentatives des fonctions f , g et h .

(a) Associez à f , g et h leurs courbes représentatives.

(b) Avec la précision permise par le graphique décrivez les variations de h .



EXERCICE 363. Conjecturez la variation de f sur I dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto 0,1x^4 - 0,8x^2 - 1$ et $I = [-4; 4]$.

b) $f : x \mapsto x^3 - 0,8x^2 + 1$ et $I = [-2; 3]$.

EXERCICE 364. Montrez que la fonction $f : x \mapsto x^3 + \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 365. La fonction f est définie, sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1. Conjecturez l'existence d'un maximum en précisant sa valeur et la valeur pour laquelle il est atteint.

2. Démontrez que, pour tout réel x , $f(x) \leq 1$.

3. Démontrez que 1 est le maximum de f .

EXERCICE 366. En utilisant les tableaux de variation, de valeurs et de signe de la fonction f donnée ci-dessous, dessinez avec soin, dans un repère, une courbe représentative cohérente avec ces trois tableaux.

x	-6	-1	3	5
f	$ \begin{array}{ccccc} & & 1 & & 6 \\ & \nearrow & & \searrow & \nearrow \\ -5 & & & & -4 \end{array} $			

x	-4	1	4
$f(x)$	-3	0,5	5

x	-6	-2	2	3,5	5		
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

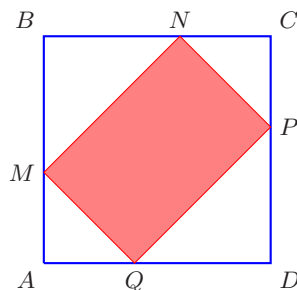
EXERCICE 367.

Soit $ABCD$ le carré de côté 5 représenté ci-contre.

M , N , P et Q sont des points mobiles respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ de telle sorte que les longueurs AM , AQ , CN et CP restent égales.

On a donc : $AM = AQ = CN = CP$.

Le problème a pour objectif d'étudier l'aire (variable) du quadrilatère $MNPQ$.



1. Choix d'une variable.

- À quelle(s) variable(s) peut-on associer l'aire de $MNPQ$?
- On note $x = AQ$. Quelles sont les valeurs que peut prendre x ?

2. Détermination de l'aire par un calcul.

- Exprimez en fonction de x l'aire de chacun des triangles AMQ et BMN .
- Déduisez-en que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ se calcule avec la formule $10x - 2x^2$.
- Précisez, avec les notations fonctionnelles, la fonction f que l'on a construit.

3. Découverte des variations de la fonction f .

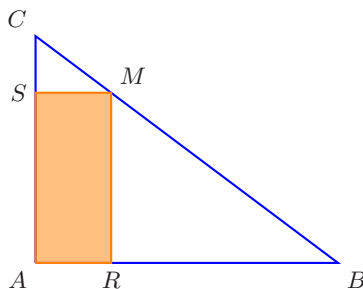
- Recopiez et complétez le tableau de valeurs ci-dessous pour $f(x) = 10x - 2x^2$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

- Une autre façon de voir les choses est de tracer la courbe représentative de f avec la calculatrice. Qu'apporte de plus cette méthode par rapport à la précédente?
- Comment varie $f(x)$ lorsque x augmente?
- Tracez le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.
- Comment obtenir une aire maximale pour $MNPQ$?

4. Les résultats ont-ils été démontrés ou conjecturés?

EXERCICE 368. On considère le triangle ABC rectangle en A avec $AB = 8$ et $AC = 6$. Un point R est mobile sur le segment $[AB]$. On place les points M et S sur les segments $[BC]$ et $[AC]$ de telle sorte que $ASMR$ soit un rectangle.



On considère la fonction f qui à la longueur AR associe l'aire du rectangle $ASMR$. On cherche ici à rendre l'aire du rectangle maximale.

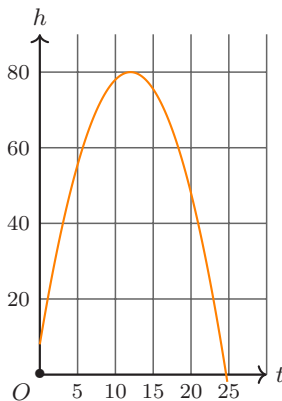
1. Dessinez à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique la figure. On s'assurera de la réussite de la construction de la façon suivante : lorsqu'on déplace le point R sur le segment $[AB]$, le quadrilatère $ASMR$ reste un rectangle.
2. Dessinez le polygone (avec la commande correspondante dans geogebra) $ASMR$ et remarquez que l'aire du rectangle est alors indiquée dans la colonne algèbre.
3. En déplaçant le point R conjecturez l'aire maximale du rectangle $ASMR$.

EXERCICE 369. À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier prépare le lancement de fusées à partir d'une plateforme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de deux types de fusées notées A et B .

Partie A : fusées de type A .

Le hauteur h , en mètres, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol t , en dixièmes de seconde, est modélisée par la courbe ci-contre.

1. Précisez les légendes et unités pour chaque axe du graphique.
2. Avec la précision permise par le graphique répondez aux questions suivantes.
 - (a) À quelle hauteur une fusée arrive-t-elle au bout de 15 dixièmes de seconde ?
 - (b) À quels temps de vol la hauteur d'une fusée est-elle égale à 40 m ?
 - (c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par une fusée ?
 - (d) Au bout de combien de temps retombe-t-elle au sol ?
 - (e) Décrivez en français la variation de la hauteur et tracez le tableau correspondant.



Partie B : fusées du type B .

Pour les fusées du type B , la hauteur, en mètres, en fonction du temps de vol, en dixièmes de seconde, est modélisé par la fonction g définie par $g(t) = -0,5(t - 10)^2 + 58$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0; 20]$.

1. Calculez l'image de 6 par g . Que représente le résultat ?
2. Donnez le tableau de valeur de g pour t allant de 0 à 20 avec un pas de 2.
3. Déduisez-en au bout de quels temps de vol la hauteur d'une fusée est de 40 m.
4. L'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsqu'elles seront à la hauteur maximale.

- (a) Déterminez le temps de vol qu'il doit programmer avant l'explosion.
 (b) Quelle est alors la hauteur maximale atteinte?

EXERCICE 370.

Corrections.

Exercice 336.

- a) À partir de la représentation graphique de la calculatrice : f est strictement décroissante sur $] - \infty, 2]$, strictement croissante sur $[0, + \infty[$. f admet un minimum égale à -3 qui est atteint en 2.
 b) À partir de la représentation graphique de la calculatrice : f est strictement croissante sur $] - \infty, -5]$, strictement décroissante sur $[-5, 4]$, strictement croissante sur $[4, + \infty[$. f admet un maximum local égale à 267,5 sur $] - \infty, 4[$ qui est atteint en 2 et un minimum local égale à -100 sur $] -5, + \infty[$.

Exercice 337.

- $f(x) = 3 \Leftrightarrow x \in [1; 3]$.
- f est strictement croissante sur $[0; 1]$. f est constante sur $[1; 3]$. f est strictement décroissante sur $[3; 4]$.
- 3 est le maximum de f est il est atteint pour $x \in [1; 3]$.

Exercice 338.

x	-4	4
f	$2 \rightarrow -1,5 \rightarrow 2$	

Exercice 339.

x	-4	-1	1	4
f	$2 \rightarrow -1,5 \rightarrow 1 \rightarrow -1,5$			

Exercice 340.

x	-3	$+\infty$
f	2	

Exercice 341.

a)

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f					

b)

x	$-\infty$	0	1,5	2	$+\infty$
f		$\searrow$ -1	$\nearrow$ 2	$\searrow$ 1	$\nearrow$

c)

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
f		$\nearrow 2 \searrow$	-2	$\nearrow 2,5 \searrow$	

d)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f	$\swarrow$ $-2,5$ $\searrow$ 3 $\swarrow$ $\searrow$			

e)

x	$-\infty$	1,75	$+\infty$
f	$2,25$ $\nearrow \quad \searrow$		

f)

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f	1 $\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$ -1			

Exercice 342.

a)

x	$-\infty$	-1	1	3,5	$+\infty$
f	0 $\searrow \nearrow \searrow \nearrow$ 2 $-2,2$				

b)

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f	3 $\nearrow \searrow \nearrow$ -3			

c)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f	$1,5$ $\searrow \nearrow \searrow$ -3			

d)

x	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$
f	$0,5$ $\searrow \nearrow \searrow \nearrow \searrow$ 2 -2 -1					

e)

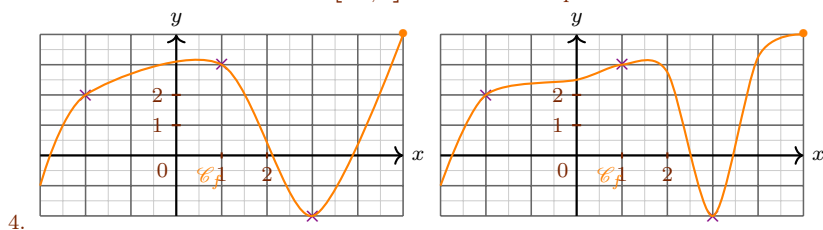
x	$-\infty$	-0,5	1	$+\infty$
f	1 $\searrow \nearrow \searrow$ $0,2$			

f)

x	$-\infty$	-1	2,5	$+\infty$
f	$0,5$ $\searrow \nearrow \searrow$ -3			

Exercice 343.

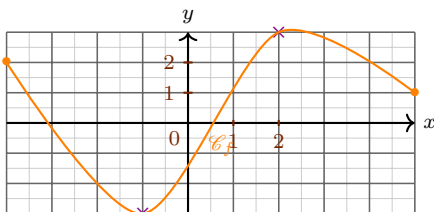
- $\mathcal{D}_f = -\infty, 5]$.
- f est strictement décroissante sur $] -\infty, -2]$. f est strictement croissante sur $] -2, 1]$. f est strictement décroissante sur $[1; 3]$. f est strictement croissante sur $[3; 5]$.
- f admet un minimum égale à -2 qui est atteint en $x = 3$. Il n'y a, a priori, pas de maximum.
- 4 est un maximum relatif sur $[-2; 5]$ et il est atteint pour $x = 5$.



4.

Exercice 344.

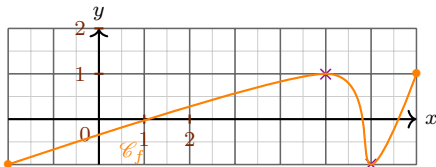
- $\mathcal{D}_g = [-4, 5]$.
- g est strictement décroissante sur $[-4; -1]$. g est strictement croissante sur $[-1; 2]$. g est strictement décroissante sur $[2; 5]$.



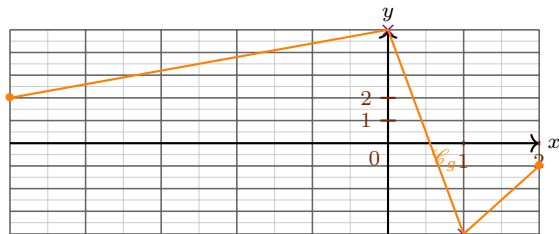
3.

Exercice 345.

x	-2	5	6	7
f	-1	1	-1	1

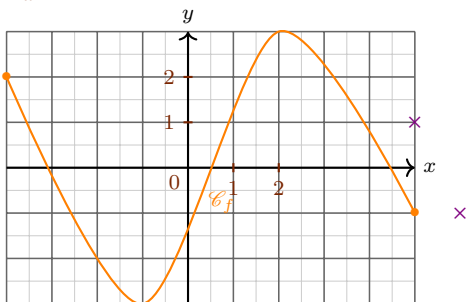


Exercice 346.



Exercice 347.

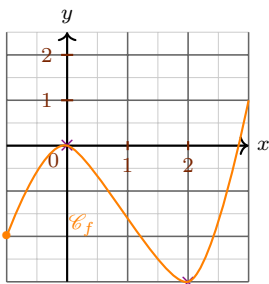
1. $\mathcal{D}_f = [-4; 5]$.
2. f est strictement décroissante sur $[-4; -1]$. f est strictement croissante sur $[-1; 2]$. f est strictement décroissante sur $[2; 5]$.
3. f admet un minimum égale à -3 atteint pour $x = -1$. f admet un maximum égale à 3 atteint en $x = 2$.



4.

Exercice 348.

1. $\mathcal{D}_f = [-1; +\infty[$.
2. f est strictement croissante sur $[-1; 0]$. f est strictement décroissante sur $[0; 2]$. f est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$.
3. f admet un minimum égale à -3 atteint pour $x = 2$. f n'admet, a priori, pas un maximum. f admet un maximum relatif à $[-1; 2]$ égale à 0 qui est atteint en $x = 0$.



4.

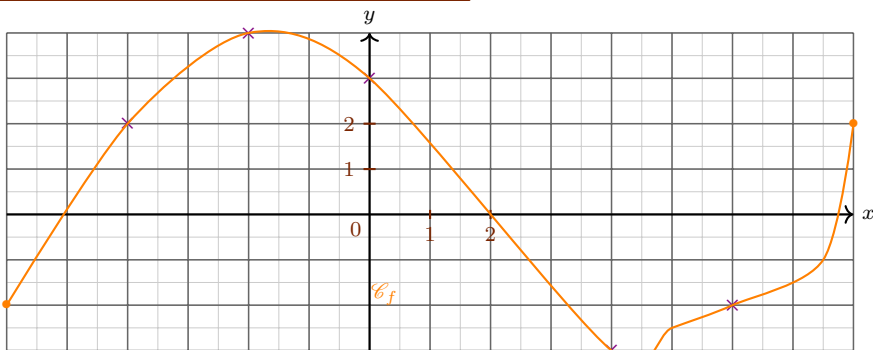
Exercice 349.

1.

x	-6	-2	4	8
f				

2.

x	-6	-2	4	8
f				



3.

4. (a) 2 admet 3 antécédents.

(b) La courbe coupe l'axe en 3 points. 0 admet 3 antécédents par f .

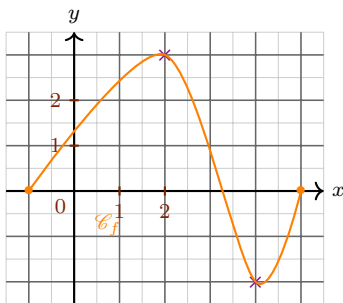
5. Oui ...

Exercice 350.

1.

x	-1	2	4	5
$f(x)$				

2.



3. f admet un maximum égale à 3 et il est atteint en $x = 3$. f un minimum égale à -2 et il est atteint en $x = 4$.

Exercice 351.

- f admet un minimum égale à 8 qui est atteint pour $x = 0$.
- g admet un minimum relatif à $]-\infty, 5]$ égale à -10 et qui est atteint en $x = -3$. g admet un maximum relatif à $[-3, +\infty[$ égale à 8 et qui est atteint en $x = 5$.
- h admet un minimum relatif à $[-2; 10]$ égale à -30 et qui est atteint en $x = 7$. g admet un maximum égale à 7 et qui est atteint en $x = 10$.
- m admet un maximum égale à 25 et qui est atteint en $x = 15$.
- p admet un minimum égale à -5 et qui est atteint en $x = 1$.

Exercice 352.

- Si $x \in]2, +\infty[$ alors on a : $x - 2 > 0$ et comme $x + 1 > 2 + 1 = 3 > 0$, $(x + 1)(x - 2) > 0$ et donc $(x + 1)(x - 2) > 0$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.
- $(x + 1)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x > 2$.
- La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[2, +\infty[$: $\sqrt{x^2 - x} > \sqrt{2}$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.

Exercice 353. Grâce à la calculatrice, ou en observant attentivement l'expression algébrique on peut conjecturer que f admet un minimum égale à 9 qui est atteint en $x = 15$.

Montrons que $f : x \mapsto 7(x - 15)^2 - 9$ admet un minimum égale à 9 qui est atteint en $x = 15$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction carré étant positive : $(x - 15)^2 \geq 0$. Puisque $7 > 0$: $7(x - 15)^2 \geq 0$. Enfin : $7(x - 15)^2 - 9 \geq -9$. Ainsi -9 est un minorant de f . Comme de plus $f(15) = -9$

f admet un minimum égale à -9 qui est atteint en $x = 15$.

Exercice 354.

- (a) Résolvons l'équation $f(x) = -1$.

On reconnaît une équation quotient. $f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{9-x^2}{1+x^2} = -1$. À l'aide d'un produit en croix on en déduit successivement : $9 - x^2 = -1(1 + x^2)$, puis $9 = -1$ ce qui est impossible.

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

- (b) Montrons que pour tout réel x , $f(x) \geq -1$.

$$f(x) + 1 = \frac{9-x^2}{1+x^2} + 1 = \frac{9-x^2+1+x^2}{1+x^2} = \frac{10}{1+x^2} > 0 \text{ donc}$$

$$f(x) > -1 \text{ quel que soit } x \in \mathbb{R}.$$

- -1 est une minorant (d'après la question 1(b)) mais pas le minimum de f sur $\mathbb{R}$ puisque cette valeur n'est pas atteinte par la fonction (d'après la question 1(a)).
-
- D'après la représentation graphique de la calculatrice : f admet un maximum égale à 9 qui est atteint en $x = 0$.

4. Démontrons que $f(x) \leq 9$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

$x^2 \geq 0$ donc $-x^2 \leq 0$ donc $9 - x^2 \leq 9$. Et comme $1 + x^2 \geq 1 > 0$, $\frac{9-x^2}{1+x^2} \leq \frac{9}{1+x^2} \leq \frac{9}{1} = 9$. De plus $f(0) = 9$ donc

f admet un minimum égale à 9 qui est atteint en $x = 0$.

Exercice 355.

a) Comparons A et B .

Nous allons utiliser le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre.

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Or $\frac{3}{4} < 1 < \frac{4}{3}$ et $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ sont dans $[0; +\infty[$ donc

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 < \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

b) Comparons A et B .

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Or $1,0029 < 1,009$ et $1,0029$ et $1,009$ sont dans $[0; +\infty[$ donc

$$1,0029^2 < 1,009^2.$$

c) Comparons A et B .

$-2,3^2$ n'est pas une image par la fonction carrée. La précédente méthode ne fonctionnera donc pas.

Clairement : $-2,3^2 < 0 < (-2,3)^2$

$$-2,3^2 < (-2,3)^2.$$

Exercice 356. Pour avoir un résultat très précis il faut raisonner algébriquement (en raisonnant par disjonction des cas pour les deux derniers). Sinon une résolution graphique convient. Cette dernière est ici plus simple et efficace.

a) $1 \leq x^2 \leq 16, 3 \leq 3x^2 \leq 48.$

b) $4 \geq x^2 > \frac{1}{4}, 12 \geq 3x^2 > \frac{3}{4}.$

c) $16 < x^2 < 121, 48 < 3x^2 < 363.$

d) $\frac{169}{25} > x > \frac{1}{49}, \frac{507}{25} > x > \frac{3}{49}.$

e) $0 \leq x < 9, 0 \leq x < 27.$

f) $0 \leq x^2 \leq 100, 0 \leq x^2 \leq 300.$

Exercice 357. Démontrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Soient a et b des réels positifs avec $a < b$.

D'une part : $4a^2 < 4b^2$, d'autre part : $3a < 3b$, donc en sommant les inégalités : $4a^2 + 3a < 4b^2 + 3b$. Enfin, en ajoutant -12 dans les deux membres : $f(a) < f(b)$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 358.

x	7	9	10
f	0	824	522

Exercice 359.

a) $-2 < -1$ et f est strictement croissante sur $[-2; -1]$ donc $f(-2) < f(-1)$.

- b) $\frac{1}{3} < \frac{3}{2}$ et f est strictement décroissante sur $[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}] \subset [0; 3]$ donc $f(\frac{1}{3}) < f(\frac{3}{2})$.
 c) f n'est pas monotone sur $[-1; 1]$ on ne peut donc conclure.
 d) $3,6 < 3,7$ et f est strictement croissante sur $[3,6; 3,7]$ donc $f(3,6) < f(3,7)$.
 e) $\frac{7}{2} < 4$ et f est strictement croissante sur $[\frac{7}{2}; 4]$ donc $f(\frac{7}{2}) < f(4)$.
 f) f n'est pas monotone sur $[1; 3,5]$ on ne peut donc conclure.

Exercice 360.

- a) Faux : la fonction carré n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$.
 b) Vrai : qui peut le plus peut le moins et $[0; 1] \subset [-5; 5]$.
 c) Faux : $x \mapsto -x^2$ est croissante sur $[-5; 0]$ et décroissante sur $[0; 5]$ mais n'est pas constante sur $[-5; 5]$.
 d) Faux : f n'est pas forcément monotone sur $[1; 6]$.

Exercice 361.

1. f est strictement décroissante sur $[-4; 1]$ et strictement croissante sur $[1; 5]$.
 2. a) $2 < 4$ et f est strictement croissante sur $[2; 4]$ donc $f(2) < f(4)$.
 b) $-3 < 0$ et f est strictement décroissante sur $[-3; 0]$ donc $f(-3) > f(0)$.
 3. On ne peut comparer $f(0)$ et $f(2)$ car f n'est pas monotone sur $[0; 2]$.

Exercice 362.

1.

x	0	10	x	0	10
Orange		$\frac{25}{2}\pi$	Vert	$\frac{25}{2}\pi$	
	0				0

2. (a) D'après les précédents tableaux de variations $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_h = \mathcal{C}_1$ leurs courbes représentatives.
 (b) h est strictement décroissante sur $[0; 5]$ puis strictement croissante sur $[5; 10]$.

Exercice 363. Le bon outil pour conjecturer ce genre de choses est la calculatrice avec la courbe représentative de la fonction.

a)

x	-4	-2	0	2	4
f	11,8	-2,5	-1	-2,5	11,8

b)

x	-2	0	0,5	3
f	10,2	1	-0,92	20,8

Exercice 364. L'impératif « Montrez » est clair : on attend une démonstration pas de calculatrice mais la démonstration à partir de la définition.

Soient a et b deux réels positifs avec $a < b$.

Montrons que $f(a) < f(b)$.

La fonction racine carrée est strictement croissante donc $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

La fonctions cube est strictement croissante donc $a^3 < b^3$.

En sommant les inégalités membre à membre : $\sqrt{a} + a^3 < \sqrt{b} + b^3$. Autrement dit $f(a) < f(b)$.

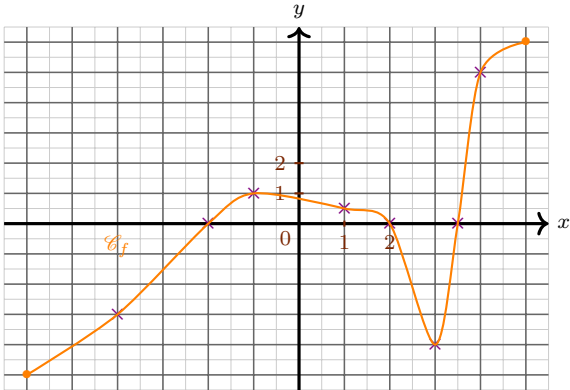
Nous avons établi que

f est strictement croissante.

Exercice 365.

1. D'après la calculatrice f admet un maximum égale à 1 qui est atteint pour $x = 1$.
2. $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x - 1)^2$.
3. D'après la question précédente : $f(x) \leq 1$ et de plus $f(1) = 1$ donc 1 est la maximum de f et il est atteint pour $x = 1$.

Exercice 366.

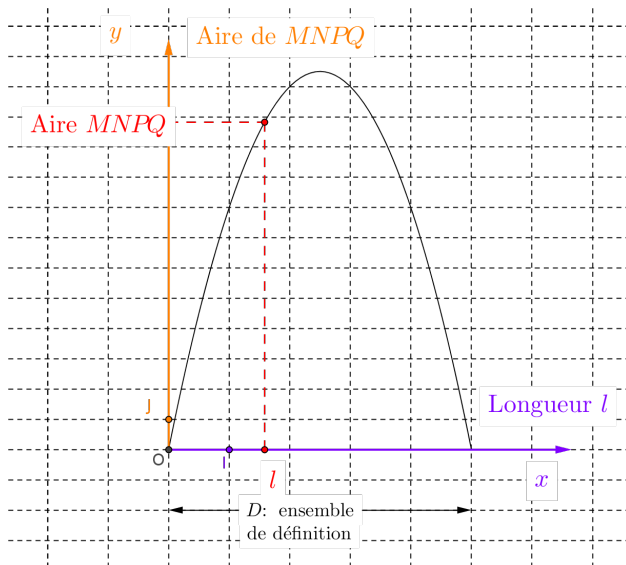


Exercice 367.

1. (a) On a l'embarras du choix : AQ , AD , QP , MQ , ...
(b) $x \in [0; 5]$.
2. (a) $\mathcal{A}(AMQ) = \frac{1}{2}x^2$ et $\mathcal{A}(BMN) = \frac{1}{2}(5 - x)^2$.
(b) $\mathcal{A}(MNPQ) = 5^2 - 2 \times \frac{1}{2}x^2 - 2 \times \frac{1}{2}(5 - x)^2 = 10x - 2x^2$.
(c) $f : x \mapsto -2x^2 + 10x$ pour tout x appartenant à $[0; 5]$.

3. (a)

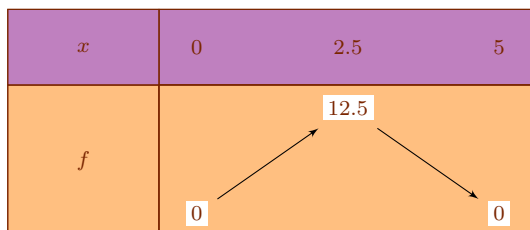
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	0	4,5	8	10,5	12	12,5	12	10,5	8	4,5	0



Cliquez sur l'image pour obtenir la version dynamique.

- (c) — lorsque x augmente passant de 0 à 2,5 l'aire $MNPQ$ augmente elle aussi passant de 0 à 12,5 ;
 — lorsque x augmente encore passant de 2,5 à 5 l'aire de $MNPQ$ au contraire diminue passant progressivement de 12,5 à 0.

(d)



(e)

4.

Exercice 368. Foin de conjectures, démontrons, que diantre. $AR = x$, $\mathcal{D}_f = [0; 8]$. Théorème de Thalès : $\frac{MR}{6} = \frac{8-x}{8}$. Donc $MR = 6 - \frac{3}{4}x$ et $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x = -\frac{3}{4}(x-8x) = -\frac{3}{4}(x-4)^2 + \frac{3}{4} \times 16$. Il y a un maximum égal à 12 qui est atteint pour $x = 4$.

Exercice 369.

Partie A : fusées de type A.

- Sur l'axe des abscisse : le temps écoulé depuis le lancement de la fusée exprimé en secondes.
 Sur l'axe des ordonnées la hauteur atteinte exprimée en mètre à l'instant t .
- 75 m.
 - 3 s et 21 s.
 - 80 m.
 - 25 s.
 - La hauteur augmente jusqu'à 12 s puis diminue.

Partie B : fusées du type B.

- $g(6) = 50$. Au bout de 6 s la fusée est à 50 m.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$g(t)$	8	26	40	50	56	58	56	50	40	26	8

3. la hauteur d'une fusée est de 40 m au bout de 6 s ou de 16 s.

4. (a) 10 s.
(b) 58 m.

Exercice 370.

Partie 7. Géométrie plane.

I Vecteurs (introduction par les coordonnées).

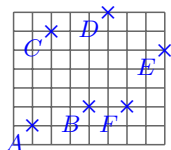
Dans cette leçon nous considérons le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Vecteurs du plan et déplacements (translations).

Définition 44. Soient x et y des nombres réels nous appellerons *vecteur $\vec{u}$ de coordonnées x et y* , et nous noterons $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le déplacement d'une longueur de $|x|$ parallèlement à l'axe des abscisses dans le sens de O vers I si x est positif et dans le sens contraire sinon, suivi du déplacement d'une longueur de $|y|$ parallèlement à l'axe des ordonnées dans le sens de O vers J si y est positif et dans le sens contraire sinon.

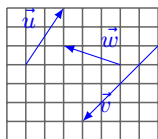
Exemples.

1. On considère le plan muni d'un repère orthonormé dont on voit le quadrillage ci-dessous.



$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur indiquant le déplacement de A à B . $\vec{u}$ est aussi le vecteur indiquant le déplacement de C vers D . $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est le vecteur correspondant au déplacement de E vers F .

2. Les déplacements dont nous parlons sont en fait des *translations* : transformation sans rotation, sans agrandissement et sans inversion. Ainsi, dans l'exemple précédent B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$. On notera $t_{\vec{u}}(A) = B$. On a de même : $t_{\vec{u}}(C) = D$ et $t_{\vec{v}}(E) = F$.
3. On représente géométriquement un vecteur par un segment muni d'une flèche. Ainsi les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ seront dessinés comme ci-dessous :



4. On appelle *vecteur nul* et on note $\vec{0}$ le vecteur de coordonnées 0 et 0 qui correspond à une absence de déplacement.

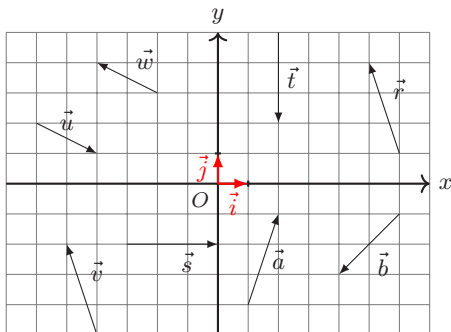
Remarques.

1. Le vecteur est un outil mathématique qui permet notamment de modéliser les translations. Nous verrons que ce n'est qu'une façon de se représenter un vecteur et qu'il en existe beaucoup d'autres : position d'un point, vitesse, accélération, champ électrique, polynômes, ...
2. Les vecteurs sont le plus souvent notés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ mais pas exclusivement.
3. Dans la suite de la leçon nous noterons $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs correspondant respectivement à un déplacement d'une unité vers la droite parallèlement à l'axe des abscisses et à un déplacement d'une unité vers le haut parallèlement à l'axe des ordonnées. Nous dirons que le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est la *base canonique* du plan. Nous y reviendrons plus tard.

4. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

EXERCICE 371.

Lisez les coordonnées des vecteurs représentés ci-contre et indiquez ceux qui sont égaux.



EXERCICE 372. Déterminez $x, y \in \mathbb{R}$ de sorte que $\vec{u} = \vec{v}$.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} x+2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 2y+3 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2x+5 \\ 3y-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 12 \\ -12y+4 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3x^2+x+7 \\ \frac{2}{y} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x-10 \\ \frac{4}{y+1} \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} x^2 \\ y+x \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 144 \\ 3y-4 \end{pmatrix}$.

Définition 45. Soient $a \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ deux vecteurs avec leurs coordonnées. On appelle *somme des vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$. On appelle *produit du vecteur* $\vec{u}$ *par le réel* a , et on note $a\vec{u}$, le vecteur $a\vec{u} \begin{pmatrix} ax_u \\ ay_v \end{pmatrix}$.

Exemples.

1. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $a = -3$ alors $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Remarques.

1. Nous écrivons des additions de vecteurs et des multiplications par des nombres mais il faut bien comprendre que ces opérations ne sont pas du tout les opérations d'addition et de multiplication que vous rencontrez depuis la primaire.

Proposition 52. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs.

- * $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité de la somme).
- * $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ (distributivité).
- * $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (distributivité).
- * $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ (associativité).
- * $1\vec{u} = \vec{u}$.

Démonstration. Il s'agit à chaque fois de regarder ce qui se passe sur les coordonnées et d'utiliser les propriétés semblables sur les nombres.

Remarques.

1. Autrement dit on peut calculer avec les vecteurs comme on calcule avec les nombres.
2. La multiplication d'un vecteur par un nombre se fait toujours par la gauche.
3. On ne divise pas un vecteur par un nombre. Cependant il faut se souvenir que diviser par a c'est multiplier par son inverse $\frac{1}{a}$, si a est non nul.

EXERCICE 373. Déterminez les coordonnées de $-7\vec{u}$ sachant que $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

EXERCICE 374. Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Le vecteur $-2\vec{u}$ a pour coordonnées :

a) $\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 375. Calculez les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ si

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Vecteur opposé.

Définition 46. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. On appelle *vecteur opposé* au vecteur $\vec{u}$ le vecteur noté $-\vec{u}$ défini par $-\vec{u} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

Remarques.

1. Autrement dit le vecteur opposé correspond au déplacement contraire de celui de $\vec{u}$.
2. Nous retrouvons le même abus (pour simplifier) l'écriture qu'avec les nombres. Au lieu d'écrire $\vec{u} + (-\vec{v})$ nous nous autoriserons à noter $\vec{u} - \vec{v}$.

Proposition 53. Soit $\vec{u}$ un vecteur. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Remarques.

1. On retrouve la notion d'opposé au sens ou nous la connaissons pour la somme de nombres.

Base du plan.

Définition 47. On appelle *combinaison linéaire* tout calcul mêlant somme de vecteurs et produit de vecteurs par des nombres.

Remarques.

1. Il s'agit de somme et de produit finis, c'est-à-dire d'un nombre fini de termes ou de facteurs.

Proposition 54. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. Il existe une unique combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (de la base canonique du plan) qui soit égale à $\vec{u}$: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Démonstration. Nous laissons de côté cette démonstration car elle nécessite la notion de colinéarité qui sera vue plus tard.

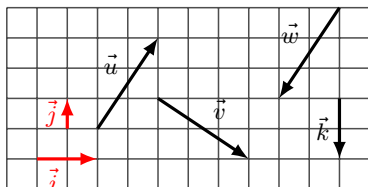
Remarques.

1. Le repère (O, I, J) pourra dorénavant être noté avec des vecteurs $(O; \vec{i}, \vec{j})$. $\vec{i}$ permet de retrouver I à partir de O : I est l'image de O par la translation de vecteur $\vec{i}$.

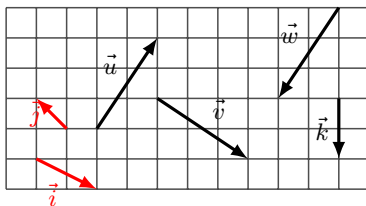
2. Il existe d'autres bases mais il faut avoir la notion de colinéarité qui sera vue dans la leçon sur les droites.

EXERCICE 376. Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

a)



b)



Norme de vecteur.

Définition 48. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ un vecteur. On appelle norme de $\vec{u}$ le nombre réel défini

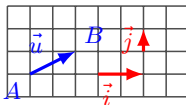
par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$.

Remarques.

1. La norme d'un vecteur est un nombre positif.
2. La norme dans le cas des déplacements s'interprète comme la longueur du déplacement comme nous le reverrons ci-après.

Exemples.

1. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}$.
2. On considère le quadrillage ci-dessous formé de carrés d'un centimètre de côté.



$AB = \sqrt{5}$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Longueur et norme ne coïncident pas toujours.

EXERCICE 377. Calculez la norme des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 378. Soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculez $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
2. Calculez les coordonnées $\vec{u} + \vec{v}$.
3. Montrez que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.

Vecteur position.

Définition 49. Soit M un point du plan de coordonnées (x,y) dans le repère (O,I,J) .

On appelle *vecteur position* de M le vecteur noté $\overrightarrow{OM}$ défini par $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Remarques.

1. Ainsi le vecteur position de M correspond au déplacement qui partant de O amène jusqu'à M .
2. Les physiciens préfèrent travailler avec le vecteur position plutôt qu'avec le point.
3. Dans le reste de cette leçon nous allons faire des allers-retours entre les vecteurs et la géométrie classique. Nous verrons que les vecteurs permettent de résoudre tous les problèmes géométriques que nous avons pu rencontrer.

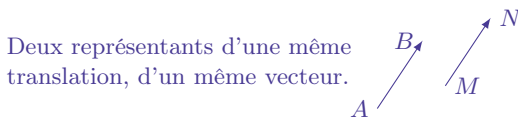
Représentant d'un vecteur.

Définition 50. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ des points du plan dont les coordonnées sont données dans un repère (O, I, J) du plan. On définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Dans ce cas $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme A en B .

Remarques.

1. Notons $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Nous dirons que l'écriture $\overrightarrow{AB}$ est *un représentant du vecteur $\vec{u}$* car son écriture pourrait utiliser d'autres points du plan. Il n'y a pas unicité du représentant d'un vecteur.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond au déplacement qui partant de A arrive en B .
3. On dit que A est *l'origine* du représentant et B son *extrémité*.
4. Si $\overrightarrow{MN}$ est un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ alors nous décomposons en
 - la *norme du vecteur* par : $\|\vec{u}\| = MN$ (confer infra),
 - la *direction du vecteur* qui est la droite (MN) (ou une autre droite parallèle),
 - le *sens du vecteur $\vec{u}$* : de M vers N .



5. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la translation qui transforme A en B . Nous aurons besoin de cette interprétation pour les exercices.
6. L'une des grandes idées mathématique du XX^e siècle fut émise par le groupe Bourbaki : ce ne sont pas les objets qui sont le plus intéressant mais les relations entre les objets. Ce ne sont pas les points qui sont intéressants mais les déplacements qui relient les points.

EXERCICE 379. On considère les points $A(-1; 2)$, $B(1; 4)$ et $C(x, 6)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminez le réel x tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient égaux.

EXERCICE 380. Soient $A(-2; 1)$ et $B(2; 4)$. Dans chacun des cas suivants, calculez x et y pour que B soit l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 - x \\ 2 + y \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix}$.

Proposition 55. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ des points du plan dont les coordonnées sont données dans un repère (O, I, J) du plan. $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Remarques.

1. Ainsi le vecteur opposé correspond au déplacement contraire : l'un va de A à B l'autre de B à A .

2. Nous aurons parfois des calculs avec des représentants de vecteurs à effectuer. Dans ce cas nous remplacerons systématiquement la soustraction par l'ajout de l'opposé : on ré-écrira $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$ en $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Proposition 56. Soient A, B, C et D des points du plan. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

Démonstration. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut successivement à

- $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$.
- $\begin{cases} x_B + x_D = x_C + x_A \\ y_B + y_D = y_C + y_A \end{cases}$.
- $\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{x_C + x_A}{2} \\ \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{y_C + y_A}{2} \end{cases}$.
- $[BD]$ et $[CA]$ se coupent en leur milieu.
- $ABCD$ est un parallélogramme.

Remarques.

1. Nous avons une caractérisation très simple des parallélogrammes. Pour démontrer qu'il y a un parallélogramme il suffit d'établir que deux représentants ont les mêmes coordonnées.
2. Attention au sens d'énumération des sommets du parallélogramme ce n'est pas $ABCD$ mais bien $ABDC$. Faites un schéma au brouillon pour vous en convaincre.
3. Rappelons une autre caractérisation très utile : $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.

Exemples.

1. Soient $A(-12, -3)$, $B(36; -11)$, $C(-27; 43)$ et $D(21; 35)$.

Montrons que $ABDC$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 36 - (-12) \\ -11 - (-3) \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 48 \\ -8 \end{pmatrix}$. De même $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 48 \\ -8 \end{pmatrix}$ et par conséquent $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Autrement dit

$ABDC$ est un parallélogramme.

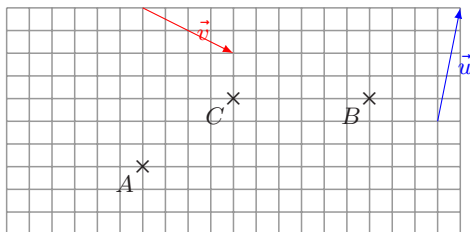
2. Reprenons les quatre points précédents.

Montrons que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

Comme précédemment $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 48 \\ -8 \end{pmatrix}$. De plus $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -48 \\ -8 \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$. Et par conséquent

$ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

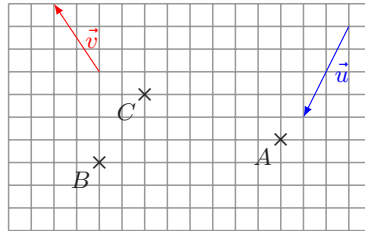
EXERCICE 381.



Tracez dans chaque cas.

- Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
- Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.
- Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A .
- Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B .
- L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
- Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
- Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B .
- Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A .

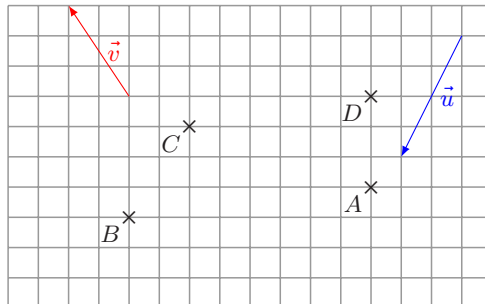
EXERCICE 382.



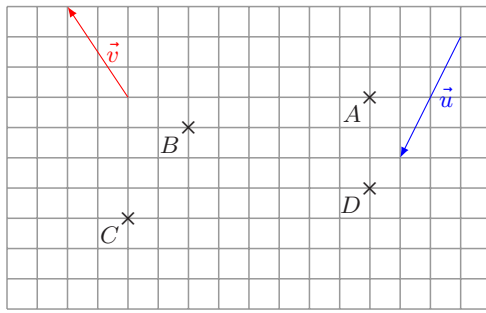
Tracez dans chaque cas.

- Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
- Le point G tel que $BACG$ soit un parallélogramme.
- Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A .
- Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B .
- L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
- Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
- Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B .
- Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A .

EXERCICE 383. Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.



EXERCICE 384. Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ et $\vec{u} + \vec{v}$.



EXERCICE 385. Soient $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(3;0)$ et $D(-1;-3)$ des points du plan muni d'un repère. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

EXERCICE 386. Soient $A(-3;3)$, $B(2;5)$, $C(4;0)$ et $D(-1;-2)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculez AC et BD .
3. Qu'en déduisez-vous sur $ABCD$?

EXERCICE 387. On considère les points $A(3, -4)$, $B(2;1)$ et $C(5;6)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminez les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 388. Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, A et B des points, C et D leurs images respectives par la translation $t_{\vec{u}}$. Démontrez que $BACD$ est un parallélogramme.

EXERCICE 389. Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, M et P des points, N l'image de M par la translation $t_{\vec{u}}$, Q un point tel que $MNQP$ soit un parallélogramme. Démontrez que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

EXERCICE 390. On considère un parallélogramme $RSTU$ de centre O . On note F l'image du point S par la translation de vecteur $\overrightarrow{UT}$ et E l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{RU}$. Démontrez que $RSET$ est un parallélogramme. **Déplacer vers relation de Chasles.**

EXERCICE 391. Soient $ABCD$ un parallélogramme et S et V des points tels que $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CD}$. Montrez que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

EXERCICE 392. On considère les points $M(x-1;2)$, $A(-1;y-5)$, $T(0,-2)$ et $H(4;3)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donnez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{HT}$.
2. Calculez x et y tels que $MATH$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 393. On considère les points $L(2x, -3)$, $A(2,y)$, $D(x,0)$ et $Y(-x;-2)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donnez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{LA}$ et $\overrightarrow{YD}$.
2. Calculez x et y tels que $LADY$ soit un parallélogramme.

Proposition 57. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ des points du plan dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormal du plan. $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Démonstration. $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$.

Exemples.

1. Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, A un point et B l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.
Calculons AB .

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2} = \sqrt{2^2 + 7^2}.$$

$$AB = \sqrt{53}.$$

EXERCICE 394. On considère les points $A(2;3)$, $B(6;1)$ et $C(-1, -3)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Calculez les coordonnées du point D image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
3. Démontrez que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
4. Calculez les valeurs exactes de longueurs AD et BC . Que pouvez-vous en déduire pour $ABDC$?

Proposition 58. Soient A , B et C trois points du plan. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Démonstration. En utilisant les résultats précédents $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ donc en sommant $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_B - x_A + x_C - x_B \\ y_B - y_A + y_C - y_B \end{pmatrix}$ enfin $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$.

Remarques.

1. Cette identité vectorielle est appelée la *relation de Chasles*. Elle est utilisée pour simplifier des calculs avec des représentants de vecteurs.
2. Nous en ferons usage de ce résultat mais sans excès. Nous l'utiliserons lorsque aucun repère ou aucune base n'est fourni et que nous ne pouvons pas travailler avec des coordonnées (encore que vous pourriez choisir votre propre repère).

Exemples.

1. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DH}$ d'après la relation de Chasles.
2. $\overrightarrow{FT} - \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{TO} = \overrightarrow{FT} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{TO} = \overrightarrow{FT} + \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{FJ}$ d'après la relation de Chasles (pour la dernière égalité).

EXERCICE 395. En choisissant des points judicieux complétez.

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\overrightarrow{AB} + \dots = \overrightarrow{AE}$ | b) $\overrightarrow{G\dots} + \overrightarrow{B\dots} = \overrightarrow{GI}$ | c) $\overrightarrow{\dots B} + \overrightarrow{B\dots} = \overrightarrow{CG}$ |
| d) $\overrightarrow{BE} + \dots = \overrightarrow{BD}$ | e) $\overrightarrow{BE} + \dots \overrightarrow{F} = \overrightarrow{B\dots}$ | f) $\overrightarrow{B\dots} + \dots \overrightarrow{A} = \overrightarrow{BA}$ |
| g) $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{G\dots} = \overrightarrow{B\dots}$ | h) $\overrightarrow{\dots E} + \overrightarrow{E\dots} = \overrightarrow{BC}$ | i) $\overrightarrow{A\dots} + \overrightarrow{B\dots} = \overrightarrow{AC}$ |
| j) $\overrightarrow{O\dots} + \overrightarrow{M\dots} = \dots \overrightarrow{P}$ | k) $\overrightarrow{A\dots} + \overrightarrow{D\dots} + \overrightarrow{M\dots} = \overrightarrow{AG}$ | |

EXERCICE 396. Simplifiez les expressions suivantes (grâce notamment à la relation de Chasles).

- | | |
|--|--|
| a) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG}$. | b) $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{CG}$. |
| c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG}$. | d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. |
| e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$. | f) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$. |

EXERCICE 397. Démontrez.

- | | |
|--|--|
| a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$. | b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$. |
| c) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$. | d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$. |
| e) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. | f) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$. |

EXERCICE 398. Soient A , B et C trois points du plan tels que : $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

1. Réalisez une figure.

2. En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ peut s'écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, exprimez le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$ en justifiant la réponse.

Proposition 59. Le point I est le milieu d'un segment $[AB]$ si et seulement si l'une des assertions suivante est vraie :

(i) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. (ii) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$. (iii) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Démonstration.

$$* \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_B - x_A) + x_A \\ y_I = \frac{1}{2}(y_B - y_A) + y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_B + x_A) \\ y_I = \frac{1}{2}(y_B + y_A) \end{cases}.$$

$$* \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

$$* \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

EXERCICE 399. Soit $ABCD$ un parallélogramme. On désigne par E et F les images respectives de B et de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Démontrez que C est le milieu des segments $[DE]$ et $[BF]$.

EXERCICE 400. Soient ABC un triangle quelconque, I le milieu de $[AB]$, I' l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$. Démontrez que $A'BCA$ est un parallélogramme puis en déduire que $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$.

EXERCICE 401. On considère un parallélogramme $EURO$. On définit les points A , B , C et D par : $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{RO}$, $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{RU}$, $\overrightarrow{RC} = \overrightarrow{EU}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{UR}$.

1. Démontrez que O est le milieu du segment $[AB]$.

2. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

EXERCICE 402. On considère les points $A(-2;3)$, $B(1;4)$ et $C(4,-5)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Dans chaque cas donnez les coordonnées (x,y) du point M .

a) $ABCM$ est un parallélogramme.

b) M est le symétrique de C par rapport au point B .

EXERCICE 403. On considère un triangle ABC . I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$. D est le symétrique de C par rapport à I et E est le symétrique de B par rapport à J . Montrez que A est le milieu du segment $[DE]$.

EXERCICE 404. Placez, sans utiliser les quadrillage de votre feuille, trois points A , B et C distinctes et non alignés ainsi que deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.

b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.

c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A .

d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B .

e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.

f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.

g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B .

h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A .

EXERCICE 405. Soient EDF un triangle rectangle en D tel que $ED = 6$ cm et $DF = 4,5$ cm, I et J les milieux respectifs de $[ED]$ et $[DF]$, G et H les images respectives de F et I par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$.

1. Quelle conjecture peut-on émettre pour le point G ?
2. Quelle est la nature de $DJEH$?

Exercices.

EXERCICE 406. Dessinez deux points A et B distincts puis placez les points M , N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 407. Soient A et B deux points distincts, I le milieu du segment $[AB]$. Dans chaque cas déterminez le réel λ tel que : $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 408. Soient A et B deux points du plan distants de 6 unités de longueur (choisissez deux unités de longueur par centimètre).

1. (a) Construisez le point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
(b) Construisez le point K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{LK}$ peut s'écrire $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, établissez une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AB}$.
(b) Déduisez-en la longueur LK en unités de longueur.

EXERCICE 409. Soit $MNPQ$ un parallélogramme. On définit le point R tel que $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$ et le point S tel que $\overrightarrow{MS} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

1. Réalisez une figure.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{MR}$ peut s'écrire $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$, montrez que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$.
(b) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{NS}$ peut s'écrire $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}$, montrez que $\overrightarrow{NS} = -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.
(c) Déduisez-en une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{NS}$.

EXERCICE 410. Soient ABC un triangle rectangle en A et I est le milieu de l'hypoténuse. On appelle A' le symétrique de A par rapport à I , B' et C' les images de B et C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$. Démontrez que A' est le milieu de $[B'C']$.

EXERCICE 411. Donnez les coordonnées du vecteur dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$.

1. $\vec{u} = \vec{b} - 7\vec{a}$.
2. $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{a} + 4\vec{a}$.
3. $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ où $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\overrightarrow{CD} = -2\vec{b} + 5\vec{a}$

EXERCICE 412. Soient $A(7; -3)$, $B(3; 2)$ et $C(-5; -4)$ des points du plan muni d'un repère. Déterminez les coordonnées du point $D(x_D; y_D)$ qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

EXERCICE 413. Soient $A(2; -3)$ et $B(-1; 4)$ deux points dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Calculez $\|\overrightarrow{AB}\|$.

EXERCICE 414. Dans un repère on considère les points : $A(-2; 1)$, $B(3; 4)$ et $C(-5; 2)$.

Calculez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

EXERCICE 415. Soient les points $A(-2; 1)$, $B(4; 2)$ et $C(2; 4)$.

1. (a) Montrez que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(6; 1)$.
(b) Calculez les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AC}$.
(c) Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. (a) Placez les points dans un repère orthonormé et dessinez le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

(b) Vérifiez le résultat de la question 1.(c).

EXERCICE 416. Les questions sont indépendantes les unes des autres (sauf les deux dernières).

1. Soient $\vec{u}(2, -1)$ et $\vec{v}(1; 2)$.
 - (a) Calculez les coordonnées de $3\vec{u}$ et $2\vec{v}$.
 - (b) Calculez les coordonnées de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.
2. Soient $\vec{u}(5; 1)$ et $\vec{v}(2; -3)$. calculez les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{u}$, $-3\vec{v}$ et $2\vec{u} - 3\vec{v}$.
3. Soient $\vec{u}(0; -1)$, $\vec{v}(3; 4)$ et $\vec{w}(8; -6)$. Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
4. Soient $\vec{u}(0; 5)$ et $\vec{v}(4; -2)$.
 - (a) Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
 - (b) Calculez les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
 - (c) Montrez que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.
5. Dites en justifiant si la proposition suivante est vraie : « Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ ».

EXERCICE 417. Soient $A(-1; -2)$, $B(5; -1)$, $C(6; 3)$ et $D(0; 2)$ des points considérés dans un repère du plan.

1. Faites un figure.
2. Construisez le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
3. Déterminez les coordonnées de E .
4. Démontrez que $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.
5. Que pouvez-vous en déduire ?

EXERCICE 418. Soient ABC un triangle et K , L et M les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrez que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BM}$.
2. Déduisez-en $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$.

EXERCICE 419. Soient ABC un triangle, D et E des points tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$. Faites une figure puis démontrez que C est le milieu du segment $[AD]$.

EXERCICE 420. Soient $ABCD$ un carré non trivial (non réduit à un point), E le symétrique de A par rapport à B et I le milieu de $[BC]$.

1. Faites un croquis à main levée.
2. Justifiez que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé du plan.
3. Déterminez les coordonnées des différents points de la figure puis montrez que I est le milieu de $[DE]$.
4. Démontrez ce résultat sans utiliser de repère.

EXERCICE 421. On considère un carré $ABCD$ non réduit à un point.

1. Justifiez que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan. Est-il orthonormé ?
2. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et en déduire les coordonnées du point C dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
3. On considère le point E symétrique de A par rapport à B et le point F symétrique de F par rapport à D . Déterminez les coordonnées des points E et F dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
4. Que semble représenter le point C par rapport aux points E et F ? Démontrez le par au moins 3 méthodes différentes.

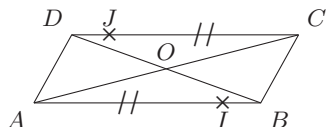
EXERCICE 422. Soient T , R et I trois points non alignés. Les points U et V sont définis par : $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{TI}$ et $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{TR}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Que peut-on conjecturer ?
2. Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$. Concluez.

EXERCICE 423. Soient T , R et I trois points non alignés. On définit les points A , B et C par : $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{IT}$, $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{TI}$ et $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RI}$.

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.
(b) En déduire une expression des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$ puis conclure.

EXERCICE 424. Soient $ABCD$ un parallélogramme de centre O , I un point du segment $[AB]$ distinct de A et de B . On désigne par J le point du segment $[CD]$ tel que : $CJ = AI$. On veut démontrer que O est le milieu du segment $[IJ]$.



1. Méthode 1 : utilisation des configurations. Démontrez que $AICJ$ est un parallélogramme. Déduisez-en que O est le milieu de $[IJ]$.
2. Méthode 2 : solution vectorielle. Déterminez deux vecteurs égaux respectivement aux vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{OJ}$. Déduisez-en un vecteur égale au vecteur $\overrightarrow{OI}$.
3. Méthode 3 : solution analytique. On désigne par a l'abscisse du point I dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Quelles sont les coordonnées des points A , B , C , D , O et I dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$? Déduisez-en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CJ}$, puis celles du point J . Démontrez que O est le milieu de $[IJ]$.

EXERCICE 425. Exercices 49 à 51 page 188 du [manuel Lelivrescolaire](#).

EXERCICE 426. Exercices 54 page 188, 56 page 189 du [manuel Lelivrescolaire](#).

EXERCICE 427. Exercices 57 et 58 page 189 du [manuel Lelivrescolaire](#).

EXERCICE 428. Exercice 53 page 188 du [manuel Lelivrescolaire](#).

Corrections.

Exercice 371. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{s} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\vec{v} = \vec{r}$.

Exercice 372.

a) $(x, y) = (6, 0)$.

b) $(x, y) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{5}\right)$.

c) $\emptyset$.

d) $(x, y) = (12, 16)$.

Exercice 373. $-7\vec{u} \begin{pmatrix} 21 \\ -7\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 374.

1. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ alors $-2\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Exercice 375.

- a) Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.
 b) Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Exercice 376.

- a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
 b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 377. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

donc $\|\vec{w}\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$.

Exercice 378.

1. $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{19}$.

2. $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.

Exercice 379. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 4 - 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x - 1 \\ 6 - 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x - 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ alors $x - 1 = 2$. $x = 3$.

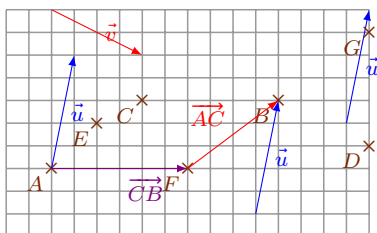
Exercice 380. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) $2x = 4$ et $-y = 3$ donc $x = 2$ et $y = -3$.

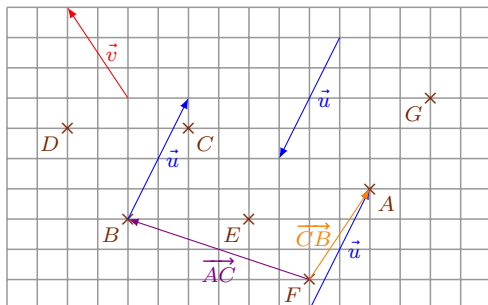
c) $y = 4$ et $x - y = 3$ donc $y = 4$ et $x = 7$.

b) $1 - x = 4$ et $2 + y = 3$ donc $x = -3$ et $y = 1$.

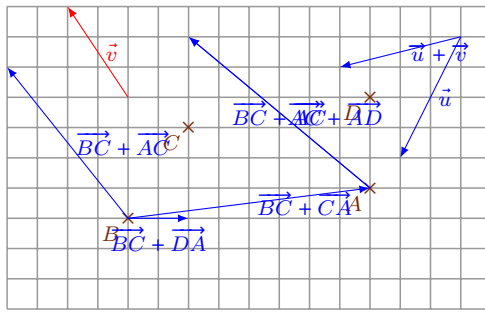
Exercice 381.



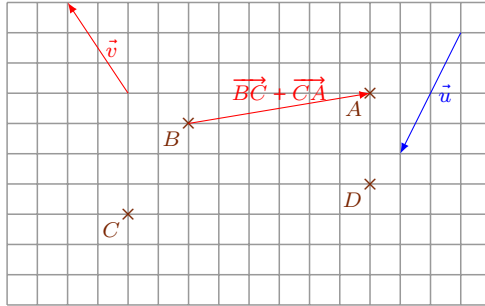
Exercice 382.



Exercice 383.



Exercice 384.



Exercice 385. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 4 - 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. De même $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 0 - (-3) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Donc, les vecteurs ayant même coordonnées : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Et par conséquent

$ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 386.

1. Il suffit de procéder comme dans l'exercice précédent
2. Le repère étant orthonormé il suffit d'utiliser la formule $AC = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$.
3. D'après les questions précédentes $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

$ABCD$ est un rectangle.

Exercice 387. Déterminons les coordonnées de D .

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si ces deux vecteurs ont les même coordonnées. Autrement dit si et seulement si $\begin{cases} 2 - 3 = x_D - 5 \\ 1 - (-4) = y_D - 6 \end{cases}$.

$$D \left(\frac{1}{5}, -\frac{5}{6} \right).$$

Exercice 388. Démontrons que $BACD$ est un parallélogramme.

$t_{\vec{u}}(A) = C$ donc $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ et $t_{\vec{u}}(B) = D$ donc $\overrightarrow{BD} = \vec{u}$. Par transitivité : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ donc $ACDB$ est un parallélogramme et enfin

$BACD$ est un parallélogramme.

Exercice 389. Démontrons : $\overrightarrow{PO} = \vec{u}$.

* $t_{\vec{u}}(M) = N$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.

* $MNQP$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

Nous déduisons des points précédents par transitivité que

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{u}.$$

Exercice 390. Démontrons que $RSTE$ est une parallélogramme.

- $RSTU$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$.
- Par construction : $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{FE}$.

Des deux points précédents nous déduisons par transitivité : $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{FE}$. Autrement dit $STEF$ est un parallélogramme. On en déduit que $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{TE}$. Or $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{RS}$ donc $\overrightarrow{TE} = \overrightarrow{RS}$. Autrement dit

$RSET$ est un parallélogramme.

Exercice 391. En faisant à main levée une figure nous voyons que $AVCS$ est un parallélogramme et par conséquent ses diagonales se coupent bien en leur milieu. Démontrons-le proprement.

Montrons que $AVCS$ est un parallélogramme.

Pour cela nous allons démontrer que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$. $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$. Or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et en remplaçant : $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{DC}$. Comme, par construction, $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CS}$, en considérant les vecteurs opposés, nous en déduisons : $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$. Nous avons bien démontré que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$ et donc que $AVCS$ est un parallélogramme. Nous en déduisons que ses diagonales

$[VS]$ et $[AC]$ se coupent en leur milieu.

Exercice 392.

1. $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -x \\ y-7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HT} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{HT} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -4 \\ y-7 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (4;2).$

Exercice 393.

1. $\overrightarrow{LA} \begin{pmatrix} 2-2x \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{YD} \begin{pmatrix} 2x \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{YD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2x = 2x \\ y+3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2}, -1\right).$

Exercice 394.

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 6 = -3 \\ y_D - 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow D(3; -5).$
3. $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ -5 - (-3) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et donc $ABDC$ est un parallélogramme.
4. $AD = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(3-2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{65}$ et $BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1-6)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{65}$.
Le parallélogramme $ABDC$ est donc un rectangle.

Exercice 395.

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$ | b) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{GI}$ | c) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CG}$ |
| d) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}$ | e) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BF}$ | f) $\overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{ZA} = \overrightarrow{BA}$ |
| g) $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{BG}$ | h) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC}$ | i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ |
| j) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP}$ | k) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG}$ | |

Exercice 396.

- $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CE}$.
- $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EI}$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \vec{0} = \overrightarrow{BA}$.
- $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$.

Exercice 397.

- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
- $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD}$.
- $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

Exercice 398.

- 1.
2. Par construction $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ce qui équivaut, d'après la relation de Chasles, à : $3\overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$. Finalement

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}.$$

Exercice 399. Démontrons que $[DE]$ et $[BF]$ se coupent en leur milieu puis que C est le milieu de $[DE]$.

- * E et F sont les images de B et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FD}$. Par conséquent $EBFD$ est un parallélogramme et donc ses diagonales $[ED]$ et $[BF]$ se coupent en leur milieu.
- * $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ car $ABCD$ est un parallélogramme. Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$, $ABEC$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. Ainsi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$ et donc C est le milieu de $[DE]$.

$[DE]$ et $[BF]$ se coupent en leur milieu C .

Exercice 400. Un schéma à main levée est un minimum pour construire la démonstration. I' l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{II'}$. A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{I'I} = -\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$. Et donc $AA'BC$ est un parallélogramme. Puisque I est le milieu de la diagonale $[AB]$ du parallélogramme $A'BCA$ c'est aussi le milieu de l'autre diagonale $[A'C]$ et donc : $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$.

Exercice 401. Là encore la salut est dans le dessin.

1. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{UR} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{OB}$ donc O est le milieu de $[AB]$.
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AU} + \overrightarrow{UB} = \dots = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC}$ donc $ADCB$ est un parallélogramme.

Exercice 402.

- a) $ABCM$ est un parallélogramme équivaut à : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (-2) = 4 - x \\ 4 - 3 = -5 - y \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (1; -6)$.
- b) M est le symétrique de C par rapport au point B équivaut à $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 4 - 1 \\ 4 - y = -5 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-2; -5)$.

Exercice 403. I est le milieu de $[AB]$ et de $[CD]$ donc $ADBC$ est un parallélogramme et par conséquent $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$. De même $ABCE$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB}$. Ainsi $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AD}$ et enfin A est le milieu de $[ED]$.

Exercice 404. Les constructions se font au compas et à la règle non graduée. Le principe est de tracer le quatrième sommet du parallélogramme à chaque fois. En effet une égalité de vecteurs peut être vue comme l'existence d'un parallélogramme.

Exercice 405.

1. G semble être le milieu de $[EF]$.
2. D'une part I est, par construction, le milieu de $[DE]$. D'autre part, H étant l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$, $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{JI}$ et donc I est le milieu de $[JH]$. Nous en déduisons que $DJEH$ est un parallélogramme.

Exercice 406.

Exercice 407. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 408.

1. (a)
- (b)

2. (a) D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\right) = \left(-\frac{5}{2} - 1 - \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{5 \times 3}{2 \times 3} - \frac{6}{6} - \frac{4 \times 2}{3 \times 2}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{-15-6-8}{6}\overrightarrow{AB}$.

Méthode 1 : utilisation des configurations. Démontrez que $AICJ$ est un parallélogramme. Déduisez-en que O est le milieu de $[IJ]$. $\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}$.

- (b) Puisque $\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}$, nous en déduisons : $\|\overrightarrow{LK}\| = \left|-\frac{29}{6}\right| \times \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{29}{6} \times AB = \frac{29}{6} \times 6$.

$$LK = 29.$$

Exercice 409.

- 1.
2. (a) D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$. Or, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$, donc en substituant : $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$.
- (b) $\overrightarrow{NS} = -\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS} = -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.
- (c) $-\frac{4}{3}\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{NS}$.

Exercice 410. D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{B'I'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{II'}$. Or par construction I est milieu de $[A'I']$ donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{II'}$, et $B'B = \overrightarrow{IA}$ donc $\overrightarrow{B'I'} = \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. De $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CC'}$ nous déduisons que $BB'C'C$ est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$. Finalement : $\overrightarrow{B'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}$.

I' est le milieu de $[B'C']$.

Exercice 411.

1. $\vec{u} = -7\vec{a} + \vec{b}$. $\vec{u} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{a} + 4\vec{a} + 2\vec{b} = 0\vec{a} + 2\vec{b}$. $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ où $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\overrightarrow{CD} = -2\vec{b} + 5\vec{a}$. $\vec{w} = 2(\vec{a} + \vec{b}) - 3(-2\vec{b} + 5\vec{a}) = -13\vec{a} + 8\vec{b}$.
 $\vec{w} \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 412. Déterminons x_D et y_D .

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 7 = x - (-5) \\ 2 - (-3) = y - (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$D(-9, 1).$$

Une rédaction alternative.

Déterminons x_D et y_D .

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme. De plus $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu. Autrement dit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{x_B + x_C}{2}$ et $\frac{y_A + y_D}{2} = \frac{y_B + y_C}{2} \Leftrightarrow \frac{7 + x_D}{2} = \frac{3 + (-5)}{2}$ et $\frac{-3 + y_D}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} \Leftrightarrow x_D = -9$ et $y_D = 1$.

Nous avons démontré qu'il y a un seul point D qui satisfassent à la condition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et ses coordonnées sont $(-9; 1)$.

Exercice 413. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}$.

Exercice 414. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x + 3 - x + (-5) - x = 0 \\ 1 - y + 4 - y + 2 - y = 0 \end{cases}.$

$$M\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Exercice 415.

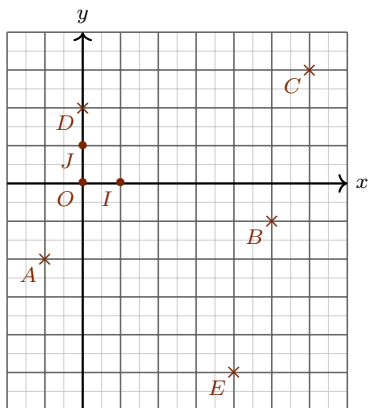
1. (a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 2 - 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (b) De même $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- 2.

Exercice 416.

1. (a) $3\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $2\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- (b) $3\vec{u} + 2\vec{v} \begin{pmatrix} 6 + 2 \\ -3 + 4 \end{pmatrix}$ donc $3\vec{u} + 2\vec{v} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $2\vec{u} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$, $-3\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$.
3. $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 5$, $\|\vec{w}\| = 10$.
4. (a) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{5}$.
- (b) i. $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- ii. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
5. L'affirmation est fausse. Un contre-exemple est fourni par l'exercice précédent.

Exercice 417.

- 1.



2. Construisez le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

3. Déterminons les coordonnées de E .

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Or : $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - (-1) = 5 \\ y_E - (-2) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow (x_E, y_E) = (4, -5)$.

$$E(4, -5).$$

4. Démontrons : $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc on a bien

$$\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}.$$

5. Puisque $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB}$, B est le milieu de $[CE]$.

Exercice 418. Si aucune figure n'est demandée il est nécessaire pour aborder un tel exercice de faire un schéma.

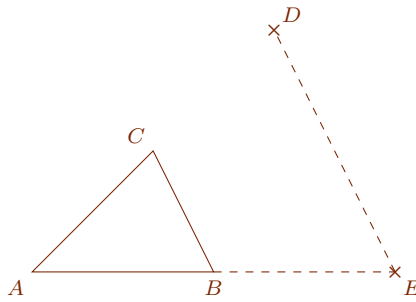
1. Comme M est le milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Donc, d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$. Puisque K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AL}) = \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}$. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{KL}.$$

2. Puisque M est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$. Donc, d'après la question précédente :

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{KL}.$$

Exercice 419.



Nous allons utiliser une caractérisation vectorielle du milieu : C est le milieu de $[AD]$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Pour démontrer cette égalité nous disposons d'informations sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$. Nous allons, avec la relation de Chasles, nous allons décomposer $\overrightarrow{AD}$ en faisant apparaître tous ces vecteurs. Autrement dit il faut trouver un chemin qui va de A à D et qui passe si possible par B et E (ou C mais il s'avérera que ce n'est pas nécessaire).

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}$. Comme $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$. Comme $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$. D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$. Nous en déduisons finalement

C est le milieu de $[AD]$.

Nous aurions pu aussi utiliser une variante du théorème des milieux.

Exercice 420.

- 1.
2. Par construction ABD est un triangle isocèle rectangle en A donc

$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé.

3. * Du fait du choix du repère : $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$.
 * Puisque $ABCD$ est un carré : $C(1;1)$.
 * E est le symétrique de A par rapport à B . Autrement dit B est le milieu de $[AE]$. Nous en déduisons : $x_B = \frac{x_A + x_E}{2}$. Ce qui équivaut successivement à : $1 = \frac{0 + x_E}{2} \Leftrightarrow 1 \times 2 = \frac{x_E}{2} \times 2 \Leftrightarrow 2 = x_E$, et de même pour les ordonnées : $y_B = \frac{y_A + y_E}{2}$. Ce qui équivaut successivement à : $0 = \frac{0 + y_E}{2} \Leftrightarrow 0 \times 2 = \frac{y_E}{2} \times 2 \Leftrightarrow 0 = y_E$. Ainsi : $E(2,0)$.
 * Puisque I est le milieu de $[BC]$: $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$ et $y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ donc : $I(1; \frac{1}{2})$.

Démontrons que I est le milieu de $[DE]$.

Nous allons simplement vérifier que le milieu de $[DE]$ et I coïncident car ils ont même coordonnées.

Si nous notons M le milieu de $[DE]$ nous avons d'une part $x_M = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$ et $y_M = \frac{y_D + y_E}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ donc $M(1; \frac{1}{2})$. Puisque M et I ont même coordonnées nous pouvons affirmer

I est le milieu de $[DE]$.

4. En utilisant le théorème des milieux.

Exercice 421.

1. $ABCD$ est un carré donc ABD est un triangle isocèle rectangle en A . Par conséquent

$$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \text{ est un repère orthonormé.}$$

2. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, d'après l'identité du parallélogramme

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Calculons

les coordonnées de C .

* D'une part $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$,

* d'autre part $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} (1-0) + (0-0) \\ (0-0) + (1-0) \end{pmatrix}$,

nous en déduisons donc : $x_C = 1$ et $y_C = 1$.

$$C(1; 1).$$

3. Puisque E et le symétrique de A par rapport à B , B est le milieu de $[AE]$ et, par conséquent, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nous en déduisons $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 2 \times 1 \\ 2 \times 0 \end{pmatrix}$ i.e. $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mais $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{cases} x_E = 2 \\ y_E = 0 \end{cases}.$$

$$E(2; 0).$$

En procédant de même

$$F(0; 2).$$

4. C est le milieu de $[EF]$. Voici trois méthodes pour le démontrer :

* Montrer avec les coordonnées que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$.

* En calculant les coordonnées du milieu de $[EF]$ nous nous rendons compte qu'elles coïncident avec celles de C .

* En utilisant le théorème des milieux. Ceci dit il faudrait expliciter le fait que C est dans le même demi-plan délimité par (AD) que F .

Exercice 422.

- Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Que peut-on conjecturer ?
- Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$. Concluez.

Exercice 423.

-
-
- (a) D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$. De même : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.
(b) D'après la question précédente : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$. Donc, d'après l'énoncé :

Exercice 424.

- Les côtés opposés $[DJ]$ et $[IB]$ sont parallèles et de même longueur donc le quadrilatère est un parallélogramme. Par conséquent ses diagonales se coupent en leur milieu.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JC}$ et $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ donc $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{JO}$.
- $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$, $O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $I(a,0)$ donc $\overrightarrow{CJ} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$, $J(1-a,1)$. Calcul des coordonnées du milieu de $[IJ]$.

Exercice 425.

Exercice 49 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{LK} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{FG} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{d} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$

(b) $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \overrightarrow{AC} = 1\vec{i} - 4\vec{j}, \overrightarrow{LK} = 1\vec{i} + 2\vec{j}, \overrightarrow{FG} = 2\vec{i} - 3\vec{j}, \vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j}, \vec{d} = -2\vec{j}.$

Exercice 50 page 188 du manuel Lelivrescolaire. $A(-1; 1), B(1; 1,5), C(4; 1,5), D(1; -1), E(1; -2), F(7; -2,5).$ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 6 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$ Les coordonnées sont les opposées des précédents.

Exercice 51 page 188 du manuel Lelivrescolaire. $A(-2; 3), B(-3; 2), C(-4; 0), D(0; 1), E(-1; -2), F(-3; 0).$ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Exercice 426.

Exercice 54 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $G(-1; 2), H(5; -2), M(7; 4), N(0,1), P(3,0).$

(b)

Exercice 56 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) Oui.

(b) Non.

(c) Non.

(d) Oui.

Exercice 427.

Exercice 57 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $ABCD$ est un parallélogramme car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$

(b) C est le milieu de $[BE]$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}.$

(c) C est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$ car $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA}.$

Exercice 58 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) M' symétrique de M par la symétrie de centre P ssi P est milieu de $[MM']$, donc ssi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PM'}.$ Donc $M'(15; -9).$

(b) On en déduit $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$ donc P milieu de $[AC].$

(c) D'après les questions précédentes les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu $P.$

Exercice 428.

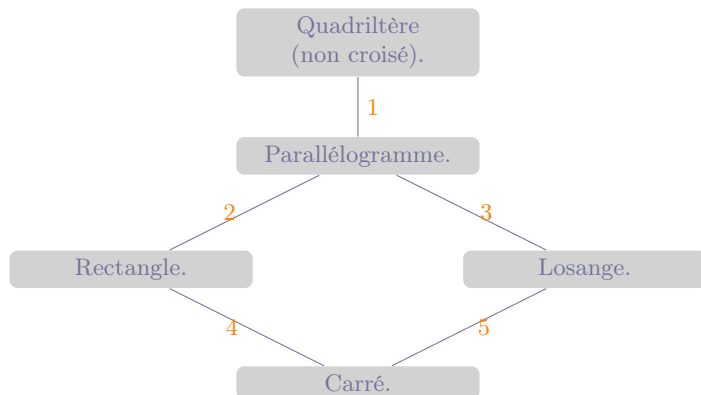
1. $x = 3$ et $y = -4.$

2. $x = 3$ et $y = 8.$

3. $x = -6.$

II Quadrilatères.

Quadrilatères (convexes) du plan.



1 Parallélogramme.

Définition 51. Un parallélogramme est un quadrilatère (non croisé) du plan dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Proposition 60. Pour qu'un quadrilatère soit un *parallélogramme* il faut (conditions nécessaires) et il suffit que (il n'y a pas besoin de conditions supplémentaires) : ses diagonales se coupent en leur milieu.

On utilise aussi d'autres conditions nécessaires et suffisantes :

1. les côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
2. les côtés opposés sont de même longueur deux à deux ;
3. deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur ;
4. les angles opposés ont même mesure deux à deux ;
5. ses angles consécutifs sont supplémentaires deux à deux.

Remarques.

1. S'il n'est pas impossible de considérer qu'un quadrilatère croisé soit un parallélogramme cela contredit l'aspect « parallèle ». De ce point de vue les caractérisations faisant intervenir la longueur ne sont pas tout à fait satisfaisantes.
2. Les caractérisations avec les angles pour être exactes mériteraient de tenir compte de l'orientation du plan (directe et indirecte, comme on dit au lycée, ou horaire et anti-horaire, comme on dit au collège). La notion d'orientation du plan n'étant pas au programme nous éviterons, si possible, d'avoir recours aux caractérisation avec des angles.
3. Nous utiliserons préférentiellement la caractérisation par les milieux des diagonales.
4. Nous verrons également une caractérisation vectorielle qui est très efficace.

2 Rectangle.

Pour qu'un parallélogramme soit un *rectangle* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des propositions suivantes :

1. il possède un angle droit ;
2. les diagonales ont même longueur ;

3 Losange.

Pour qu'un parallélogramme soit un *losange* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des propositions suivantes :

1. il possède deux côtés consécutifs de même longueur ;
2. les diagonales sont perpendiculaires ;

4 et 5 Carré.

Pour qu'un rectangle soit un *carré* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des proposition suivantes :

1. il possède deux côtés consécutifs de même longueur ;
2. les diagonales sont perpendiculaires ;

Pour qu'un losange soit un carré il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des proposition suivantes :

1. il possède un angle droit ;
2. les diagonales ont même longueur ;

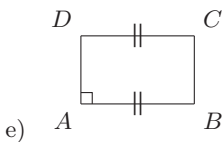
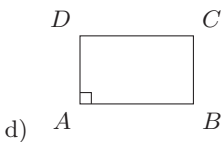
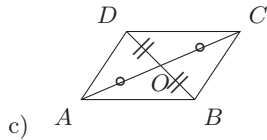
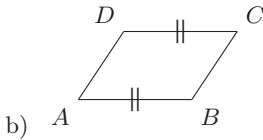
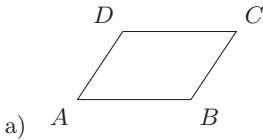
Remarques.

1. Ainsi le carré est un losange ou un rectangle particulier, le rectangle et le losange sont des parallélogrammes particuliers. Les carrés, les losanges et les rectangles sont nécessairement (*i.e.* forcément) des parallélogrammes.
2. Ce travail peut être complété en ajoutant le trapèze.
3. Certaines caractérisations ne sont plus valables si les quadrilatères ne sont pas convexes.



Géométrie classique.

EXERCICE 429. Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.



EXERCICE 430. Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

- Le quadrilatère $ABCD$ à deux angles opposés de même mesure.
- $ABCD$ à des côtés opposés parallèles deux à deux.
- Le trapèze $ABCD$ a deux angles opposés de même mesure.
- $ABCD$ est un losange.
- $ABCD$ est non croisé et ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux.
- $ABCD$ est non croisé et deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
- $ABCD$ est un rectangle.
- $ABDC$ est un carré.

EXERCICE 431. On considère un trapèze $ABCD$ de bases $[AD]$ et $[BC]$. On place E sur le segment $[AD]$ et F sur le segment $[BC]$ tels que $AE = CF$.

- Faites une figure à main levée.
- Démontrer que $AFCE$ est un parallélogramme.

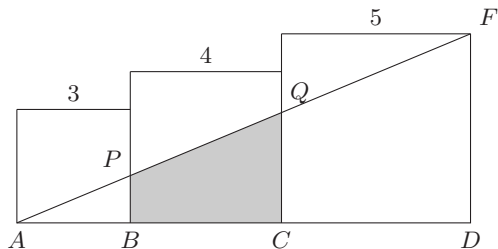
EXERCICE 432. On considère un quadrilatère quelconque $ABCD$ et on place les milieux I , J , K et L des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. On considère alors le quadrilatère $IJKL$.

- Faites deux figures distinctes illustrant cet énoncé.
- Émettez à partir des précédentes figures une conjecture.
- Démontrez à l'aide de la propriété des milieux, que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AC) .
- Démontrez la conjecture formulée.

EXERCICE 433. On considère deux points O_1 et O_2 tels que $O_1O_2 = 3$ cm. Les cercles de centres O_1 et O_2 de rayon 4 cm se coupent en P_1 et P_2 .

- Faites une figure.
- Quelle est la nature du quadrilatère $O_1P_1O_2P_2$?
 - Quelle est la position relative des droites (O_1O_2) et (P_1P_2) ?
 - La droite (P_1P_2) est-elle une bissectrice de l'angle $\widehat{O_1P_1O_2}$?

EXERCICE 434. La figure ci-dessous est formée de trois carrés de côtés respectifs 3 cm, 4 cm et 5 cm.



Nous admettons que l'aire de la partie colorée est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(BP + CQ) \times BC$ (aire d'un trapèze). Les résultats seront donnés sous forme irréductible.

- À l'aide des triangles ACQ et ADF calculez CQ .
- À l'aide des triangles ABP et ACQ calculez BP .
- Calculez l'aire $\mathcal{A}$.

Géométrie repérée.

EXERCICE 435. Représentez les points proposés dans un repère orthonormé (O, I, J) . Conjecturez la nature du quadrilatère ainsi construit puis démontrez cette conjecture.

- $M(-1; 3)$, $N(3; 2)$, $P(3, -2)$, $Q(-2, -1)$.

2. $A(1; 3)$, $B(5; 1)$, $C(3, -1)$, $D(-1; 1)$.
3. $E(3; 1)$, $F(2; 3)$, $G(-4; 0)$, $H(-3, -2)$.
4. $P(-3; 4)$, $Q(-2; 1)$, $R(1; 0)$, $S(0; 3)$.
5. $U(1; 3)$, $V(3, -1)$, $W(-1, -3)$, $S(-3; 1)$.

EXERCICE 436. $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres quelconques d'un cercle $\mathcal{C}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$?

EXERCICE 437. Considérons un parallélogramme $ABCD$ dans un plan muni d'un repère. Sachant que $A(-1; 7)$, $B(-20; 100)$, $C(3; 107)$ et $D(22; y_D)$, déterminez l'ordonnée y_D du point D .

Corrections.

Exercice 429.

- | | | |
|---------|---------|---------|
| a) Non. | b) Non. | c) Oui. |
| d) Non. | e) Non. | |

Exercice 430.

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| a) Non. | b) Oui. | c) Oui. | d) Oui. |
| e) Oui. | f) Oui. | g) Oui. | h) Oui. |

Exercice 431. Le résultat est à peu près immédiat puisque, par construction, les côtés $[AE]$ et $[CF]$ sont parallèles et de même longueur.

Exercice 432.

- 1.
2. Il semble que $IJKL$ soit un parallélogramme.
3. I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$ donc $(IJ) \parallel (AC)$.
4. De même on établit : $(KL) \parallel (AC)$. Par transitivité, d'après la question précédente : $(IJ) \parallel (KL)$.
De même on démontre que : $(IL) \parallel (JK)$.
On peut alors conclure que $IJKL$ est un parallélogramme ses côtés opposés étant parallèles deux à deux.

Exercice 433.

- 1.
2. (a) $O_1P_1O_2P_2$ est un losange puisque ses côtés ont tous la même longueur 4 cm.
(b) $(O_1O_2) \perp (P_1P_2)$ puisque ce sont les diagonales d'un losange. On peut également voir (P_1P_2) comme la médiatrice de (O_1O_2) du fait de l'équidistance par construction.
(c) La droite (P_1P_2) est une bissectrice de l'angle $\widehat{O_1P_1O_2}$ car $O_1P_1O_2$ est isocèle en P_1 donc la bissectrice de l'angle $\widehat{O_1P_1O_2}$ se confond avec la hauteur issue de P_1 .

Exercice 434.

1. **Calculons CQ .**

- **Configuration de Thalès.** Les points A, C, D d'une part et A, Q, F d'autre part sont alignés dans cet ordre.
- **Hypothèse d'utilisation du théorème de Thalès.** Puisque les quadrilatères sont des carrés $(CQ) \parallel (DF)$

Des deux points précédents nous déduisons d'après le théorème de Thalès que $\frac{CQ}{DF} = \frac{AC}{AD}$.
Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} \frac{CQ}{5} &= \frac{3+4}{3+4+5} \\ \frac{CQ}{5} &= \frac{7}{12} \\ \frac{CQ}{5} \times 5 &= \frac{7}{12} \times 5 \\ CQ &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$

$$CQ = \frac{35}{12} \text{ cm.}$$

2. En procédant de même :

$$BP = \frac{5}{4}.$$

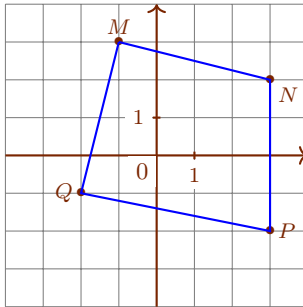
3. Calculons $\mathcal{A}$.

Il s'agit d'un trapèze donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(BP + CQ) \times BC = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} + \frac{35}{12} \right) \times 4 = \frac{25}{3}$.

$$\mathcal{A} = \frac{25}{3} \text{ cm}^2.$$

Exercice 435.

1. Conjeturons le résultat en dessinant la situation.



Le quadrilatère ne semble pas même être un parallélogramme.

2. $ABCD$ semble être un parallélogramme démontrons-le.

Notons M le milieu de $[AC]$. Nous avons

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} \\ &= \frac{1 + 3}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} \\ &= \frac{3 + (-1)}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc : $M(2; 1)$.

Notons N le milieu de $[BD]$. Nous avons

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{x_B + x_D}{2} \\ &= \frac{5 + (-1)}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_N &= \frac{y_B + y_D}{2} \\ &= \frac{1 + 1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc : $N(2; 1)$

Par conséquent : $M = N$.

Les diagonales de $ABCD$ se coupant en leur milieu nous pouvons affirmer que

$ABCD$ est un parallélogramme.

3. Démontrons que $EFGH$ est un rectangle.

Démontrons tout d'abord que $EFGH$ est un parallélogramme.

Notons I le milieu de $[EG]$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 x_I &= \frac{x_E + x_G}{2} \\
 &= \frac{3 + (-4)}{2} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Donc : $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Notons J le milieu de $[FH]$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 x_J &= \frac{x_F + x_H}{2} \\
 &= \frac{2 + (-3)}{2} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Donc : $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $EFGH$ se coupent en leur milieu et donc $EFGH$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $EFGH$ est un rectangle.

Il suffit de montrer que, par exemple, ses diagonales sont de même longueur.

(O, I, J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned}
 EG &= \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2} \\
 &= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (1 - 0)^2} \\
 &= \sqrt{50} \\
 &= 5\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 FH &= \sqrt{(x_F - x_H)^2 + (y_F - y_H)^2} \\
 &= \sqrt{[2 - (-3)]^2 + [3 - (-2)]^2} \\
 &= \sqrt{50} \\
 &= 5\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Donc : $EG = FH$. $EFGH$ est donc un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

$EFGH$ est un rectangle.

4. Démontrons que $PQRS$ est un losange.

Démontrons tout d'abord que $PQRS$ est un parallélogramme.

Notons I le milieu de $[PR]$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 x_I &= \frac{x_P + x_R}{2} \\
 &= \frac{-3 + 1}{2} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Donc : $I(-1; 2)$.

Notons J le milieu de $[QS]$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 x_J &= \frac{x_Q + x_S}{2} \\
 &= \frac{-2 + 0}{2} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_I &= \frac{y_P + y_R}{2} \\
 &= \frac{4 + 0}{2} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_J &= \frac{y_Q + y_S}{2} \\
 &= \frac{1 + 3}{2} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Donc : $J(-1; 2)$.

Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $PQRS$ se coupent en leur milieu et donc $PQRS$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $PQRS$ est un losange.

Il suffit de montrer que, par exemple, que deux côtés consécutifs sont de même longueur. (O, I, J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned}PQ &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \\&= \sqrt{[-3 - (-2)]^2 + (4 - 1)^2} \\&= \sqrt{10}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}QR &= \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2} \\&= \sqrt{(-2 - 1)^2 + (1 - 0)^2} \\&= \sqrt{10}\end{aligned}$$

Donc : $PQ = QR$. $PQRS$ est donc un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur. Autrement dit :

$PQRS$ est un losange.

5. Démontrons que $UVWS$ est un carré.

Démontrons tout d'abord que $UVWS$ est un parallélogramme.

Notons I le milieu de $[UW]$. Nous avons

$$\begin{array}{l|l}x_I = \frac{x_U + x_W}{2} & y_I = \frac{y_U + y_W}{2} \\= \frac{1 + (-1)}{2} & = \frac{3 + (-3)}{2} \\= 0 & = 0\end{array}$$

Donc : $I(0; 0)$.

Notons J le milieu de $[VS]$. Nous avons

$$\begin{array}{l|l}x_J = \frac{x_V + x_S}{2} & y_J = \frac{y_V + y_S}{2} \\= \frac{3 + (-3)}{2} & = \frac{-1 + 1}{2} \\= 0 & = 0\end{array}$$

Donc : $J(0)$.

Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $PQRS$ se coupent en leur milieu et donc $PQRS$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $UVWS$ est un losange.

Il suffit de montrer que, par exemple, que deux côtés consécutifs sont de même longueur. (O, I, J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned}UV &= \sqrt{(x_U - x_V)^2 + (y_U - y_V)^2} \\&= \sqrt{(1 - 3)^2 + [3 - (-1)]^2} \\&= \sqrt{8} \\&= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 VW &= \sqrt{(x_V - x_W)^2 + (y_V - y_W)^2} \\
 &= \sqrt{[3 - (-1)]^2 + [-1 - (-3)]^2} \\
 &= \sqrt{8} \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Donc : $UV = VW$. $UVWS$ est donc un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur. Autrement dit c'est un losange.

Démontrons que le losange $UVWS$ est un carré.

Il suffit par exemple de démontrer que $UVWS$ a des diagonales de même longueur. (O, I, J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned}
 UW &= \sqrt{(x_U - x_W)^2 + (y_U - y_W)^2} \\
 &= \sqrt{[1 - (-1)]^2 + [3 - (-3)]^2} \\
 &= \sqrt{85}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 VS &= \sqrt{(x_V - x_S)^2 + (y_V - y_S)^2} \\
 &= \sqrt{[3 - (-3)]^2 + (-1 - 1)^2} \\
 &= \sqrt{85}
 \end{aligned}$$

Donc : $UW = VS$. $UVWS$ est donc un losange dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

$UVWS$ est un carré.

Exercice 436. Démontrons que $ACBD$ est un rectangle.

$ACBD$ est un parallélogramme puisque ses diagonales $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en leur milieu (qui est le centre du cercle).

$[AB]$ et $[CD]$ étant deux diamètres d'un même cercle $AB = CD$. Ainsi les diagonales du parallélogramme $ACBD$ ont même longueur et par conséquent

$ACBD$ est un rectangle.

Exercice 437. Déterminons l'ordonnée de D .

Notons M le milieu de $[AC]$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
 y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} \\
 &= \frac{7 + 3}{2} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

Et puisque M est aussi le milieu de $[BD]$.

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$5 = \frac{-20 + y_D}{2}$$

$$5 \times 2 = \frac{-20 + y_D}{2} \times 2$$

$$10 = \frac{(-20 + y_D) \times 2}{2 \times 1}$$

$$10 = -20 + y_D$$

$$10 + 20 = -20 + y_D + 20$$

$$30 = y_D$$

$$y_D = 30.$$

III Colinéarité et droites.

Nous allons nous intéresser à la relation qui existe entre un vecteur et le vecteur obtenu en multipliant ce dernier par un nombre quelconque. Cette relation est appelée la colinéarité.

La colinéarité va participer à la définition de la droite. Ce qui va nous conduire à définir le parallélisme et à caractériser l'alignement.

Colinéarité.

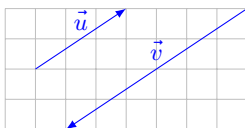
Définition 52. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* si et seulement si il existe un nombre réel λ (i.e. on peut en trouver au moins un) tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Remarques.

1. Nous pouvons voir la chose comme une sorte de rapport de proportionnalité entre les vecteurs.
2. Il suffit d'établir l'une des deux égalités pour établir la colinéarité de deux vecteurs.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
4. Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$. L'ensemble formé de tous les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ est appelé *une direction*.

Exemples.

1. Si $\vec{u} = 2\vec{v}$ alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
- 2.



Nous remarquons que $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$ donc $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

3. Si $6\vec{u} - 4\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car : $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{v}$.
4. Si deux vecteurs sont égaux alors ils sont colinéaires car $\vec{u} = 1\vec{v}$.
5. $\vec{0}$ est colinéaire à $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0\vec{u}$.

Remarques.

1. « être colinéaires à » est une relation d'équivalence :
 - elle est réflexive, $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{u}$,
 - elle est symétrique, si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ alors $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$,
 - elle est transitive, si, d'une part, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, et, d'autre part, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires alors $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Nous pourrions utiliser la transitivité dans certaines démonstration.

Définition 53. Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs dont les coordonnées relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, sont respectivement $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$. On appelle *déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$* , et on note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ le nombre $x_u y_v - y_u x_v$ qu'on note aussi $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$.

Exemples.

1. Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \text{ et } \det(\vec{v}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times 4 = 2.$$

Remarques.

1. Le déterminant de la famille de vecteurs $(\vec{u}; \vec{v})$ par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ devrait se noter $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ mais nous écrirons simplement $\det(\vec{u}; \vec{v})$.
2. La notation $\det(\vec{u}, \vec{v})$ ne nécessite pas de connaître les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est plus condensée. Au contraire la notation $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ fait intervenir les coordonnées des vecteurs.
3. Comme vu en exemple : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$. On dit que le déterminant est une forme bilinéaire alternée.

Proposition 61. Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs dont les coordonnées relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, sont respectivement $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils vérifient l'une au moins des propriétés suivantes.

- (i) Il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.
- (ii) Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles.
- (iii) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration. Par définition de la colinéarité $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Autrement dit si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ y_2 = \lambda y_1 \end{cases}$$

Autrement dit si et seulement si les coordonnées de $\vec{u}$ sont proportionnelles à celles de $\vec{v}$. Ce qui équivaut à dire que le produit en croix est vérifié.

Autrement dit $x_u \times y_v - x_v \times y_u = 0$.

x_u	x_v
y_u	y_v

Remarques.

1. D'un point de vu pratique nous retiendrons que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
2. Nous privilégierons, si possible, la recherche du coefficient de proportionnalité entre les coefficients qui nous fournira l'égalité liant les deux vecteurs plutôt que le calcul du déterminant.
3. par contre le déterminant est très efficace pour démontrer que des vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exemples.

1. Déterminons si les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \pi^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} 1 & \pi^{-1} \\ \pi & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 - \pi \pi^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Nous aurions pu le justifier plus succinctement : $\pi \vec{v} = \vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Déterminons si les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \times 4 - (-3) \times 3 = 1 \neq 0.$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

EXERCICE 438. Montrez que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 439. Soient $A(-10; 7)$, $B(-20; 10)$, $C(5; -2)$ et $D(10; -8)$ des points du plan. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 440. Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si c'est le cas précisez l'égalité les reliant.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$.

e) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

f) $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \end{pmatrix}$.

g) $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 441. Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 442. Dans chacun des cas suivants dites si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

a) $A(1; -3)$, $B(-4; 8)$ et $C(-6; 2)$.

b) $A(5; 5)$, $B(0; -1)$ et $C(10; 11)$.

c) $A(9; 1)$, $B(6; -1)$ et $C(3; -3)$.

d) $A(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$, $B(\frac{1}{4}; -\frac{2}{3})$ et $C(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{3})$.

e) $A(-\frac{1}{5}; 1)$, $B(2; -\frac{1}{6})$ et $C(\frac{10}{5}; 1)$.

EXERCICE 443. Donnez deux vecteurs colinéaires à $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 444. Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$. Calculez le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

EXERCICE 445. Déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 7/4 \\ 2/7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$.

e) $\vec{u} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}$.

f) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 446. Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si c'est le cas précisez l'égalité les reliant.

- a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$. b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$. c) $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$.
d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$. e) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. f) $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{9}{5} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \end{pmatrix}$.
g) $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 447. Déterminez un réel μ de sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

- a) $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \mu \\ 2 \end{pmatrix}$. b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ \mu \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 448. Déterminez tous les nombres x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

- a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ 10 \end{pmatrix}$. b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1+x \\ 2x \end{pmatrix}$.

EXERCICE 449. Soient $A(-10; 7)$, $B(-20; 10)$, $C(5; -2)$ et $D(10; -8)$ des points du plan. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 450. Soient les points $C(0; 4)$, $D(2; 7)$, $E(8; 17)$ et $F(16; 29)$.

- Montrez que $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
- $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 451. On considère des points $F(6; 4)$ et G d'abscisse 8 des points. Sachant que $\overrightarrow{FG}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ déterminez l'ordonnée de G .

La définition moderne d'une droite.

Définition 54. Soient A et B deux points distincts du plan. Nous noterons (AB) , et nous appellerons *droite passant par A et B* , l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ou n'importe quel vecteur qui lui soit colinéaire et non nul est appelé *un vecteur directeur de la droite*.
- L'ensemble formé de tous les vecteurs colinéaires à l'un des vecteurs directeurs de la droite est appelé *la direction de la droite*. La direction est formée de tous les vecteurs directeurs de la droite et du vecteur nul. Cet ensemble est appelé un espace vectoriel.
- Une autre formulation : (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$; on parle de *représentation paramétrique vectorielle* de la droite. Si t décrit $\mathbb{R}_+$ on obtient $[AB)$. Si t décrit $\mathbb{R}_-$ on obtient $(AB]$. Si t décrit $[0; 1]$ on obtient $[AB]$. On parle de représentations paramétrique (t étant le paramètre).
- Cette définition décrit un lieu géométrique. De la même façon on peut définir un cercle comme l'ensemble des points équidistants d'un point (le centre du cercle).
- Ainsi, si $M \in (AB)$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. Autrement dit t est l'abscisse de M dans le repère (A, B) . Dans ce repère l'abscisse de A est 0 et celle de B est 1.
- Pour définir une droite il faut et il suffit que nous en connaissions un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. Nous avons besoin de deux points et nous avons à nouveau besoin de deux informations.

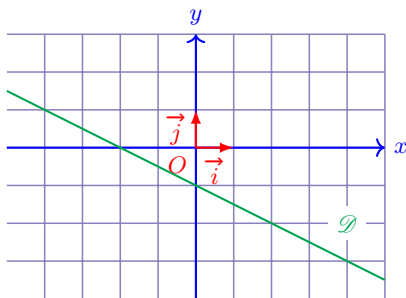
7. Cette définition de la droite ne dépend pas d'un repère choisi et est donc très générale.
8. Interprétation de la définition en terme de translation : la droite (AB) est l'ensemble des points M images de A par les translations de vecteur $t\overrightarrow{AM}$ où t prend toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{R}$.
9. Si une droite passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ alors l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ est aussi un point de la droite.

Tracer une droite connaissant un point et un vecteur directeur.

EXERCICE 452. Après avoir choisi un repère du plan dessinez la droite passant par $A(2,1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Décrire une droite par un point et un vecteur directeur.

EXERCICE 453. Sans justification donnez les coordonnées de 3 vecteurs directeurs de la droite $\mathcal{D}$ représentée ci-dessous dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



EXERCICE 454. Dans chacun des cas suivants, indiquez si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

- | | |
|---|--|
| a) $A(-14; 2), B(5; -3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. | b) $A(-7; 3), B(5; 1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$. |
| c) $A(5; 2), B(0; -3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. | d) $A(4; -2), B(3; -4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \end{pmatrix}$. |

EXERCICE 455. Dans chacun des cas suivants, calculez les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB) .

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| a) $A(2; 3)$ et $B(-1; 2)$. | b) $A(-5; 4)$ et $B(3; 1)$. | c) $A(3; 0)$ et $B(0; 3)$. |
| d) $A(7; 8)$ et $B(7; 9)$. | | |

Parallélisme.

Maintenant que nous avons une définition de la droite nous allons reformuler les propriétés des droites avec cette définition.

Définition 55. Nous dirons que deux droites sont *parallèles* si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Remarques.

1. Ainsi tout vecteur directeur de l'une des droites est un vecteur directeur de l'autre. Autrement dit deux droites parallèles ont la même direction.
2. La négation de cette proposition est aussi intéressante : (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
3. Nous utiliserons ce résultat pour étudier la position relative de droites du plan (coplanaires), i.e. pour dire si elles sont parallèles (éventuellement confondues voir corollaire ci-après) ou sécantes.

Remarques.

1. Lorsque les vecteurs sont des vecteurs du plan nous obtenons une équivalence entre colinéarité et parallélisme. Autrement dit les problèmes de parallélisme vont maintenant pouvoir être traité grâce aux vecteurs. Peu à peu nous voyons que les vecteurs peuvent remplacer les outils de géométrie que nous avons l'habitude d'utiliser en géométrie euclidienne classique (théorème de Thalès, angles alternes-internes, etc).

EXERCICE 456. Soient $A(-4; -3)$, $B(8; 1)$, $C(4; 4)$ et $D(-2; 2)$ des points du plan.

Étudiez la position relative de (AB) et (CD) .

EXERCICE 457. Déterminez la position relative des droites (AB) et (MN) .

- a) $A(1; 2)$, $B(5; 8)$, $M(0; -1)$ et $N(5; 6)$.
- b) $A(3; -10)$, $B(15; 5)$, $M(1; 1)$ et $N(17; 21)$.

EXERCICE 458. On considère une droite d passant par le point $A(3; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Soient $B(7; -5)$, $C(-4; 6)$ et $D(3; -4)$.

1. Tracez la droite d puis placez B , C et D .
2. Le point B appartient-il à d ?
3. Les droites d et (CD) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 459. Dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan on considère les points $A(2, -2)$, $B(0; 4)$, $C(-3; 5)$ et $P(a; b)$.

1. Déterminez les coordonnées du point I milieu de $[AC]$.
2. Déterminez les coordonnées du point P vérifiant $\overrightarrow{OP} = -2\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$.
3. Démontrez que les droites (OP) et (IB) sont parallèles.

EXERCICE 460. Dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan on considère les points $A(1, -1)$, $B(-2; 0)$ et $C(-3; 3)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Soit D le symétrique de B par rapport à A . Déterminez les coordonnées de D .
3. Soit le point $E(-4; 6)$. Démontrez que B , C et E sont alignés et que C est le milieu de $[BE]$.
4. Démontrez que (AC) et (ED) sont parallèles.

EXERCICE 461.

Alignement de trois points.

Proposition 62. Soient A , B et C des points du plan. A , B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemples.

1. Montrons que $A(-1; 2)$, $B(2; 4)$ et $C(8; 8)$ sont alignés.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 4 - 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$. $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

A, B et C sont alignés.

EXERCICE 462. Soient $A(-2; 3)$, $B(2; 1)$ et $C(4; 0)$ dans un repère du plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Démontrez que A, B et C sont alignés.

EXERCICE 463. Déterminez si les points A, B et C sont alignés.

- a) $A(2; 13)$, $B(-2; -7)$ et $C(11; 58)$. b) $A(9; 20)$, $B(2; -1)$ et $C(25; 71)$.

Il est possible de reformuler le précédent résultat : dire que trois points sont alignés, c'est dire que l'un d'entre eux appartient à la droite passant par les deux autres.

Proposition 63. Soient A, B et M des points du plan. M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Remarques.

1. Ce résultat qui peut sembler anodin sera utiliser pour définir les droites du plan dans une prochaine leçon.

EXERCICE 464. Déterminez si le point M appartient à la droite (EF).

- a) $E(5; -3)$, $F(-3; 3)$ et $M(15; -9)$. b) $E(0; -7)$, $F(1; 0)$, $M(2; 7)$.

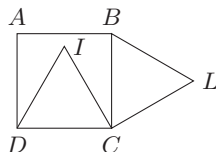
EXERCICE 465. Soit ABC un triangle. I est le milieu de [AC]. On considère les points D et E images respectives des points B et I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Que peut-on dire des points C, D et E ?

EXERCICE 466. Dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan on considère les points $A(-\frac{7}{2}; 2)$, $B(-2; 5)$, $C(5; \frac{13}{2})$ et $D(3; \frac{5}{2})$.

- (a) Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
(b) Déduisez-en que le quadrilatère ABCD est un trapèze.
- On définit le point I par l'égalité : $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$.
(a) Démontrez que les coordonnées de I sont $(-23; \frac{1}{2})$.
(b) Les points I, B et C sont-ils alignés ?
- (a) J et K étant les milieux respectifs de [AB] et [CD], déterminez les coordonnées de J et K.
(b) Démontrez alors que les points I, J et K sont alignés.

EXERCICE 467.

Soient ABCD un carré, BCL et DIC des triangles équilatéraux tels que sur la figure ci-contre. Nous souhaitons établir l'alignement des points A, I et L. Pour cela considérons le repère orthonormé $(D; \vec{C}; \vec{A})$.



- Donnez sans justification les coordonnées de D, C, A et B.
- Déterminez les coordonnées de I et L.
- Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.
- Démontrez l'alignement des points A, I et L.

EXERCICE 468. Soient $A(4;0)$, $B(0;7)$ et $C(-6;-5)$ des points.

1. Calculez les coordonnées du milieu P de $[AB]$.
2. Calculez les coordonnées des points S et T définis par $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $5\overrightarrow{CT} = 4\overrightarrow{CA}$.
3. Le point P est-il sur la droite (ST) ?

EXERCICE 469. Soient $M(7;3)$, $N(-3;1)$, $C(0;5)$, $D(5;6)$ et $E(3;9)$ des points du plan.

1. Montrez que le quadrilatère $MNCD$ est un trapèze.
2. Montrez que E est le point d'intersection de (NC) et (MD) .
3. Soient J et K les milieux respectivement de $[NM]$ et $[CD]$. Calculez les coordonnées de J et K .
4. Montrez que E , J et K sont alignés.

EXERCICE 470. On considère les points $E(5;-1)$, $F(-1;4)$, $G(7;2)$ et $M(1;y)$ où y est un nombre réel.

- a) Pour quelle valeur de y le point M appartient-il à (FG) ?
- b) Pour quelles valeurs de y les droites (EF) et (GM) sont-elles parallèles ?

Perpendicularité et vecteurs directeurs. Produit scalaire.

La perpendicularité de deux droites nécessite d'introduire une nouvelle opération entre les vecteurs que vous verrez l'année prochaine appelée le **produit scalaire**. Donc patience. Pour les impatientes, en exclusivité quasi mondiale voici la définition de cette nouvelle opération.

Définition 56. Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle **produit scalaire**

l'opération qui aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ associe le nombre : $\vec{u} \cdot \vec{v} := x_u x_v + y_u y_v$.

Exemples.

1. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 2 \times 4$.

Proposition 64. $(AB) \perp (CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Remarques.

1. Nous avons donc une traduction vectorielle de la perpendicularité.
2. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**.

Exemples.

1. Montrons que $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 7 + (-7) \times 3 = 0.$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2. $A(2;6)$, $B(-5;4)$, $M(-10;0)$ et $N(-6;-7)$.

Montrons que (AB) et (MN) sont perpendiculaires.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 - 2 \\ 4 - 6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}. \text{ De même : } \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = -7 \times 4 + (-4) \times (-7) = 0.$$

$(AB) \parallel (MN)$.

EXERCICE 471. Déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

- a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 15 \\ -12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- d) $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 472. Dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(-2; 1)$, $B(1, -5)$, $C(4; 4)$ et $D(\frac{17}{2}, -5)$.

- Démontrez que le triangle ABC est rectangle en A .
- Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
- Soient I et J des points du plan tels que $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ et $\vec{JD} = \frac{2}{3}\vec{BD}$. Calculez les coordonnées de I et J .
- Démontrez que les droites (AB) , (IJ) et (CD) sont parallèles.

EXERCICE 473. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(2; 2)$, $B(-2, -1)$ et $C(-5; 3)$.

- Déterminez les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.
- Démontrez que ABC est rectangle.
- Calculez AB , AC et BC . Que pouvez-vous en déduire quant à la nature du triangle ABC ?
- Soit le point $F(a, 1)$. Déterminez a tel que A , B et F soient alignés.
- Trouvez les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
- Déterminez les coordonnées du point E appartenant à l'axe des abscisses et tel que A , B et E soient alignés.
- Déterminez les coordonnées du point K tel que $\vec{CK} = 2\vec{KB} + \vec{AB}$.

Barycentres.

Exercices.

EXERCICE 474. Soient $A(3; 4)$, $B(1; 1)$, $C(6; -2)$ et $D(8; 1)$ des points, I le milieu de $[BC]$, et E et F les points définis par : $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ et $\vec{CF} = \frac{1}{3}\vec{CA}$.

- Calculez les coordonnées de I , E et F .
- (a) Les vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{IF}$ sont-ils colinéaires?
(b) Qu'en déduisez-vous concernant les droites (BE) et (IF) ?
- Montrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
- (a) Calculez la norme du vecteur $\vec{AC}$.
(b) $ABCD$ est-il un rectangle?
- Les points I , F et D sont-ils alignés?

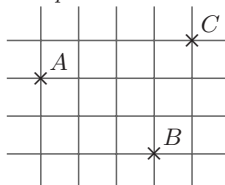
EXERCICE 475. Soit $ABCD$ un trapèze tel que $\vec{CD} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$. Les points I et J sont les milieux de $[AC]$ et de $[BD]$. On se propose de montrer que $(AB) \parallel (IJ)$.

- Complétez : $\vec{IJ} = \dots + \vec{AB} + \dots$ et $\vec{IJ} = \dots + \vec{CD} + \dots$.
- Déduisez-en : $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{CD})$.
- Trouvez k tel que $\vec{IJ} = k\vec{AB}$ et concluez.

EXERCICE 476. Démontrer la conservation de l'alignement par translation. Soient A , B et C trois points alignés. On note A' , B' et C' les images respectives de A , B et C par la translation d'un vecteur $\vec{u}$ non nul. Démontrez que A' , B' et C' sont alignés.

EXERCICE 477. Homothéties et vecteurs.

1. *Cas particulier.* Soient trois points A , B et C tels que ci-dessous.



On considère les homothéties h_1 et h_2 de centre A et de rapports respectifs $k_1 = 2$ et $k_2 = -3$.

- Reproduisez les points en respectant le quadrillage.
 - Construisez les images B_1 et C_1 respectivement des points B et C par l'homothétie h_1 .
 - Exprimez sans justification $\overrightarrow{AB_1}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
 - Exprimez sans justification $\overrightarrow{AC_1}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
 - Reprenez les questions précédentes pour l'homothétie h_2 .
 - Pour M un point quelconque on note M_1 et M_2 les images de M respectivement par h_1 et h_2 . Exprimez sans justification $\overrightarrow{AM_1}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$ puis $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$.
2. *Cas général.* Soit h une homothétie de centre A et rapport $k \neq 0$. Pour tout point M du plan on note M' l'image de M par h . Exprimez $\overrightarrow{AM'}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$.

EXERCICE 478. On considère les points $A(1;1)$, $B(1;4)$, $C(-5;1)$ et $D(-3;-1)$. On note E et F les points tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

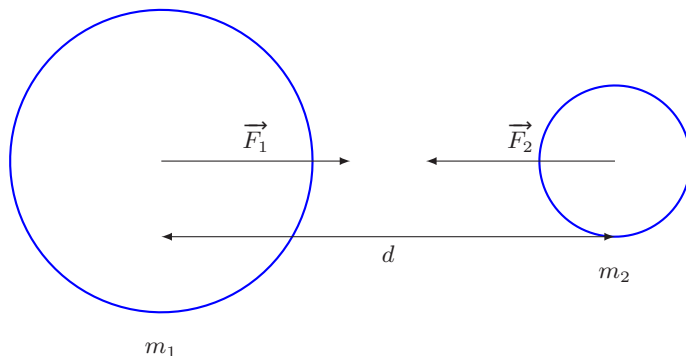
- Construisez la figure.
- Calculez les coordonnées de E et F en vérifiant sur la figure.
- Démontrez que $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ puis déduisez-en la transformation géométrique qui transforme C en E .
- Montrez que (AF) et (EC) sont parallèles.
- Montrez que $ABCF$ est un parallélogramme.

EXERCICE 479. Soient, dans un repère du plan, $A(1;2)$, $B(5;2)$ et $C(5;10)$, D l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport 4, et E l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$.

- Exprimez $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
- Calculez les coordonnées des points D et E .
- Montrez que $(EB) \parallel (CD)$.

EXERCICE 480. En physique les forces sont modélisées par des vecteurs. L'intensité d'une force, exprimée en newton, est la norme du vecteur force.

- On sait par l'expérience (loi universelle de la gravitation), que deux objets, éloignés d'une distance d , exprimée en mètre, de masses m_1 et m_2 , exprimées en kg, exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction de même intensité donnée par la formule $F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$ où G est la constante de gravitation universelle égale à environ $6,6742 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Ces deux forces sont représentées par des vecteurs, notés $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, de même direction mais de sens contraires.



Que pouvez-vous dire des deux vecteurs $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$?

- On sait que la distance entre le centre de la Terre et le centre de la Lune est d'environ $3,84 \times 10^8$ m. Calculez l'intensité des forces d'attraction F entre la Terre dont la masse est $5,97 \times 10^{24}$ kg et la Lune dont la masse est $7,35 \times 10^{22}$ kg.
- Le Soleil à une masse estimée à $1,99 \times 10^{30}$ kg et il est situé à environ $1,5 \times 10^{11}$ m de la Terre. Montrez que la force d'attraction du Soleil sur la Terre est environ 178 fois plus forte que celle exercée par la Lune sur la Terre.

EXERCICE 481. On considère un point $A(4;3)$. Tracez quatre droites d_1 à d_4 passant par A et admettant respectivement pour vecteurs directeurs $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 482. On donne trois points distincts A , B et C tels que $2\vec{AB} + 3\vec{AC} = \vec{0}$. Déterminez les abscisses de C dans les repères $(A, \vec{AB})$ et $(B, \vec{BA})$.

EXERCICE 483. Construisez, sur une droite $\mathcal{D}$ de repère $(O, \vec{u})$, les points R et S d'abscisses respectives $\frac{3}{2}$ et -2 . Calculez l'abscisse du milieu I de $[RS]$ et celle du barycentre G des points pondérés $(R, -3)$ et $(S, 5)$.

EXERCICE 484. Dans le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(-1, -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 2)$. Placer les points B , C , D et E de paramètres respectifs 1 , $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ et 3 dans le repère $(A, \vec{u})$ de $\mathcal{D}$ et calculez les coordonnées de ces points.

EXERCICE 485. Soit M le point du segment $[AB]$ de paramètre $\frac{1}{3}$ dans le repère $(A, \vec{AB})$. Démontrez qu'il existe deux réels α et β tels que :

- $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.
- M est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) .

EXERCICE 486. Soit A et B deux points distincts. Démontrez que le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, 4)$ est un point du segment $[AB]$. En est-il de même du barycentre des points pondérés $(A, -2)$ et $(B, 5)$?

EXERCICE 487. On considère un triangle ABC .

- Quel est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = t\vec{BC}$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$?
- Quel est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = t\vec{AB} + t\vec{AC}$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$?
- Quel est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = t\vec{AB} + \vec{AC}$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$? (Introduisez le point D tel que $\vec{AB} = \vec{CD}$ et choisissez C comme origine.)

EXERCICE 488. Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Quel est l'ensemble des points M tels que $\vec{OM} = 2\vec{i} - \vec{j} + t(\vec{i} - \vec{j})$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$?

EXERCICE 489. Soit ABC un triangle non aplati. On définit D et E tels que $2\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, ainsi que I , milieu de $[DE]$. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Donnez les coordonnées des points A , B et C .
2. Calculez les coordonnées des points E et D et en déduire les coordonnées du point I .
3. Démontrez que (BC) et (ED) sont parallèles.
4. Déterminez les coordonnées du point G vérifiant $6\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
5. Démontrez que $GBIC$ est un parallélogramme.

EXERCICE 490. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3; 1)$, $B(1, -1)$, $C(3; 3)$ et I milieu de $[AC]$.

1. Donnez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Soit $E(a, 2)$. Déterminez a tel que A , B et E soient alignés.
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?
4. (a) Déterminez les coordonnées du point D image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
(b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
5. Déterminez les coordonnées du point J , symétrique de A par rapport à B .
6. Déterminez les coordonnées du point F appartenant à l'axe des abscisses tel que A , B et F soient alignés.
7. Déterminez les coordonnées du point G appartenant à l'axe des ordonnées tel que les droites (BG) et (AI) soient parallèles.

EXERCICE 491. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-1; 3)$, $B(3; 1)$, $C(1; 7)$ et I le milieu de $[BC]$.

1. Quelles sont les coordonnées du point I ? Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Déterminez les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Quelle est la nature du parallélogramme $ABDC$?
4. Déterminez les coordonnées du point E appartenant à l'axe des abscisses et tel que A , B et E soient alignés.
5. Déterminez les coordonnées du point F appartenant à l'axe des ordonnées et tel que (CF) et (IA) soient parallèles.
6. Déterminez les coordonnées du point K tel que : $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KB}$.
7. Quelles sont les coordonnées du point J , symétrique de A par rapport à B .

EXERCICE 492. Dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(2; 0)$, $B(-1; 1)$ et $C(-2; 4)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Déterminez les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déduisez-en la nature du parallélogramme $ABCD$.
4. Soit $E(6, -4)$. Démontrez que les points A , C et E sont alignés, puis que A est le milieu de $[CE]$.
5. Déterminez les coordonnées de F , symétrique de C par rapport à B .
6. Démontrez que (AB) et (FE) sont parallèles.
7. Déterminez les coordonnées du point G appartenant à l'axe des abscisses et tel que B , C et G soient alignés.

EXERCICE 493. Le plan étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-2; 5)$, $B(2, -1)$, $C(5; 1)$, $D(-\frac{15}{4}, -\frac{1}{2})$ et I le milieu de $[AC]$.

1. Placez les points A, B, C, D et I dans un repère orthonormé.
2. Quelles sont les coordonnées du point I ?
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?
4. Trouvez les coordonnées du point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme. Quelle est la nature du parallélogramme $ABCE$?
5. Démontrez que les droites (ID) et (BC) sont parallèles.
6. Déterminez les coordonnées du point F appartenant à l'axe des ordonnées et tel que A, B et F soient alignés.
7. Déterminez les coordonnées du point G tel que : $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{GB}$.
8. Déterminez les coordonnées du point H appartenant à l'axe des abscisses et tel que les droites (CH) et (AB) soient parallèles.
9. Quelles sont les coordonnées du point J , symétrique de C par rapport à A ?

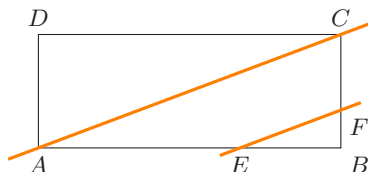
EXERCICE 494. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $A(-1; 3)$, $B(-3; 1)$ et $C(-1; 1)$.

1. Déterminez les coordonnées du point K tel que : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminez les coordonnées du point J tel que : $\overrightarrow{CJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
3. Déterminez les coordonnées du point L tel que : $\overrightarrow{AL} + 2\overrightarrow{CL} = \vec{0}$.
4. Démontrez que $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$.
5. Déterminez les coordonnées du point N tel que : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL}$.
6. Démontrez que les points C, N et B sont alignés.

EXERCICE 495. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A\left(\frac{3}{4}; 1\right)$, $B(-2; 3)$, $C\left(-\frac{7}{4}; 4\right)$ et $D(1; 2)$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Déterminez les coordonnées des points E et F tels que $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.
3. Déterminez les coordonnées des points G et H tels que $BAEG$ et $BAFH$ soient des parallélogrammes.
4. Démontrez que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DE}$.
5. Déduisez-en que C, G et H sont alignés.

EXERCICE 496. Soient $ABCD$ un rectangle. Le point E appartient au segment $[AB]$ tel que $AE = \frac{2}{3}AB$ et le point F appartient au segment $[BC]$ tel que $BF = \frac{1}{3}BC$.



1. *Méthode 1 : solution analytique.*
 - (a) Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D, E et F ?
 - (b) Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires. Que pouvez-vous en déduire ?
2. *Méthode 2 : solution vectorielle.* Démontrez que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Que pouvez-vous en déduire ?

3. *Méthode 3 : solution utilisant les configurations.* En utilisant la réciproque du théorème de Thalès démontrez que les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

EXERCICE 497. On considère quatre points A, B, C et D distincts, vérifiant $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$. En remarquant que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$, démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Que pouvez-vous en déduire pour (AB) et (CD) ?

EXERCICE 498. Soient ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CB]$, D le symétrique du point B par rapport à A , E le point d'intersection des droites (JD) et (IC) , F le point d'intersection des droites (AC) et (JD) .

- Démontrez l'existence d'un réel k tel que : $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CI}$.
- Démontrez l'existence d'un réel λ tel que : $\overrightarrow{CF} = \lambda\overrightarrow{CA}$.
- En se plaçant dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, déterminez les coordonnées des points A, B, C, D, I et J .
- Déterminez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CI}$.
- En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ en fonction de k , puis les coordonnées du point E en fonction de k .
- En utilisant le fait que les points J, E et D sont alignés, trouvez une équation satisfaite par k et déduisez-en la valeur de k .
- Déterminez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CA}$.
- Déduisez-en l'expression du vecteur $\overrightarrow{CF}$ en fonction de λ , puis les coordonnées du point F en fonction de λ .
- En utilisant le fait que J, F et D sont alignés, déterminez la valeur de λ .

EXERCICE 499. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(8; 3)$, $(3; 5)$ et $(3; 2)$. Déterminer y , ordonnée du point D de coordonnées $(-3; y)$ tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

Corrections.

Exercice 438.

- a) Clairement en considérant les coordonnées des vecteurs nous remarquons une proportionnalité : $\vec{v} = -2\vec{u}$. Et donc

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- b) Montrons que $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}
 \det(\vec{u}; \vec{v}) &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} \\
 &= (\sqrt{2}-1) \times (\sqrt{2}+1) - 1 \times 1 \\
 &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 1 + (-1) \times \sqrt{2} + (-1) \times 1 - 1 \\
 &= \sqrt{2}^2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 \\
 &= 2 - 2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 439. Démontrons que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

$$\text{Les coordonnées de } \overrightarrow{AC} \text{ sont } \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - (-10) \\ -2 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même les coordonnées de } \overrightarrow{DB} \text{ sont } \begin{pmatrix} -30 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Clairement } \overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{AC}.$$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Exercice 440.

a) $-2\vec{u} = \vec{v}$.

b) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.

c) $-3\vec{u} = \vec{v}$.

d) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.

e) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.

f) $\frac{5}{9} \times (-15) - \left(-\frac{5}{6}\right) \times 11 \neq 0$ donc ils ne sont pas colinéaires.

g) $-(\sqrt{5} + 1)\vec{u} = \vec{v}$.

Exercice 441.

- a) Clairement en considérant les coordonnées des vecteurs nous remarquons une proportionnalité : $\vec{v} = -2\vec{u}$. Et donc

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- b) Montrons que $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}; \vec{v}) &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} - 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\sqrt{2} - 1) \times (\sqrt{2} + 1) - 1 \times 1 \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 1 + (-1) \times \sqrt{2} + (-1) \times 1 - 1 \\ &= \sqrt{2}^2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 \\ &= 2 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- c) Déterminons si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}; \vec{v}) &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 2 - 4 \times (-1) \\ &= 11 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

- d) Déterminons l'ensemble des x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \times 3 - 2 \times x = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x + 3 - 3 = 0 - 3 \\ &\Leftrightarrow -2x = -3 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-3}{-2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x = \frac{3}{2}$.

Exercice 442.

- a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -5 \times 5 - (-7) \times 11 \neq 0$ donc ils ne sont pas colinéaires.
b) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ donc ils sont colinéaires.
c) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
d) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
e) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 11/5 \\ -7/6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 11/5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$ les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice 443. $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Exercice 444. $\det(\vec{u}; \vec{v}) = -101 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 445.

- a) $\vec{u} = 1 \cdot \vec{v}$ donc colinéaires. b) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -135$ donc non colinéaires.
c) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{48}{8}$ donc non colinéaires. d) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ donc colinéaires.
e) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ donc colinéaires. f) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ donc colinéaires.

Exercice 446.

- a) $-2\vec{u} = \vec{v}$. b) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$. c) $-3\vec{u} = \vec{v}$.
d) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$. e) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$. f) Non colinéaires.
g) $\frac{-4}{\sqrt{5}-1}\vec{u} = \vec{v}$.

Exercice 447.

- a) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow -3 \times 2 - 5 \times \mu = 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} = \mu$.
b) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow 5 \times \frac{1}{3} - \mu \times 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \mu$.

Exercice 448.

- a) Le résultat est immédiat en remarquant que $y_v = 2xy_u$ donc nécessairement $x_v = 2x_u = 2 \times 1 = 2$.

Déterminons x .

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 5 & 10 \end{vmatrix} &= 0 \\ 1 \times 10 - 5 \times x &= 0 \\ 10 - 5x &= 0 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons une équation linéaire du premier degré que nous allons résoudre en travaillant par équivalences successives.

$$\begin{aligned} 10 - 5x - 10 &= 0 - 10 \\ -5x &= -10 \\ \frac{-5x}{-5} &= \frac{-10}{-5} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x = 2$.

- b) De même

$$\begin{aligned} 2 \times (2x) - 3 \times (1 + x) &= 0 \\ 4x - 3 - 3x &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Exercice 449. Démontrons que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - (-10) \\ -2 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$.

De même $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} -30 \\ 18 \end{pmatrix}$.

Clairement $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{AC}$.

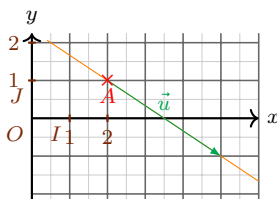
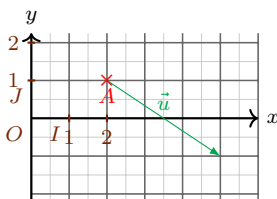
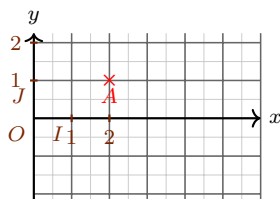
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Exercice 450.

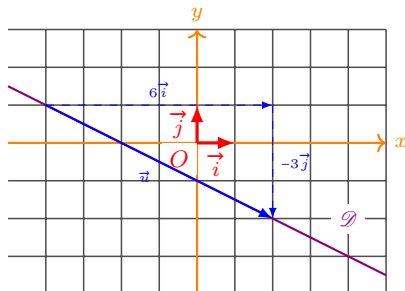
- $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$. $4\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ donc ils sont colinéaires.
- $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$. $\det(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}) = 2 \times 13 - 3 \times 8 = 2 \neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice 451. $\lambda \overrightarrow{FG} = \vec{u}$. Donc $\begin{cases} \lambda 2 = 5 \\ \lambda(y_G - 4) = -3 \end{cases}$. D'où $\lambda = \frac{5}{2}$ puis $y_G = -3 \times \frac{2}{5} + 4 = \frac{14}{5}$.

Exercice 452.



Exercice 453. Il suffit de trouver les coordonnées d'un vecteur « porté » par la droite. Pour avoir davantage de vecteurs directeurs on peut lire d'autres coordonnées ou prendre les coordonnées du précédent vecteur multiplié par n'importe quel nombre non nul.



Les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 454.

- Trivial : la réponse est non. Un vecteur nul ne peut être un vecteur directeur.
- Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) &= \begin{vmatrix} 5 - (-7) & -6 \\ 1 - 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 12 \times 1 - (-6) \times (-2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc :

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB) .

- Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) &= \begin{vmatrix} 0 - 5 & 2 \\ -3 - 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-5) \times (-2) - (-5) \times 2 \\ &= 20 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc :

$\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB) .

- d) Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) &= \begin{vmatrix} 3-4 & 4,5 \\ -4-(-2) & 9 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times 9 - (-2) \times 4,5 \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc :

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB) .

Exercice 455.

- a) Puisque A et B sont distincts $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) . $2\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AB}$ sont donc deux autres vecteurs directeurs de (AB) .
 $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB) .
 b) $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 16 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 24 \\ -9 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB) .
 c)
 d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB) .

Exercice 456. Étudier la position relative de deux droites du plan consiste à dire si elle sont parallèles ou sécantes (*i.e.* un unique point d'intersection). Nous peaufinerons la réponse apportée à cette question dans la leçon sur les droites mais pour l'instant la réponse à cette question est soit « les droites sont parallèles » soit « les droites sont sécantes ».

Déterminons la position relative de (AB) et (CD) .

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 - (-4) \\ 1 - (-3) \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Clairement } -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

Autrement dit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Ce qui équivaut encore à dire

(AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 457.

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) \neq 0$. Donc : $(AB) \not\parallel (MN)$.
2. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}$. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = 0$. Donc : $(AB) \parallel (MN)$.

Exercice 458.

- 1.
2. Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) &= \begin{vmatrix} 7-3 & -2 \\ -5-1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times 3 - (-6) \times (-2) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc B appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$$B \in d.$$

3. Déterminons si $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{CD}; \vec{u}) &= \begin{vmatrix} 3 - (-4) & -2 \\ -4 - 6 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 7 \times 3 - (-10) \times (-2) \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc :

d et (CD) ne sont pas parallèles.

Exercice 459.

- $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
- Déterminez les coordonnées du point P vérifiant $\begin{cases} x_P = -2 \times 2 + 4 \times 0 - 2 \times (-3) \\ y_P = -2 \times (-2) + 4 \times 4 - 2 \times 5 \end{cases}$. $P(2; 10)$.
- $\overrightarrow{OP}\left(\frac{2}{10}\right)$ et $\overrightarrow{IB}\left(\frac{1}{5/2}\right)$. $4\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OP}$ donc $(IB) \parallel (OP)$.

Exercice 460.

- $AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{10}$, $CA = 4\sqrt{2}$ donc ABC isocèle en B mais pas équilatéral. S'il est rectangle c'est donc nécessairement en B . Or $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$ donc il n'est pas rectangle.
- D symétrique de B par rapport à A ssi A milieu de $[BD]$ ssi $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{DA}\left(\frac{1-x_D}{-1-y_D}\right)$ et $\overrightarrow{AB}\left(\frac{-3}{1}\right)$ donc $1-x_D = -3$ et $-1-y_D = 1$. $D(4; -2)$.
- $\overrightarrow{BC}\left(\frac{-1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{CE}\left(\frac{-1}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$ et donc C est milieu de $[BE]$. On en déduit l'alignement souhaité.
- $\overrightarrow{AC}\left(\frac{-4}{4}\right)$ et $\overrightarrow{ED}\left(\frac{8}{-8}\right)$ donc $-2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED}$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires et (AC) et (ED) sont parallèles.

Exercice 461.

Exercice 462. $\overrightarrow{AB}\left(\frac{4}{-2}\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(\frac{6}{-3}\right)$. $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ donc A , B et C sont alignés.

Exercice 463.

- $\overrightarrow{AB}\left(\frac{-4}{-20}\right)$ et $\overrightarrow{BC}\left(\frac{13}{65}\right)$. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -4 \times 65 - (-20) \times 13 = 0$ donc ils sont colinéaires et donc les points sont alignés.
- $\overrightarrow{AC}\left(\frac{16}{51}\right)$ et $\overrightarrow{CB}\left(\frac{-23}{-72}\right)$. $\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 16 \times (-72) - 51 \times (-23) = 21 \neq 0$ les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points ne sont donc pas alignés.

Exercice 464.

- $\overrightarrow{AB}\left(\frac{-4}{-20}\right)$ et $\overrightarrow{BC}\left(\frac{13}{65}\right)$.

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} - 4 & 13 \\ -20 & 65 \end{vmatrix} \\ &= -4 \times 65 - 13 \times (-20) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc :

A, B et C sont alignés.

Exercice 465. Une démonstration plus classique avec le théorème de Thalès pourrait être plus brève.

$$t_{\overrightarrow{AB}}(B) = D \text{ donc } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}.$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}.$$

$$t_{\overrightarrow{AB}}(I) = E \text{ donc } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IE}$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} \text{ car } I \text{ est le milieu de } [AC].$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC} \text{ donc } E \text{ est le milieu de } [DC].$$

Exercice 466.

$$1. \quad (a) \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(b) $-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc $(AB) \parallel (CD)$ et donc $ABCD$ est un trapèze (on pourrait détailler la justification du fait qu'il est non croisé).

$$2. \quad (a) \quad \overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_I = \frac{3}{4}(x_D - x_I) \\ y_A - y_I = \frac{3}{4}(y_D - y_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} - x_I = \frac{3}{4}(3 - x_I) \\ 2 - y_I = \frac{3}{4}(\frac{5}{2} - y_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -23 \\ y_I = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$(b) \quad \overrightarrow{IB} \begin{pmatrix} 21 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IC} \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \end{pmatrix}. \det(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = \begin{vmatrix} 21 & 28 \\ 9/2 & 6 \end{vmatrix} = 21 \times 6 - 28 \times \frac{9}{2} = 0 \text{ donc les points sont bien alignés.}$$

$$3. \quad (a) \quad J \left(-\frac{11}{4}, \frac{7}{2} \right) \text{ et } K \left(4, \frac{9}{2} \right).$$

$$(b) \quad \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 81/4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 27 \\ 4 \end{pmatrix}. \det(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = \begin{vmatrix} 81/4 & 27 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{81}{4} \times 4 - 3 \times 27 = 0 \text{ donc les points sont bien alignés.}$$

Exercice 467.

$$1. \quad D(0;0), C(1;0), A(0;1) \text{ et } B(1;1).$$

$$2. \quad I \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ et } L \left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$3. \quad \overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AL} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad \det(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AL}) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1 + \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 - 1 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 1^2 = 0$$

donc les points sont alignés.

Exercice 468.

$$1. \quad P \left(2; \frac{7}{2} \right).$$

$$2. \quad \overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_S - 0 = \frac{1}{3}(0 - (-6)) \\ y_S - 7 = \frac{1}{3}(7 - (-5)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_S = 2 \\ y_S = 11 \end{cases}$$

$$5\overrightarrow{CT} = 4\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x_T - (-6)) = 4(-6 - 4) \\ 5(y_T - (-5)) = 4(0 - (-5)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T = 14 \\ y_T = -1 \end{cases}.$$

$$3. \quad \overrightarrow{PS} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{ST} \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points ne sont pas alignés. } P \notin (ST).$$

Exercice 469.

$$1. \quad \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}. -\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD} \text{ donc } MNCD \text{ est un trapèze non croisé dont les bases sont } [MN] \text{ et } [CD].$$

$$2. \quad \overrightarrow{ME} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MD} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ donc } \frac{1}{2}\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MD} \text{ et donc } E \in (MD). \overrightarrow{NE} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NC} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ donc } \frac{1}{2}\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{NC} \text{ et donc } E \in (NC). (NC) \cap (MD) = \{E\}.$$

$$3. \quad J(2;2) \text{ et } K \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2} \right).$$

4. $\overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EK} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -7/2 \end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EK}$ et les points sont alignés.

Exercice 470.

- a) $M \in (FG) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FG}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - (-1) & 7 - (-1) \\ y - 4 & 2 - 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \times (-2) - (y - 4) \times 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7}{2}.$
- b) $(EF) \parallel (GM) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GM}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 5 & y - 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6 \times (y - 2) - (-6) \times 5 = 0 \Leftrightarrow y = 7.$

Exercice 471.

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \times 12 + 4 \times 3 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + 1 \times 5 = 11 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.
- c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15 \times (-4) + (-12) \times (-5) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 - 1^2 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 472.

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 6 + (-6) \times 3 = 0$ donc ABC est rectangle en A .
2. $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 9/2 \\ -9 \end{pmatrix}$ donc $\frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et par conséquent $ABDC$ est trapèze dont les bases sont $[AB]$ et $[DC]$. D'après la question précédente ce trapèze est même rectangle.
3. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - (-2) = \frac{1}{3} \times 6 \\ y_I - 1 = \frac{1}{3} \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow I(0; 2). \quad \overrightarrow{JD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17}{2} - x_J = \frac{2}{3} \times \frac{15}{2} \\ -5 - y_J = \frac{2}{3} \times 0 \end{cases} \Leftrightarrow J(\frac{7}{2}, -5).$
4. Nous avons déjà démontré que $(AB) \parallel (CD)$. $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 7/2 \\ -7 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 473.

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donc ABC est rectangle en B .
3. $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$, $AC = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$. ABC est donc isocèle-rectangle en B .
4. Soit le point $F(a, 1)$. A, B et F sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 & a - 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4 \times (-1) - (-3) \times (a - 2) = 0 \Leftrightarrow 4 + 3a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}.$
5. $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -5 - x_D \\ -3 = 3 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow D(-1; 6).$
 $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur donc c'est un carré.
6. A, B et E sont alignés ssi $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = 0$. Or $E(x_E, 0)$ donc : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 & x_E - 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4 \times (-2) - (-3) \times (x_E - 2) = 0 \Leftrightarrow 8 + 3x_E - 6 = 0 \Leftrightarrow x_E = -\frac{2}{3}.$
7. $\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K - (-5) = 2 \times (-2 - x_K) + (-4) \\ y_K - 3 = 2 \times (-1 - y_K) + (-3) \end{cases} \Leftrightarrow K(-\frac{13}{3}, -\frac{2}{3}).$

Exercice 474.

1. * **Déterminons les coordonnées de I .**
 Puisque I est le milieu de $[BC]$: $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1 + 6}{2} = \frac{7}{2}$. De même : $y_I = -\frac{1}{2}$.

$$I\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

* Déterminons les coordonnées de E .

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 - 3 \\ -2 - 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 3 \\ \frac{1}{3} \times (-6) \end{pmatrix} \text{ i.e. } \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même : } \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \text{ nous déduisons donc } \begin{cases} x_E - 3 = 1 \\ y_E - 4 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Ce qui équivaut successivement à : } \begin{cases} x_E - 3 + 3 = 1 + 3 \\ y_E - 4 + 4 = -2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = 2 \end{cases}.$$

$$E(4; 2).$$

* De même qu'au point précédent

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F - 6 = \frac{1}{3}(3 - 6) \\ y_F - (-2) = \frac{1}{3}(4 - (-2)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 5 \\ y_F = 0 \end{cases}.$$

$$F(5; 0).$$

2. (a) Démontrons que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IF} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ donc } \det(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{IF}) = \begin{vmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 3 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{3}{2} = 0.$$

$$\overrightarrow{BE} \text{ et } \overrightarrow{IF} \text{ sont colinéaires.}$$

(b) Nous déduisons de la question précédente que :

$$(BE) \parallel (IF).$$

3. Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

Par conséquent :

$$ABCD \text{ est un parallélogramme.}$$

4. (a) Calculons $\|\overrightarrow{AC}\|$.

La formule pour la distance euclidienne est la même que celle pour la norme du vecteur. Par contre comme le repère n'est pas orthonormé la norme ne correspond pas forcément à une longueur.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AC}\| &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(6 - 3)^2 + (-2 - 4)^2} \\ &= \sqrt{45} \\ &= \sqrt{3^2 \times 5} \\ &= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{5}.$$

- (b) Nous ne pouvons pas répondre à cette question car le repère n'étant a priori pas orthonormé nous ne pouvons pas établir la présence d'angle droit ou d'égalité de longueur (diagonales).

Si nous supposons que le repère est orthonormé alors, comme $\|\overrightarrow{BD}\| = 9$, nous pouvons affirmer que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ ne sont pas de même longueur donc ce n'est pas un rectangle.

5. Démontrons que les points I , F et D sont alignés.

Ils sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{IF} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\det(\overrightarrow{IF}; \overrightarrow{DF}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \times (-1) - \frac{1}{2} \times (-3) = 0$. Donc $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires. Et par conséquent

I , F et D sont alignés.

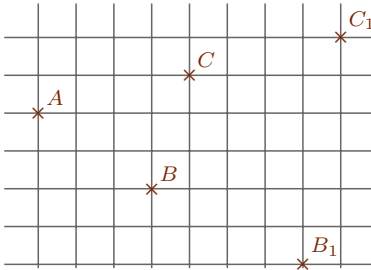
Exercice 475.

1. Complétez : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ}$.
2. $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. Or I et J milieu respectif de $[AC]$ et $[BD]$ donc $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. Enfin : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.
3. $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Conclusion $(IJ) \parallel (AB)$.

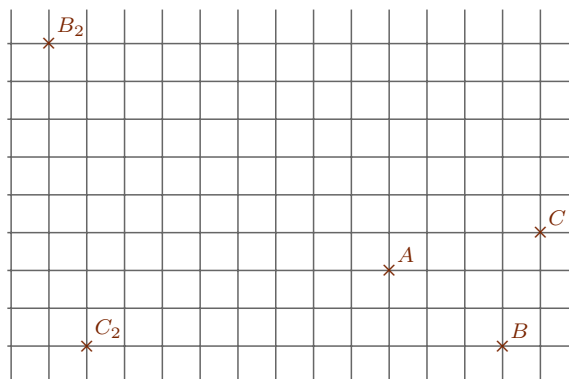
Exercice 476. A , B et C sont alignés donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -\vec{u} + \overrightarrow{AB} + \vec{u} = \overrightarrow{AB}$. De même : $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC}$ et donc $\overrightarrow{B'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$. Les points A' , B' et C' sont alignés.

Exercice 477.

1. (a)
(b)



- (c) $\overrightarrow{AB_1} = 2\overrightarrow{AB}$.
(d) $\overrightarrow{AC_1} = 2\overrightarrow{AC}$.
(e)



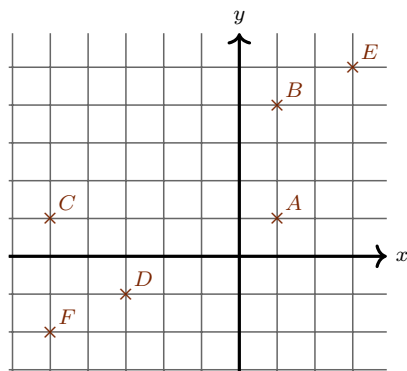
$$\overrightarrow{AB_2} = -3\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AC_1} = -3\overrightarrow{AC}.$$

$$(f) \quad \overrightarrow{AM_1} = 2\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AM_2} = -3\overrightarrow{AM}.$$

$$2. \quad \overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}.$$

Exercice 478.

1.



$$2. \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ donc } \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et donc } E(3; 5). \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et donc } F(-5; -2).$$

3. Avec les coordonnées : $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc E est l'image de C par l'homothétie de centre B et de rapport $-\frac{1}{3}$.

4. $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EC}$ donc (AF) et (EC) sont parallèles.

5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FC}$ donc $ABCF$ est un parallélogramme.

Exercice 479.

$$1. \quad \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

$$2. \quad D(17; 2) \text{ et } E(2; 4).$$

3. C est l'image de E par l'homothétie de centre A et de rapport 4 donc $(EB) \parallel (CD)$.

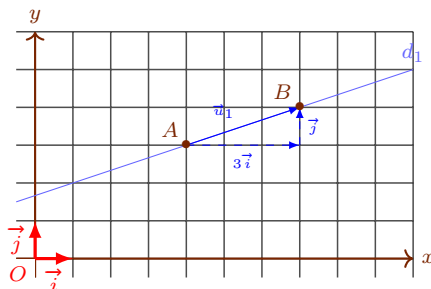
Exercice 480.

1. $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont opposés.

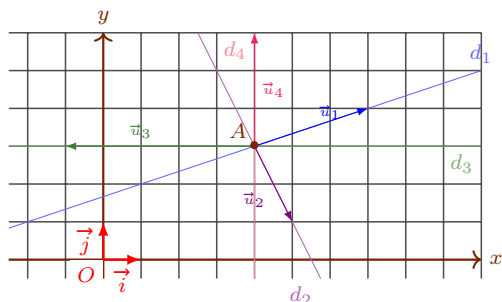
$$2. \quad F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2} = 6,6742 \times 10^{-11} \times \frac{5,97 \times 10^{24} \times 7,35 \times 10^{22}}{(3,84 \times 10^8)^2} \approx 1,986 \times 10^{20} \text{ N}.$$

$$3. \quad F_S = 6,6742 \times 10^{-11} \times \frac{5,97 \times 10^{24} \times 1,99 \times 10^{30}}{(1,5 \times 10^{11})^2} \approx 3,524 \times 10^{22} \cdot \frac{3,524 \times 10^{21}}{1,986 \times 10^{20}} \approx 1,77 \times 10^2.$$

Exercice 481. L'idée principale est la suivante pour tracer une droite nous devons connaître deux points. Nous connaissons déjà A il faut en trouver un autre. Le plus simple est de prendre le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Une autre façon de dire les choses nous cherchons l'image, B , de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.



En procédant de même pour les autres vecteurs :



Exercice 482. $\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $C\left(-\frac{2}{3}\right)$ dans $(A, \overrightarrow{AB})$. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $C\left(\frac{5}{3}\right)$ dans $(B, \overrightarrow{BA})$.

Exercice 483.



$$I\left(\frac{\frac{3}{2} + (-2)}{2}\right) \text{ donc } I\left(-\frac{1}{4}\right).$$

$$-3\overrightarrow{GR} + 5\overrightarrow{GS} = \vec{u} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{GO} - 3\overrightarrow{OR} + 5\overrightarrow{GO} + 5\overrightarrow{OS} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(-3\overrightarrow{OR} + 5\overrightarrow{OS}) \text{ donc } G\left(-\frac{29}{4}\right).$$

Exercice 484. $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ donc $B(0; -1)$. $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\vec{u}$ donc $C\left(-\frac{5}{2}; -6\right)$. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{u}$ donc $D\left(\frac{1}{2}, -2\right)$. $\overrightarrow{AE} = 3\vec{u}$ donc $E(2; 3)$.

Exercice 485. $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Exercice 486. $3\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$ comme $\frac{4}{7} \in [0; 1]$, $G \in [AB]$.

$$-2\overrightarrow{AG} + 5\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} \text{ comme } \frac{5}{3} \notin [0; 1], G \notin [AB].$$

Exercice 487.

1. La droite parallèle à (BC) passant par A .
2. La médiane de ABC issue de A .
3. La parallèle à (AB) passant par C .

Exercice 488. La droite passant par $A(2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 489.

1. $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.
2. $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 2x_E - 2 \times 1 \\ 2y_E - 2 \times 0 \end{pmatrix}$ donc $E(1; \frac{1}{2})$. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2x_D - 2 \times 0 \\ 2y_D - 2 \times 1 \end{pmatrix}$ donc $D(\frac{1}{2}, 1)$.
 $I(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$.
3. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{ED}$ donc ils sont colinéaires et (BC) et (ED) sont parallèles.
4. Si G vérifie $6\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ alors $4x_G = 1$ et $4y_G = 1$ donc $G(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
5. $\overrightarrow{GB} \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CI} \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$ donc $GBIC$ est un parallélogramme.

Exercice 490.

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. A , B et E sont alignés ssi $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 & a+3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = -5$.
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donc ABC est rectangle en B mais pas isocèle.
4. (a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - (-3) \\ y_D - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow D(-1; 5)$.
(b) $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme. Comme de plus $\widehat{ABC}$ est droit, $ABCD$ est un rectangle.
5. J symétrique de A par rapport à B ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BJ} \Leftrightarrow J(5; -3)$.
6. A , B et F sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires ssi $\begin{vmatrix} 4 & x_F - (-3) \\ -2 & 0 - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_F = -5$.
7. $I(0; 2)$. (BG) et (AI) sont parallèles ssi $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires. $\begin{vmatrix} 0 - 1 & 3 \\ y_G - (-1) & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow G(0; -\frac{4}{3})$.

Exercice 491.

1. $I(2; 4)$. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc ABC est rectangle en A . De plus $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ donc ABC est isocèle rectangle en A .
3. $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc $D(5; 5)$. $ABDC$ est donc un carré.
4. $4 \times (-1) - (-2) \times (x_E - (-1)) = 0 \Leftrightarrow x_E = 1$.
5. $\overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} -1 \\ y_F - 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IA} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. $2 + 3(y_F - 7) = 0 \Leftrightarrow y_F = \frac{19}{3}$.
6. $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK} = 3\overrightarrow{KO} + 3\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ donc $K(\frac{1}{2}, 1)$.
7. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}$ donc $J(7; -1)$.

Exercice 492.

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. $AB = BC$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donc ABC est isocèle rectangle en B .
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$ donc $D(1; 3)$.
3. $ABCD$ est donc un carré.
4. $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AE}$ donc les points A , C et E sont alignés. De $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EA}$ on déduit que A est le milieu de $[CE]$.
5. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OB}$ d'où $F(0; -2)$.
6. $\overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $-2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$ et donc (AB) et (FE) sont parallèles.

7. $\begin{vmatrix} -1 & x_G - (-1) \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - 3(x_G + 1) = 0 \Leftrightarrow x_G = -\frac{2}{3}$. Déterminez les coordonnées du point G appartenant à l'axe des abscisses et tel que B , C et G soient alignés.

Exercice 493.

- 1.
2. $I\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.
3. $\overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -6 \end{smallmatrix}\right)$, $\overrightarrow{AC}\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$, $\overrightarrow{BC}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donc ABC est rectangle en B (mais pas isocèle).
4. $\overrightarrow{EC}\left(\begin{smallmatrix} 5 - x_E \\ 1 - y_E \end{smallmatrix}\right)$ donc $E(1; 7)$.
5. $\overrightarrow{ID}\left(\begin{smallmatrix} -21/4 \\ -7/2 \end{smallmatrix}\right)$, $-\frac{4}{7}\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BC}$ donc les droites (ID) et (BC) sont parallèles.
6. $\det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 - (-2) & 4 \\ y_F - 5 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y_F = 8$.
7. $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{GO} - \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}$ donc $G(19; -3)$.
8. $\det(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_H - 5 & 4 \\ 0 - 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow H\left(\frac{17}{3}; 0\right)$.
9. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CA}$ donc $J(-9; 9)$.

Exercice 494.

1. $\overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$ donc $K\left(-\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$.
2. $\overrightarrow{BC}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. $\overrightarrow{CJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC}$ donc $J\left(-\frac{7}{3}; 1\right)$.
3. $\overrightarrow{AL} + 2\overrightarrow{CL} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}$ donc $L\left(-1; \frac{5}{3}\right)$.
4. $\overrightarrow{AJ}\left(\begin{smallmatrix} -4/3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, $\overrightarrow{BL}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2/3 \end{smallmatrix}\right)$, $\overrightarrow{CK}\left(\begin{smallmatrix} -2/3 \\ 4/3 \end{smallmatrix}\right)$ donc $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$.
5. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL} \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL}$. $\overrightarrow{AK}\left(\begin{smallmatrix} -2/3 \\ -2/3 \end{smallmatrix}\right)$, $\overrightarrow{AL}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -4/3 \end{smallmatrix}\right)$ donc $N\left(-\frac{5}{3}; 1\right)$.
6. $\overrightarrow{BN}\left(\begin{smallmatrix} 4/3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ donc $\frac{3}{2}\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC}$ donc les points C , N et B sont alignés.

Exercice 495.

1. $\overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix} -11/4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{DC}\left(\begin{smallmatrix} -11/4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme.
2. $\overrightarrow{BD}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OE}$ donc $E\left(0; \frac{7}{3}\right)$. $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{OD}$ or $\overrightarrow{DA}\left(\begin{smallmatrix} -1/4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ donc $F\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{4}\right)$.
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EG}$ donc $G\left(-\frac{11}{4}; \frac{13}{4}\right)$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FH}$ donc $H\left(-1; \frac{15}{4}\right)$.
4. $\overrightarrow{CH}\left(\begin{smallmatrix} 3/4 \\ -1/4 \end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{CG}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1/3 \end{smallmatrix}\right) = \overrightarrow{DE}$.
- 5.

Exercice 496.

1. (a) $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 1)$, $E\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ et $F\left(1; \frac{1}{3}\right)$.
(b) $\overrightarrow{AC}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{EF}\left(\begin{smallmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{smallmatrix}\right)$ donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EF}$ et donc $(AC) \parallel (EF)$.
2. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
3. Il y a une configuration de Thalès et $\frac{BF}{BC} = \frac{1}{3} = \frac{EB}{BA}$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

Exercice 497. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$ on déduit : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$ et donc $2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs sont colinéaires et les droites parallèles.

Exercice 498.

1. E est le point d'intersection des droites (JD) et (IC) donc $E \in (CI)$ donc il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CI}$.
2. F le point d'intersection des droites (AC) et (JD) donc $F \in (CA)$ donc il existe un réel λ tel que : $\overrightarrow{CF} = \lambda\overrightarrow{CA}$.
3. $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $D(-1;0)$, $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
4. $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} k/2 \\ -k \end{pmatrix}$. $E\left(\frac{k}{2}, -k+1\right)$.
6. $\det(\overrightarrow{JE}, \overrightarrow{JD}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{k}{2} - \frac{1}{2} & -1 - \frac{1}{2} \\ -k + 1 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}k + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}k + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{4}{7}$.
7. $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
8. $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \end{pmatrix}$. $F(0; -\lambda+1)$.
9. $\det(\overrightarrow{JF}, \overrightarrow{JD}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\lambda + 1 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \left(-\lambda + \frac{1}{2}\right) \frac{-3}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$.

Exercice 499. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 2 & y-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{22}{5}$.

IV Équations cartésiennes de droites.

Équations cartésiennes.

Nous appelons équation cartésienne une équation liant les coordonnées d'un objet géométrique dans un repère cartésien du plan (ou de l'espace). Ainsi dans un repère orthonormé du plan le cercle dont le centre est l'origine est le rayon vaut 1 a pour équation $x^2 + y^2 = 1$.

EXERCICE 500. Représentez (avec un outil informatique) graphiquement l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient l'équation :

- | | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $2x + y - 3 = 0$, | b) $\sqrt{x^2} - y + 2 = 0$, | c) $x - x + y = 0$, |
| d) $y = 3x - 2 $, | e) $x + y - 2 = 0$, | f) $4x^2 - (y + 1)^2 = 0$, |
| g) $(2x - y + 1)^2 - 4 = 0$, | h) $(x + 1)^2 + (2x - y)^2 = 0$, | i) $(2x - 1)^2 - (y + 2)^2 = 0$, |
| j) $ x + y = 1$. | | |

Équations cartésiennes d'une droite.

EXERCICE 501. Soient A et B deux points du plan dont les coordonnées sont données dans un repère du plan. Soit $M(x, y)$ un troisième point.

1. Exprimez les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
2. Calculez $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.
3. À quelle condition portant sur $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont-ils colinéaires ? Déduisez-en une condition sur x et y .
4. Si la précédente condition est vérifiée que peut-on dire des points A , B et M ?

Proposition 65. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan euclidien.

- (i) Pour toute droite $\mathcal{D}$ il existe des réels a , b et c (avec a et b non simultanément nuls) tels que $\mathcal{D}$ est formée de tous les points $M(x, y)$ pour lesquels x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$.
- (ii) Réciproquement étant donné des réels a , b et c (avec a et b non simultanément nuls), l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite.

Démonstration.

- (i) Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts de $\mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y - x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A) = 0 \end{aligned}$$

Donc en posant $a = y_B - y_A$, $b = -(x_B - x_A)$ et $c = -x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A)$ nous obtenons bien que x et y sont solution de l'équation $ax + by + c = 0$.

- (ii) Cette démonstration est plus technique et astucieuse. Nous n'en présenterons ici que la trame.

Pour s'assurer que l'équation est celle d'une droite nous devons trouver une droite qui lui corresponde, i.e. un point et un vecteur directeur de cette droite.

Pour le point nous choisirons $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$ si $a \neq 0$ et $\left(0; -\frac{c}{b}\right)$ sinon.

Pour le vecteur directeur nous choisissons $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (ce choix astucieux s'inspire de la démonstration de (i)).

Il ne reste plus, en faisant comme au (i), qu'à vérifier que l'équation cartésienne obtenue pour ce point et ce vecteur directeur est bien : $ax + by + c = 0$.

Remarques.

1. Une équation cartésienne n'est pas unique : $x + 3y + 1 = 0$ et $2x + 6y + 2 = 0$ sont deux équations cartésiennes d'une même droite, la seconde étant obtenue en multipliant la première par 2.
2. Dans la suite de la leçon nous distinguerons trois types de droites correspondant à deux types d'équations différentes.
3. Le choix du vecteur directeur au (ii) de la démonstration est à retenir : si une droite à une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ alors les vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

EXERCICE 502. Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien, $A(3; -1)$ un point et $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -102 \end{pmatrix}$.

1. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Démontrer que $B\left(0; -\frac{155}{2}\right) \in \mathcal{D}$.

Exercice 500.

1. La méthode de la détermination d'une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur directeur est à connaître.

Notons $\mathcal{D}$ la droite passant pas A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Déterminons une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Soit $M(x; y) \in \mathcal{D}$.

$M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, ce qui équivaut encore successivement à

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) &= 0 \\ \begin{vmatrix} x_{AM} & x_u \\ y_{AM} & y_u \end{vmatrix} &= 0 \\ \begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ y-(-1) & -102 \end{vmatrix} &= 0 \\ (x-3) \times (-102) - (y+1) \times (-4) &= 0 \\ -102x + 4y + 310 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} : -102x + 4y + 310 = 0.$$

2. La méthode pour vérifier qu'un point appartient à une droite dont on connaît une équation est à savoir.

Vérifions que $B \in \mathcal{D}$.

$B \in \mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Or

$$\begin{aligned}
 -102x_B + 4y_B + 310 &= -102 \times 0 + 4 \times \left(-\frac{155}{2}\right) + 310 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

donc

$$B \in \mathcal{D}.$$

Nous allons utiliser la remarque faites précédemment : si une droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

EXERCICE 503. Déterminez un vecteur directeur de la droite d .

- a) $d : 4x - 3y + 1 = 0$. b) $d : x - 5y + 2 = 0$. c) $d : -x + 2y - 5 = 0$.

Exercice 501.

- a) $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Or ici $a = 4$, $b = -3$ et $c = 1$ donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .
- b) Voici une autre façon de déterminer un vecteur directeur d'une droite mais un peu plus lourde. Trouvons deux points distincts A et B de d et alors $\overrightarrow{AB}$ sera un vecteur directeur de d . Pour trouver un point choisissons une valeur de x au hasard et cherchons une valeur de y correspondante e sorte que ce soit un point de la droite. Cherchons (si possible) $A \in d$ de sorte que $x_A = 0$ alors on devrait avoir $x_A - 5y_A + 2 = 0$ et donc $y_A = \frac{2}{5}$. $A \left(0; \frac{2}{5}\right)$ est un point de la droite. De même si $x_B = 1$ alors $y_B = \frac{3}{5}$ et $B \in d$. Donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d .
- c) $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Or ici $a = -1$, $b = 2$ et $c = -5$ donc $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

Exercices.

EXERCICE 504. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteurs directeur $\vec{u}$.

- a) $A(3; 4)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. b) $A(-2; 5)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. c) $A(5; -10)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- d) $A(0; 4)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 502.

- a) $\mathcal{D} : 2x + y - 10 = 0$.
 b) $\mathcal{D} : -3x - 6 = 0$.
 c) $\mathcal{D} : x + 3y + 25 = 0$.
 d) $\mathcal{D} : x - 5y + 20 = 0$.

EXERCICE 505. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et B .

- a) $A(2; 1)$ et $B(5; -6)$. b) $A(-3; 0)$ et $B(1; 1)$. c) $A(-1; 7)$ et $B(0; 3)$.
 d) $A(6; 8)$ et $B(3; 2)$.

Exercice 503.

a) $-7x - 3x + 17 = 0$.

b) $x - 4y + 3 = 0$.

c) $-4x - y + 3 = 0$.

d) $6x - 3y - 12 = 0$

EXERCICE 506. Soit $d : 2x - y + 1 = 0$.

1. Déterminez l'ordonnée du point A de d dont l'abscisse est 5.
2. Déterminez l'abscisse du point B de d dont l'ordonnée est 13.
3. Tracez la courbe représentative de d dans un repère orthonormé.

EXERCICE 507. Tracez la courbe représentative de d dans un repère orthonormé dans les cas suivants.

a) $d : 2x + 5y + 1 = 0$.

b) $d : -3x + 4y + 1 = 0$.

c) $d : 4x + 1 = 0$.

d) $d : 2y - 4 = 0$.

EXERCICE 508. Soient $A(-3; 4)$, $B(2; 1)$ et $C(-1; -3)$.

1. Calculez les coordonnées du point M milieu de $[AC]$.
2. Déduisez-en une équation cartésienne de la médiane issue de B dans ABC .

Exercice 504.

1. $M\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.

2. $\frac{1}{2}x - 4y + 3 = 0$.

EXERCICE 509. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à (AB) et passant par C .

a) $A(5; 4)$, $B(-1; 2)$ et $C(4; -3)$.

b) $A(-5; -1)$, $B(6; 4)$ et $C(1; 2)$.

Exercice 505. (AB) et $\mathscr{D}$ sont parallèles si et seulement si tout vecteur directeur de l'une est vecteur directeur de l'autre droite.

a) $-2x + 6y + 26 = 0$.

b) $5x - 11y + 17 = 0$.

EXERCICE 510. Déterminez une équation cartésienne de la droite (AB) puis vérifiez si A , B et C sont alignés.

a) $A(-2; 4)$, $B(7; 2)$ et $C(11; 1)$.

b) $A(-4; -1)$, $B(4; 3)$ et $C(44; 23)$.

c) $A(-26; 20)$, $B(51; 6)$ et $C(30; 10)$.

d) $A(20; 18)$, $B(72; 40)$ et $C(124; 62)$.

Exercice 506.

1. $-2x - 9y + 32 = 0$ Non.

2. $-4x + 8y - 8 = 0$. Oui.

3. $14x + 77y - 1176 = 0$. Non.

4.

EXERCICE 511. Dites si les droites d et d' sont strictement parallèles, confondues ou sécantes.

a) $d : 2x - 6y + 5 = 0$ et $d' : x - 3y + 2 = 0$.

b) $d : 4x - 3y + 1 = 0$ et $d' : 5x - 4y + 2 = 0$.

c) $d : 3x + 9y + 2 = 0$ et $d' : 12x + 36y + 8 = 0$.

Exercice 507.

a) Déterminons la position relative de d et d' .

La position relative de deux droites (position de l'une par rapport à l'autre) dans la plan (coplanaires) n'admet que deux possibilités qui s'excluent mutuellement :

- les droites sont *sécantes*,
- les droites sont *parallèles* (et en particulier éventuellement confondues).

À ce stade de la leçon pour démontrer le parallélisme nous allons utiliser les vecteurs directeurs.

$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ donc : $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d' .

Déterminons si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}; \vec{v}) &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 6 \times 1 - 2 \times 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc d et d' sont parallèles.

Deux droites parallèles sont confondues si et seulement si elles ont au moins un point en commun. Or $P(0; \frac{5}{6}) \in d$ mais $P \notin d'$ donc

d et d' sont strictement parallèles.

b)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \det(\vec{u}; \vec{v}) = -1. d \nparallel d'.$$

c)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} -36 \\ 12 \end{pmatrix}. \det(\vec{u}; \vec{v}) = 0. d \parallel d'. P(-\frac{2}{3}; 0) \in d \text{ et } P \in d' \text{ donc } d = d' \text{ (droites confondues).}$$

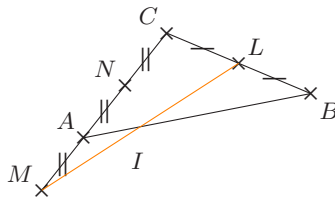
EXERCICE 512. Dans un repère orthonormé (O, I, J) on considère les points $A(-3; -2)$, $B(2; -1)$ et $C(1; 4)$.

1. Placez ces points.
2. Déterminez une équation des médianes du triangle ABC issues des sommets A et B .
3. Que représente le point $M(0; \frac{1}{3})$ pour le triangle ABC ?
4. Déterminez les coordonnées du point d'intersection des droites (CM) et (AB) .
5. Que représente ce point pour le segment $[AB]$?

Exercice 508.

- 1.
2. Coordonnées du milieu de $[BC]$: $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$. Médiane issue de A : $7x - 9y + 3 = 0$.
Coordonnées du milieu de $[AC]$: $(-1, 1)$. Médiane issue de B : $2x + 3y - 1 = 0$.
3. M est le point d'intersection des deux précédentes médianes donc c'est le centre de gravité du triangle.
4. On peut le faire en résolvant un système ou en raisonnant sur la troisième médiane, celle issue de C .
5. Milieu de $[AB]$.

EXERCICE 513. Les données sont codées sur la figure suivante :



On se place dans le repère (A, B, C) .

1. Donnez les coordonnées des points A , B et C .
2. Déterminez les coordonnées des points M , N puis L .
3. Donnez une équation de la droite (ML) et en déduire les coordonnées du point I intersection des droites (AB) et (ML) . Précisez la position du point I sur le segment $[ML]$.
4. Retrouvez ce résultat par une autre méthode non analytique.

Exercice 509.

1. $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.
2. $M(0, -\frac{1}{2})$, $N(0, \frac{1}{2})$ et $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
3. $(ML): y = 2x - \frac{1}{2}$. $(AB): y = 0$. Donc intersection : $0 = 2x - 0,5 \Leftrightarrow x = 0,25$. $I(\frac{1}{4}, 0)$.

EXERCICE 514. Déterminez une équation de la droite $\mathscr{D}$ de repère $(A, \vec{u})$, dans les cas suivants :

- a) $A(-2;2)$ et $\vec{u}(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix})$; b) $A(0;0)$ et $\vec{u}(\begin{smallmatrix} 3 \\ -5 \end{smallmatrix})$; c) $A(0,-2)$ et $\vec{u}(-1;3)$.

EXERCICE 515. Déterminez une équation de la droite (A) dans les cas suivants :

- a) $A(1;3)$ et $B(-1;2)$; b) $A(2;0)$ et $B(0,-4)$; c) $A(0;0)$ et $B(-2;3)$.

EXERCICE 516.

1. Déterminez une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(-2;3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(-1;2)$.
2. Les points suivant appartiennent-ils à $\mathscr{D}$: $B(\frac{13}{11}, -\frac{37}{11})$, $C(-\frac{7}{15}, \frac{2}{29})$, $D(\sqrt{2}, -\frac{2}{\sqrt{2}-1})$?
3. Déterminez les point de $\mathscr{D}$ d'abscisse $-\frac{3}{2}$ et le point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.
4. Existe-il un point de $\mathscr{D}$ dont l'abscisse est égale à l'ordonnée?

EXERCICE 517.

1. Construisez la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x - y - 5 = 0$. Déterminez un repère de $\mathscr{D}$ et écrivez une représentation paramétrique vectorielle de $\mathscr{D}$.
2. Même question pour les droites d'équations :

- a) $2x + y = 3$; b) $2x - 5y + 3 = 0$; c) $x + 2 = 0$;
d) $y - 3 = 0$; e) $3x + 5y = 0$; f) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0$.

EXERCICE 518. Trouvez une équation cartésienne de l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + t(3\vec{i} - 4\vec{j})$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

EXERCICE 519. Soient $A(3;8)$, $B(2;1)$, $C(8;3)$ et $N(6;5)$.

1. (a) Calculez les coordonnées de M milieu de $[BC]$.
(b) Montrez que A est équidistant de B et de C .
(c) Que représente la droite (AM) pour le triangle ABC ?

2. (a) Déterminez une équation cartésienne de (AC) ?
 (b) Démontrez que N appartient à la droite (AC)
 (c) Montrez que le triangle BNC est rectangle en N .
 (d) Que représente la droite (BN) pour le triangle ABC ?
3. (a) Déterminez une équation cartésienne de chacune des droites (AM) et (BN) .
 (b) Déterminez les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC .

EXERCICE 520. Soient $ABCD$ un parallélogramme de centre O , I un point de la droite (AC) distinct de A et de O , M le point tel que I soit le milieu du segment $[DM]$. La parallèle à (AD) passant par M coupe (AB) en E et la parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en F .

1. Faites une figure avec l'ensemble de ces points.
2. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, donnez les coordonnées des points A , B , C et D . On se placera dans ce repère dans toute la suite de l'exercice.
3. Donnez une équation de la droite (AC) .
4. On appelle a l'abscisse de I . Exprimez l'ordonnée de I en fonction de a .
5. Déduisez-en les coordonnées de M en fonction de a .
6. Donnez une équation de la droite (AD) .
7. Déduisez-en une équation de la parallèle à (AD) passant par M .
8. Donnez une équation de la droite (AB) .
9. Déduisez-en les coordonnées de E .
10. Donnez une équation de la parallèle à (AB) passant par M .
11. Donnez une équation de la droite (BC) .
12. Déduisez-en les coordonnées de F .
13. Démontrez que les points I , E et F sont alignés.

EXERCICE 521. Exercice 4 du sujet de bac de première.

V Représentation paramétrique d'une droite.

Trouver une représentation à partir d'un repère de la droite ou de deux points.

La définition d'une droite se fait avec une équation paramétrique vectorielle. Ainsi la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ où t décrit $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. Soit d la droite passant par le point $A(1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dire que $M(x,y) \in d$ équivaut à dire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Cette égalité vectorielle se traduit, en considérant les coordonnées, par les égalités $\begin{cases} x-1 = t \times 3 \\ y-2 = t \times 4 \end{cases}$ Autrement dit les coordonnées des points de la droite d s'obtiennent grâce à $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t + 2 \end{cases}$ en donnant à t toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. On dit qu'il s'agit d'une représentation paramétrique de la droite d .

Définition 57. Soient (O,I,J) un repère du plan, d une droite du plan, $A(x_A, y_A)$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur non nul. Le système $\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ est appelé une *représentation paramétrique* de d . Les valeurs x et y sont les coordonnées d'un point de d .
Exemples.

1. Si $A(-3;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -7 \\ 13 \end{pmatrix}$ alors une représentation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est : $\begin{cases} x = -7t - 3 \\ y = 13t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
2. Pour la représentation paramétrique de la droite d donnée par $d : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, $(-2t+1, t)$ sont les coordonnées d'un point de d . Ainsi aux valeurs 1, -1, 2 et 0 de t sont associés les points de coordonnées respectives : $(-1,1)$, $(3,-1)$, $(-3,2)$ et $(1,0)$.
3. Le système paramétrique dépend du repère $(A, \vec{u})$ de d qui a été choisi. Ainsi si $A(1;2)$ et $B(3;5)$ alors $(A, \overrightarrow{AB})$ et $(B, -3\overrightarrow{AB})$ sont des repères de (AB) et les représentations paramétriques correspondantes sont : $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -6t + 3 \\ y = -9t + 5 \end{cases}$.

Remarques.

1. Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique. À chaque repère de la droite correspond une représentation paramétrique.
2. Deux valeurs distinctes de t donnent deux points distincts de la droite. On obtient tous les points de la droite lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

EXERCICE 522. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A(-2;3)$ et $B(1,-1)$.

1. Écrivez un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.
2. Quel est le paramètre du point C symétrique de A par rapport à B ? Calculez les coordonnées de C .
3. Écrivez le système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$ correspondant au repère $(C, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$.

Trouver une représentation paramétrique à partir d'une équation cartésienne.

Trouver une représentation paramétrique à partir d'une équation cartésienne.

Retrouver une expression géométrique de la droite.

On peut lire directement un point et un vecteur dans la représentation paramétrique.

On peut également avec deux valeurs distinctes du paramètre t obtenir deux points distincts de la droite.

Retrouver une équation cartésienne.

On isole t dans chaque équation et on égale les deux expressions de t ainsi obtenues.

Exercices.

EXERCICE 523. Décrire la position relative de toutes les droites suivantes (on cherchera un moyen simple de répondre à la question : tableau, par paquets...)

- a) $y = -3x + 5$ b) $y = 3x$ c) $x = 3$ d) $y = 3x + 5$ e) $y = -3x + 7$
f) $y = 3$

EXERCICE 524. Décrire la position relative de toutes les droites suivantes (on cherchera un moyen simple de répondre à la question : tableau, par paquets...)

- a) $y = 2x - 5$ b) $y = \frac{4}{5}x - 2$ c) $x = \frac{-14}{2}$ d) $x = -7$ e) $y = \frac{6}{3}$
f) $y = \frac{4}{2}x - \frac{25}{5}$ g) $y = -2$ h) $y = \frac{8}{10}x$

VI Équations réduites de droites.

Équations réduites (à partir des équations cartésiennes).

Les équations réduites sont des équations cartésiennes simplifiées qui font le lien entre équation cartésienne et fonction affine.

Pour une fonction affine chaque valeur indiquée sur l'axe des abscisses est reliée à une valeur sur l'axe des ordonnées. Les ordonnées, y , s'expriment en fonction des valeurs en abscisses, x .

Autrement dit pour définir une fonction nous devons obtenir une expression de la forme : $y = f(x)$. Nous allons l'obtenir à partir d'une équation cartésienne.

Exemples.

1. Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est $4x + 2y - 14 = 0$.

$$4x + 2y - 14 = 0$$

équivalent successivement à

$$4x + 2y - 14 - 4x + 14 = 0 - 4x + 14$$

$$2y = -4x + 14$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{-4x + 14}{2}$$

$$y = \frac{-4x}{2} + \frac{14}{2}$$

$$y = -2x + 7$$

2. Soit d la droite dont une équation cartésienne dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est $8y + 32 = 0$.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est $3x + 6 = 0$.

Proposition 66. Soient $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, $\mathcal{D}$ une droite du plan.

- (i) Si $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation, dite réduite, de la forme : $x = r$ avec r une constante réelle.
- (ii) Si $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$ avec m et p des constantes réelles.

Démonstration. Considérons une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Nous utiliserons le fait que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et aussi le fait que a et b ne peuvent être simultanément nuls.

On distingue les deux cas.

- (i) Premier cas : la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Donc le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{j}$ et par conséquent : $-b = 0$ et $a \neq 0$.

Ainsi l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ se simplifie en $ax + c = 0$. Et puisque $a \neq 0$: $x = \frac{-c}{a}$.

- (ii) Second cas : la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Donc le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{j}$ et nécessairement : $b \neq 0$.

Ainsi l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ peut s'écrire : $y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$.

Remarques.

1. Nous reconnaissons, dans la seconde équation réduite, l'expression d'une fonction affine. m sera encore appelé la pente (ou le coefficient directeur) et p l'ordonnée à l'origine. Par conséquent ce résultat démontre que la courbe représentative d'une fonction affine est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées (résultat que vous connaissez et utilisez depuis le collège).
2. Les propositions réciproques de celle de la proposition sont également clairement vraies. Nous aurions pu écrire cette proposition avec des équivalences.
3. Les équations réduites sont préférables aux équations cartésiennes en ceci : une droite admet une infinité d'équations cartésiennes mais une unique équation réduite.

EXERCICE 525. Dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère les droites d_1 et d_2 dont on donne les équations réduites. $d_1 : y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{6}$ et $d_2 : x = -4$.

1. Déterminez si les points $A\left(3, -\frac{5}{6}\right)$, $B\left(-4, \frac{12}{13}\right)$ et $C\left(2, -\frac{1}{6}\right)$.
2. Donnez deux points distincts des précédents appartenant à d_1 et d_2 .
3. On admet que d_1 et d_2 sont sécantes déterminez les coordonnées de leur point d'intersection.

EXERCICE 526. Déterminez une équation de la droite d de pente -5 est coupant l'axe des abscisses au point $A(4;0)$.

Pente, alias coefficient directeur.

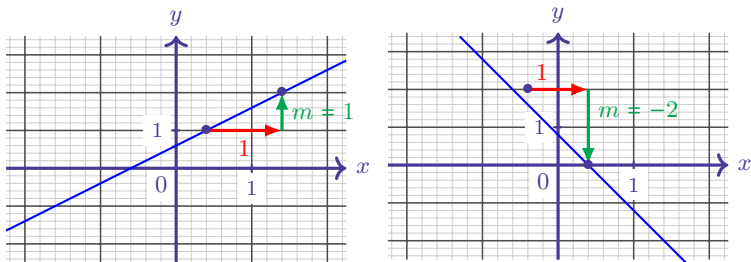
Proposition 67. Soient $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère d'un plan euclidien, A et B deux points distincts du même plan. Si (AB) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} &= \frac{mx_B + p - (mx_A + p)}{x_B - x_A} \\ &= \frac{m(x_B - x_A)}{x_B - x_A} \\ &= m\end{aligned}$$

Remarques.

1. En notant $f : x \mapsto mx + p$ nous remarquons que m est le taux d'accroissement de f entre x_A et x_B (puisque $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$).
2. On décrit cette formule en disant « variation des y sur variation des x ». En utilisant les notations de la physique : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
3. Remarquons enfin que cela signifie que les variations de y et les variations de x sont proportionnelles, m étant le coefficient de proportionnalité.
4. Comme $y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0$ nous pouvons affirmer que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$. Nous obtenons ainsi une méthode de lecture graphique du coefficient directeur d'une droite.



Exemples.

1. Soient $C(2, -3)$ et $D(-5; 7)$.

Déterminons l'équation réduite de (CD) .

Les abscisses de C et D sont distinctes donc (CD) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$.

Le coefficient directeur de (CD) est $m = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{-3 - 7}{2 - (-5)} = -\frac{10}{7}$.

De plus, en notant p l'ordonnée à l'origine, dire que $C \in (CD)$ signifie que : $y_C = -\frac{10}{7}x_C + p$. Cette dernière égalité équivaut successivement à : $-3 = -\frac{10}{7} \times 2 + p$, puis $-\frac{1}{7} = p$.

$$(CD) : y = -\frac{10}{7}x - \frac{1}{7}.$$

2. Si $M(3; 2)$ et $N(3; 5)$ alors (MN) n'admet pas d'équation réduite de la forme $y = mx + p$ car les deux points ont la même abscisse (et donc (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées). Dans ce cas la droite n'admet pas de pente (ça n'a pas de sens).
3. Si $d : y = -7x + 1$ alors $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -7 \end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur directeur de d .

EXERCICE 527. Donnez, lorsqu'elle existe, la pente de la droite d .

a) $d : y = 3,3x + 6,5$.

b) $d : y = 2$.

c) $d : y = -7 - x$.

d) $d : y = \frac{4x+1}{5}$.

e) $d : x = -0,8$.

f) $d : 4x + 2y + 5 = 0$.

Exercice 510.

a) $m = 3,3$.

b) $m = 0$.

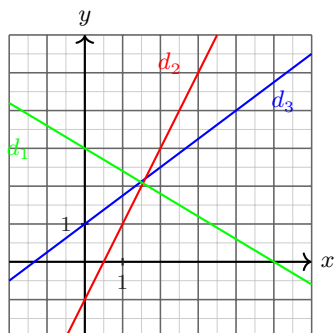
c) $m = -1$.

d) $\frac{4}{5}$.

e) Pas de pente.

f) $m = -2$.

EXERCICE 528. Déterminez la pente de chacune des droites tracées ci-dessous dans un repère.



Exercice 511. $m_1 = -\frac{3}{5}$, $m_2 = 2$ et $m_3 = \frac{3}{4}$.

EXERCICE 529. Déterminez la pente de chacune des droites.

- a) La droite d d'équation $-8x + 3t + 5 = 0$.
- b) La droite (AB) avec $A(-1, -9)$ et $B(2; 6)$.

Exercice 512.

- a) En isolant y : $y = \frac{8}{3}x - \frac{5}{3}$.

O avec le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}$. Donc $m = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$.

- b) $\frac{6-(-9)}{2-(-1)} = 5$.

EXERCICE 530. Déterminez l'équation de la droite passant par A et de pente m .

- a) $A(1, -3)$ et $m = -5$.
- b) $A(3; 0)$ et $m = \frac{2}{3}$.
- c) $A(2; 3)$ et $m = 0,75$.
- d) $A(-6, -5)$ et $m = 0$.

EXERCICE 531. Déterminez la pente de (AB) puis son équation réduite.

- a) $A(7, -1)$ et $B(0; 2)$.
- b) $A(-3; 4)$ et $B(3; 10)$.
- c) $A(1, -1)$ et $B(4; 1)$.
- d) $A(0, -5)$ et $B(2; -1)$.

Proposition 68. Si une équation cartésienne d'une droite d est $ax + by + c = 0$ et si d admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ alors $m = -\frac{a}{b}$.

Démonstration. En résolvant l'équation cartésienne en y ou avec le vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Remarques.

1. Comme nous l'avions déjà noté il y a un lien entre le vecteur directeur et le coefficient directeur : $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ sont les coordonnées d'un vecteur directeur.

Parallélisme et équations réduites.

Proposition 69. Les droites admettant des équations réduites de la forme $x = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont toutes parallèles entre elles.

Deux droites admettant des équations réduites de la forme $y = mx + p$ sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

Les droites d'équations de la forme $x = a$ et celles d'équations de la forme $y = mx + p$ ne sont jamais parallèles.

Démonstration. Les droites d'équation $x = a$ sont toutes parallèles à l'axe des ordonnées donc elles sont parallèles entre elles.

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ étant un vecteur directeur de la droite d'équation $y = mx + p$ deux telles droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Les droites d'équations $y = mx + p$ et $x = a$ sont sécantes en $(a, ma + p)$ donc elles ne sont pas parallèles.

Exemples.

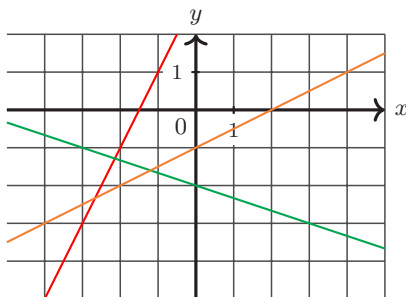
1. $d_1 : x = -12$ et $d_2 : x = 7$ sont parallèles (et parallèles à l'axe des ordonnées).
2. $d_1 : y = 3x + 1$ et $d_2 : y = 2x - 1$ n'ont pas la même pente donc elles sont sécantes.
3. $d_1 : y = -\frac{1}{2}x + 7$ et $d_2 : y = -\frac{1}{2}x - 4$ ont la même pente donc $d_1 \parallel d_2$.
4. $d_1 : x = 2$ et $d_2 : y = -3x + 1$ sont sécantes.

Lecture graphique.

La lecture graphique de l'équation réduite utilise les résultats vus précédemment.

1. Lecture directe de l'ordonnée à l'origine p : il s'agit de l'ordonnée du point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées.
2. Lecture directe du coefficient directeur : on part d'un point de la droite on se déplace d'une unité vers la droite, le coefficient directeur est le nombre d'unités avant de rejoindre la droite en se déplaçant à la vertical (positif en montant et négatif en descendant).
3. Lecture presque directe du coefficient directeur : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
4. Lecture indirecte du coefficient directeur : relever les coordonnées de points A et B puis utiliser la formule $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.
5. Calcul de p : si la lecture n'est pas possible trouver d'abord m puis calculer p en exprimant le fait qu'un point appartient à la droite.

EXERCICE 532. Dans le repère ci-dessous sont dessinées des droites.



Déterminez les équations réduites des différentes droites.

Exercice 513.

1. $\mathcal{D}_{-2} : y = 2x + 3$.
2. $\mathcal{D}_0 : y = -\frac{1}{3}x - 2$.
3. $\mathcal{D}_2 : y = \frac{1}{2}x - 1$.

Pente et tangente.

Proposition 70. Soient $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, A et B deux points distincts du plan d'abscisses distinctes. Le coefficient directeur de (AB) vérifie : $\tan(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = m$.

Démonstration. Démonstration élémentaire avec la définition vue au collège possible.

Remarques.

- 1.

Exercices.

EXERCICE 533. Déterminez un vecteur directeur de la droite et, lorsqu'elle existe, la pente de la droite décrite.

- a) La droite d d'équation $3x - 2y = 0$.
- b) La droite (AB) avec $A(3; 9)$ et $B(2; 4)$.
- c) La droite d d'équation $y = -4$.
- d) La droite d'équation $x + 5y + 2 = 0$.

EXERCICE 534. Dans un repère orthonormé (O, I, J) on considère les droites $d : y = -3x + 4$ et $d' : y = \frac{1}{3}x - 1$.

1. Représentez ces deux droites.
2. Que représentent, pour (d) et (d') , les points $P(0; 4)$, $P'(0; -1)$ et $A(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$?
3. Déduisez-en que les droites (d) et (d') sont perpendiculaires.

EXERCICE 535. Dans un repère orthonormé (O, I, J) on considère les points $A(-3; -2)$, $B(2; -1)$ et $C(1; 4)$.

1. Placez ces points.
2. Déterminez une équation des médianes du triangle ABC issues des sommets A et B .
3. Que représente le point $M(0; \frac{1}{3})$ pour le triangle ABC ?
4. Déterminez les coordonnées du point d'intersection des droites (CM) et (AB) .
5. Que représente ce point pour le segment $[AB]$?

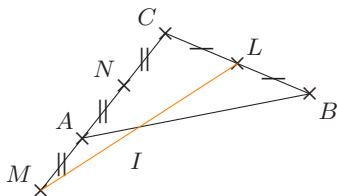
Exercice 514.

- 1.
2. Coordonnées du milieu de $[BC] : (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$. Médiane issue de $A : 7x - 9y + 3 = 0$.
Coordonnées du milieu de $[AC] : (-1, 1)$. Médiane issue de $B : 2x + 3y - 1 = 0$.
3. M est le point d'intersection des deux précédentes médianes donc c'est le centre de gravité du triangle.
4. On peut le faire en résolvant un système ou en raisonnant sur la troisième médiane, celle issue de C .
5. Milieu de $[AB]$.

EXERCICE 536. Dans le repère (O, I, J) , on considère les points $A(1, 2)$, $B(-1, 4)$, $C(-2; 3)$ et $D(1; m)$.

1. Utilisez un raisonnement par contraposée pour montrer que si les droites (AB) et (CD) sont sécantes alors $m \neq 0$.
2. Utilisez un raisonnement par l'absurde pour montrer que si $m \neq 0$ alors les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
3. Dans cette question, on suppose que $m = -3$. On considère les droites d'équation $y = -x + 3$ et $y = -2x - 1$.
 - (a) Associez ces équations aux droites (AB) et (CD) .
 - (b) En utilisant le point $E(-4; 7)$, utiliser un raisonnement par contre-exemple pour montrer que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
 - (c) On considère la droite (d) d'équation $y = x + 1$. Utilisez un raisonnement par disjonction des cas pour montrer que les droites (AB) , (CD) et (d) ne sont pas concourantes.

EXERCICE 537. Les données sont codées sur la figure suivante :



On se place dans le repère (A, B, C) .

1. Donnez les coordonnées des points A , B et C .
2. Déterminez les coordonnées des points M , N puis L .

- Donnez une équation de la droite (ML) et en déduire les coordonnées du point I intersection des droites (AB) et (ML) . Précisez la position du point I sur le segment $[ML]$.
- Retrouvez ce résultat par une autre méthode non analytique.

Exercice 515.

- $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.
- $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et $L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- $(ML) : y = 2x - \frac{1}{2}$. $(AB) : y = 0$. Donc intersection : $0 = 2x - 0,5 \Leftrightarrow x = 0,25$. $I\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

EXERCICE 538. On donne le bénéfice d'une entreprise, en million d'euros, entre 2012 et 2017.

Année	Rang de l'année x	Bénéfice y
2012	0	1,23
2013	1	1,38
2014	2	1,62
2015	3	1,70
2016	4	2,02
2017	5	2,31

- Dans un repère (O, I, J) où $OI = OJ = 2$ construisez le nuage de points de coordonnées (x, y) .
- Calculez $\bar{x}_1$ et $\bar{y}_1$ respectivement la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées des trois premiers points du nuage.
 - Placez le point $G_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$.
- Calculez $\bar{x}_2$ et $\bar{y}_2$ respectivement la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées des trois derniers points du nuage.
 - Placez le point $G_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ et tracez la droite (G_1, G_2) .
- On suppose que la droite (G_1, G_2) donne l'évolution du bénéfice de l'entreprise.
 - Calculez le bénéfice prévisible pour 2020.
 - Selon ce modèle, en quelle année le bénéfice devrait-il dépasser quatre millions d'euros ?

EXERCICE 539. Déterminez si les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles ou sécantes dans les cas suivants.

- $\mathscr{D}_1 : 3x - y - 9 = 0$ et $\mathscr{D}_2 : -6x + 2y - 17 = 0$.
- $\mathscr{D}_1 : y = -5x + 2$ et $\mathscr{D}_2 : y = 3x + 2$.
- $\mathscr{D}_1 : 4x + 2y + 9 = 0$ et $\mathscr{D}_2 : y = -2x + 5$.
- $\mathscr{D}_1 : 10x + 2y + 9 = 0$ et $\mathscr{D}_2 : y = 4$.

EXERCICE 540. Déterminez si les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont parallèles ou sécantes dans les cas suivants.

- $\mathscr{D} : y = -2x + 10$ et $A(3;2)$ et $B(3;0)$.
- $\mathscr{D} : -2x + 2y + 5 = 0$ et $A(3;4)$ et $B(6;7)$.

EXERCICE 541. Les droites (AB) et $(\mathscr{D})$ sont-elles parallèles ?

- $A(5; -10)$, $B(7; -2)$ et $(\mathscr{D}) : y = 4x + 5$
- $A(91; -280)$, $B(277; 830)$ et $(\mathscr{D}) : y = 6x - 2$
- $A(13351; 17630)$, $B(-7432; 5754)$ et $(\mathscr{D}) : y = \frac{4}{7}x$
- $A(0; 1)$, $B(3; 1)$ et $(\mathscr{D}) : 6y - 4x + 1 = 0$

Partie 8. Géométrie dans l'espace.

Partie 9. Économétrie.

Partie 10. Arithmétique.

I Diviseurs et multiples.

Division euclidienne.

Définition 58. Soient a et b des nombres entiers naturels (donc choisis dans $\mathbb{N}$) avec $b \neq 0$. Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est trouver le nombre *quotient* q (dans $\mathbb{Z}$) et le *reste* r (dans $\mathbb{N}$) tels que $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$.

Exemples.

1. Division euclidienne de 652 par 24
Opération posée (potence).

$$\begin{array}{r|l} 652 & 24 \\ -48 & 27 \\ \hline 172 & \\ -168 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Division euclidienne.

$$\begin{cases} 652 = 24 \times 27 + 4 \\ 0 \leq 4 < 24 \end{cases}$$

2. Division euclidienne de 237 par 12

$$\begin{array}{r|l} 237 & 12 \\ -12 & 19 \\ \hline 117 & \\ -108 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 237 = 12 \times 19 + 9 \\ 0 \leq 9 < 12 \end{cases}$$

Remarques.

- Cette définition peut se généraliser au cas d'entiers relatifs. Il est aussi possible de procéder à la division euclidienne de $x^2 - 2x + 1$ par $x - 1$, mais ce n'est pas au programme.
- a est appelé le *dividende* et b le *diviseur*.
- Avec Python 3 le quotient (au sens de la division euclidienne) de 17 et 3 s'obtient avec l'instruction

17//3

et le reste s'obtient en faisant

17%3

EXERCICE 542. Procédez à la division euclidienne de

- a) 356 par 5, b) 827 par 30, c) 232 par 7, d) 1204 par 13, e) 324 par 2.
f) 17 par 170, g) 121 par 11, h) 625 par 25, i) 97 par 7, j) 244 par 3.

Exercice 516.

a)

$$\begin{array}{r|l} 356 & 5 \\ -35 & 71 \\ \hline 06 & \\ -5 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 356 = 5 \times 71 + 1 \\ 0 \leq 1 < 5 \end{cases}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 827 & 30 \\ -60 & 27 \\ \hline 227 & \\ -210 & \\ \hline 17 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 827 = 30 \times 27 + 17 \\ 0 \leq 17 < 30 \end{cases}$$

c)

$$\begin{array}{r|l} 232 & 7 \\ -21 & 33 \\ \hline 22 & \\ -21 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 232 = 7 \times 33 + 1 \\ 0 \leq 1 < 33 \end{cases}$$

d)

$$\begin{array}{r|rr}
 1204 & 13 \\
 -117 & 92 \\
 \hline
 34 & \\
 -26 & \\
 \hline
 8 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1204 = 13 \times 92 + 8 \\ 0 \leq 8 < 13 \end{array} \right.$$

e)

$$\begin{array}{r|rr}
 324 & 2 \\
 -2 & 162 \\
 \hline
 12 & \\
 -12 & \\
 \hline
 04 & \\
 -4 & \\
 \hline
 0 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} 324 = 2 \times 162 + 0 \\ 0 \leq 0 < 2 \end{array} \right.$$

f)

$$\begin{array}{r|rr}
 17 & 170 \\
 -0 & 0 \\
 \hline
 17 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} 17 = 170 \times 0 + 17 \\ 0 \leq 17 < 170 \end{array} \right.$$

g)

$$\begin{array}{r|rr}
 121 & 11 \\
 -11 & 11 \\
 \hline
 11 & \\
 -11 & \\
 \hline
 0 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} 121 = 11 \times 11 + 0 \\ 0 \leq 0 < 11 \end{array} \right.$$

h)

$$\begin{array}{r|rr}
 625 & 25 \\
 -50 & 25 \\
 \hline
 125 & \\
 -125 & \\
 \hline
 0 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} 625 = 25 \times 25 + 0 \\ 0 \leq 0 < 25 \end{array} \right.$$

i)

$$\begin{array}{r|rr}
 97 & 7 \\
 -7 & 13 \\
 \hline
 27 & \\
 -21 & \\
 \hline
 6 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} 97 = 7 \times 13 + 6 \\ 0 \leq 6 < 7 \end{array} \right.$$

j)

$$\begin{array}{r|rr}
 244 & 3 \\
 -24 & 81 \\
 \hline
 04 & \\
 -3 & \\
 \hline
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} 244 = 3 \times 81 + 1 \\ 0 \leq 1 < 3 \end{array} \right.$$

Diviseur et multiple.

Définition 59. Soient a et b des nombres entiers naturels (donc choisis dans $\mathbb{N}$) avec $b \neq 0$. Nous dirons que b est un *diviseur* de a lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est zéro. Autrement dit b est un diviseur de a s'il est possible de trouver un nombre entier naturel q tel que $a = b \times q$.

Remarques.

1. Dans les exercices nous utiliserons très souvent la deuxième interprétation du diviseur.
2. Si b est un diviseur de a alors nous dirons que a est un *multiple* de b . Autrement dit a est le résultat d'une multiplication par b .
3. Un nombre *pair* est un nombre entier multiple de 2. Autrement dit un nombre est pair s'il est divisible par 2. Un entier qui n'est pas pair est dit *impair*.

Exemples.

1. 12 n'est pas un diviseur de 237 puisque le reste de la division euclidienne de 237 par 2 n'est pas nul (c'est 9).
2. 3 est un diviseur de 21 puisque $21 = 3 \times 7$ (et 7 est bien un entier).
3. 2,5 n'est pas un diviseur de 5 bien que $5 = 2,5 \times 2$ car 2,5 n'est pas un entier.
4. Multiples de 3 : 0, 3, 6, 9, ... (table de multiplication par 3).
5. 12 est un nombre pair puisque $12 = 2 \times 6$.

6. 13 n'est pas un nombre pair puisque le reste de la division euclidienne de 13 par 2 n'est pas 1 : $13 = 2 \times 6 + 1$.

7. 6,2 n'est pas pair puisque ce n'est pas même un nombre entier.

Rappels : critères de divisibilité.

divisible par	critère
2	le chiffre des unités est parmi 0, 2, 4, 6 et 8.
3	la somme des chiffres du nombre est divisible par 3.
5	le chiffre des unités est 0 ou 5.
9	la somme des chiffres du nombre est divisible par 9.
10	le chiffre des unités est 0.

Exemples.

1. Les diviseurs de 660 parmi 2, 3, 4, 5, 6 et 9 sont : 2, 3, 4, 5 et 6.

En effet :

660 est divisible par 2 puisqu'il se termine par 0.

660 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres l'est : $6 + 6 + 0 = 12$.

660 est divisible par 2 et $660 = 330$ or 330 aussi divisible par 2. Finalement 660 est divisible par 4.

660 est divisible par 5 puisqu'il se termine par 0.

660 est divisible par 6 puisqu'il est divisible par 2 et par 3 et donc par $2 \times 3 = 6$.

660 n'est pas divisible par 9 car si $660 = 3 \times 220$, 220 n'est pas divisible par 3.

EXERCICE 543. Déterminez les diviseurs, parmi 2, 3, 4, 5, 6 et 10, des nombres suivants.

- a) 204, b) 855, c) 168, d) 264, e) 90, f) 189,
g) 332, h) 84, i) 306, j) 165.

Exercice 517.

- a) 2, 3, 4, 6. b) 3, 5. c) 2, 3, 4, 6. d) 2, 3, 4, 6. e) 2, 3, 5, 6, 10.
f) 3. g) 2, 4. h) 2, 3, 4, 6. i) 2, 3, 6. j) 3, 5.

EXERCICE 544. Créez une fonction Python qui, à partir de deux entiers naturels a et n , renvoie la liste des n premiers multiples de a .

Exercice 518. Pour les n premiers multiples de a en commençant par 0.

```
def multiple(a,n):  
    listemultiple=[]  
    for i in range(n):  
        listemultiple=listemultiple+[a*i]  
    return listemultiple
```

EXERCICE 545. Créez une fonction Python qui, à partir de deux entiers a et b , vérifie si l'un est multiple de l'autre en renvoyant 0 (faux en informatique) ou 1 (vrai en informatique).

Exercice 519.

```
def multiples(a,b):  
    if a%b==0:  
        return 1  
    elif b%a==0:  
        return 1  
    else:  
        return 0
```

La difficulté pour déterminer tous les diviseurs d'un entier est de s'assurer de travailler de façon exhaustive : il ne faut en laisser aucun de côté. Une première approche consiste donc à tester tous les nombres plus petits. Voici un programme Python effectuant cette tâche.

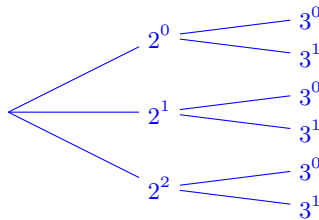
```
def diviseursde(n):
    listediviseurs=[]
    for i in range(1,n+1):
        if n%i==0:
            listediviseurs=listediviseurs+[i]
    return listediviseurs
```

Si nous effectuons cette tâche manuellement nous remarquons des répétitions que nous pouvons supprimer. Par exemple avec $12 : 1 \times 12 = 12, 2 \times 6 = 12, 3 \times 4 = 12, 4 \times 2 = 12$ puis on retrouve les mêmes diviseurs. En procédant de la sorte il suffit d'aller jusqu'à $\sqrt{12}$.

Rechercher des diviseurs revient à se poser la question des façons d'écrire un entier comme produit d'autre entiers. Dès lors qu'il s'agit de décomposer en facteurs un nombre nous pensons aux nombres premiers et au résultat fondamental de l'arithmétique : la décomposition en facteurs premiers de tout entier naturel.

Exemples.

1. Les diviseurs de 6. $6 = 2 \times 3$ donc 1, 2, 3 et 6 sont des diviseurs de 6.
2. Les diviseurs de 12.



En effectuant les produits sur les chemins et en recommençant ainsi de haut en bas de l'arbre : 1, 3, 2, 6, 4, 12. Cette méthode permet de compter rapidement le nombre de diviseur avec le principe multiplicatif (3 branches puis deux branches donc $3 \times 2 = 6$ chemins).

3. Les diviseurs de 72. $\sqrt{72} \approx 8,5$. $1 \times 72 = 72$. $2 \times 36 = 72$. $3 \times 24 = 72$. $4 \times 18 = 72$. 5 n'est pas diviseur de 72. $6 \times 12 = 72$. 7 n'est pas diviseur de 72. $8 \times 9 = 72$. Et nous pouvons affirmer que les diviseurs de 72 sont : 1, 72, 2, 36, 3, 24, 4, 18, 6, 12, 8 et 9.

EXERCICE 546. Déterminez tous les diviseurs positifs de 36, de 49, puis de 63.

Exercice 520. $36 = 2^2 \times 3^2$, $\{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$. $49 = 7^2$, $\{1; 7; 49\}$. $63 = 3^2 \times 7$, $\{1; 3; 7; 9; 21; 63\}$.

EXERCICE 547. Déterminez le nombre de diviseurs positifs de 27, de 20 puis de 2^{10} .

Exercice 521. $27 = 3^3$ donc $3 + 1 = 4$ diviseurs. $20 = 2^2 \times 5$ donc $(2 + 1) \times (1 + 1) = 6$ diviseurs. 2^{10} a $10 + 1 = 11$ diviseurs.

EXERCICE 548. *Sujet de C.R.P.E. 2015.* Un fleuriste reçoit 12 tulipes et 18 roses pour faire des bouquets. Il souhaite utiliser toutes ses fleurs et composer des bouquets identiques (même nombre de roses et même nombre de tulipes). Quelles sont ses différentes possibilités ?

Exercice 522. Diviseurs de 12 : $\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$. Diviseurs de 18 : $\{1; 2; 3; 6; 18\}$. Donc les diviseurs communs (nombre de bouquet à composer) : $\{1; 2; 3; 6\}$.

Proposition 71. Soit $n \in \mathbb{Z}$. n est pair si et seulement si il est possible de trouver un entier q tel que $n = 2 \times q$. n est impair si et seulement si il est possible de trouver un entier q tel que $n = 2 \times q + 1$.

Démonstration. Découle directement de la précédente définition.

Remarques.

1. Dès qu'il s'agit de démontrer un résultat concernant tous les nombres paires ou du moins une partie d'entre eux nous utiliserons cette façon d'écrire un nombre pair. Et de même pour les nombres impairs

2. De même n est un multiple de 3 ou n est divisible par 3) s'il peut s'écrire sous la forme $n = 3 \times q$.

EXERCICE 549. Démontrez que le produit d'un nombre pair par un entier naturel est un nombre pair.

Exercice 523. L'énoncé dont nous devons démontrer la véracité est une *propriété universelle* : il est valable pour de nombreuses valeurs. Il s'agit de démontrer que, quelque soit le nombre pair choisi et quelque soit l'entier naturel choisi leur produit est pair. Pour que notre démonstration soit générale il ne faut pas choisir des valeurs particulières c'est pourquoi nous utiliserons des lettres pour désigner ces nombres.

Soient p un nombre pair et m un nombre pris dans $\mathbb{N}$.

Le terme « Soient » signifie que les nombres p et m sont fixés (bien que nous n'ayons pas choisi de valeur particulière), ce ne sont pas des variables.

Notre objectif est de vérifier que le produit pm est pair.

Nous utilisons une caractérisation des nombres pairs que nous retrouverons très souvent.

Puisque p est pair, il existe un entier naturel n tel que : $p = 2n$ et donc : $pm = (2n)m = 2(nm)$. Puisque nm est un entier, $2(nm)$ est un nombre pair. Autrement dit pm est un nombre pair. Nous avons démontré que

quelque soit le nombre pair p et quelque soit l'entier m , pm est (toujours) un nombre pair.

EXERCICE 550. Démontrez que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.

Exercice 524. Soient m et n deux multiples de 7.

Démontrons que $m + n$ est un multiple de 7.

Dire que m est un multiple de 7 équivaut à dire qu'il peut s'écrire $m = 7p$ où p est un entier.

De même, il existe un entier q tel que $n = 7q$. Ainsi : $m + n = 7p + 7q = 7(p + q)$. Autrement dit $m + n$ est un multiple de 7.

Nous avons démontré que quelque soient m et n des multiples de 7, $m + n$ est aussi un multiple de 7.

EXERCICE 551. Démontrez que le produit d'un entier naturel divisible par 3 et d'un entier naturel divisible par 7 est divisible par 21.

Exercice 525. Soient m un multiple de 3 et n un multiple de 7.

Démontrons que mn est un multiple de 21.

Autrement dit il faut démontrer qu'il est possible d'écrire mn sous la forme : $mn = 21 \times ?$.

Dire que m est un multiple de 3 équivaut à dire qu'il peut s'écrire $m = 3p$ où p est un entier.

Dire que n est un multiple de 7 équivaut à dire qu'il peut s'écrire $n = 7q$ où q est un entier.

Ainsi : $mn = 3p7q = 21(pq)$. Autrement dit mn est un multiple de 21.

Nous avons démontré que quelque soient m et n des multiples respectivement de 3 et 7, mn est un multiple de 21.

EXERCICE 552. Démontrez que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Exercice 526. L'astuce dans cet exercice consiste à remarquer que trois entiers consécutifs peuvent s'écrire n , $n + 1$ et $n + 2$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Démontrons que $n + (n + 1) + (n + 2)$ est un multiple de 3.

$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3n + 3 \times 1 = 3(n + 1)$. Ainsi $n + (n + 1) + (n + 2)$ est un multiple de 3.

Nous avons démontré que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

EXERCICE 553. Démontrez que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Exercice 527. Soient $n \in \mathbb{Z}$ un nombre pair et $m \in \mathbb{Z}$ un nombre impair.

Démontrons que $n + m$ est impair.

Puisque n est pair il existe un nombre $p \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = 2p$.

Puisque m est pair il existe un nombre $q \in \mathbb{Z}$ tel que : $m = 2q + 1$. $n + m = 2p + 2q + 1 = 2(p + q) + 1$.

Ainsi $n + m$ est un nombre impair.

Nous avons démontré que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Proposition 72. Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Démonstration. Soit m un nombre impair.

Démontrons que m^2 est impair.

Puisque m est impair il peut s'écrire $m = 2n + 1$ où n est un entier naturel. Donc :
 $m^2 = (2n + 1)^2 = (2n + 1)(2n + 1) = 2n \times 2n + 2n \times 1 + 1 \times 2n + 1 \times 1 = (2n)^2 + 2n + 2n + 1 = 4n^2 + 4n + 1$ Pour s'assurer que ce nombre est bien un nombre impair il faut montrer qu'il est possible de l'écrire sous la forme $2p + 1$. $m^2 = 2 \times 2n^2 + 2 \times 2n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.

Nous avons démontré que quelque soit le nombre impair m , m^2 est aussi un nombre impair.

EXERCICE 554. Démontrez que le cube d'un nombre impair est un nombre impair.

Exercice 528. Ce résultat peut être justifié par les résultats obtenus dans les exercices précédents.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ un nombre impair.

Démontrons que n^3 est impair.

Puisque n est impair il existe un nombre $q \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = 2q + 1$. $n^3 = (2q + 1)^3 = (2q + 1)(2q + 1)(2q + 1) = [2q \times 2q + 2q \times 1 + 1 \times 2q + 1 \times 1](2q + 1) = [4q^2 + 4q + 1](2q + 1) = 4q^2 \times 2q + 4q^2 \times 1 + 4q \times 2q + 4q \times 1 + 1 \times 2q + 1 \times 1 = 8q^3 + 4q^2 + 8q^2 + 4q + 2q + 1 = 8q^3 + 12q^2 + 6q + 1 = 2[4q^3 + 6q^2 + 3q] + 1$.
Ainsi n^3 est un nombre impair.

Le cube d'un nombre impair est forcément un nombre impair.

EXERCICE 555. Démontrez que l'ensemble des multiples de 6 est inclus dans l'ensemble des multiples de 3.

Exercice 529. Démontrons que l'ensemble I_6 des multiples de 6 est inclus dans l'ensemble I_3 des multiples de 3.

Soit $n \in I_6$. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6q$. Et donc $n = 3 \times 2q$. Autrement dit n est un multiple de 3 et donc $n \in I_3$.

$$I_6 \subset I_3.$$

Raisonnement par l'absurde.

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer vrai un énoncé que l'on sait faux et, à force de raisonnements, montrer que cette supposition conduit à une incohérence. Le procédé rhétorique similaire est appelé *reductio ad absurdum*.

Démontrer par l'absurde que : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Démontrer par l'absurde que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Proposition 73. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Si p^2 est pair alors p est pair.

Démonstration.

Il s'agit de la contraposée de l'affirmation : « si $p \in \mathbb{Z}$ est impair alors p^2 est impair ».

Proposition 74. Démontrez en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration. Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

Il faut interpréter ceci en utilisant la définition du nombre rationnel.

Il existe donc des entiers naturels p et q avec q non nul tels que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Montrons que p et q sont des nombres pairs.

* Donc, en multipliant par q de part et d'autre dans l'égalité : $q\sqrt{2} = p$.

Nous allons nous ramener à l'arithmétique en utilisant des entiers naturels.

$$(q\sqrt{2})^2 = p^2$$

nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})^2 q^2 &= p^2 \\ 2q^2 &= p^2\end{aligned}$$

Donc p^2 est pair et, d'après le lemme p est donc pair.

* Puisque p est pair il existe k tel que $p = 2k$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}2q^2 &= (2k)^2 \\ 2q^2 &= 4k^2 \\ q^2 &= 2k^2\end{aligned}$$

Donc q^2 est pair et d'après le lemme q aussi est pair.

Nous avons obtenus ici une incohérence.

Si p et q sont pairs c'est qu'ils ont un diviseur commun : 2. La fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible ce qui contredit notre hypothèse.

Nous avons démontré, en raisonnant par l'absurde, que nécessairement, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercices.

EXERCICE 556. Une crèche dispose de 60 dalles carrées en mousse. Le personnel souhaite les placer de façon à former un rectangle.

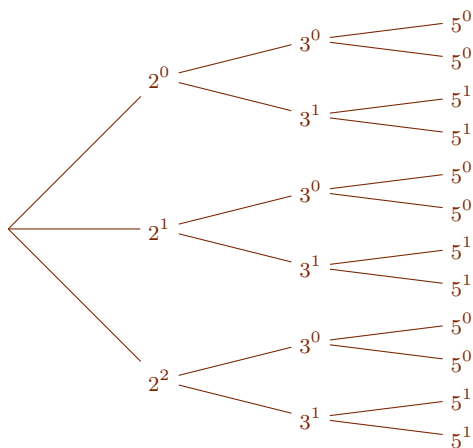
1. Quelles sont les dimensions possibles de ce rectangle ?
2. Quel est celui qui a le plus grand périmètre ?

Exercice 530.

1. Nous recherchons des rectangles dont l'aire vaut exactement 60, dont les longueurs des côtés sont des entiers.

Déterminons tous les diviseurs de 60.

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5.$$



EXERCICE 557. Sachant que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, démontrez en raisonnant par l'absurde que :

1. $5\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
2. $3 + \sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
3. $\sqrt{\sqrt{2}}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 531.

1. **Démontrons en raisonnant par l'absurde l'irrationalité de $5\sqrt{2}$.**

Supposons que $5\sqrt{2}$ soit rationnel et démontrons que cela conduit à une contradiction.

Dire que $5\sqrt{2}$ est rationnel signifie qu'il existe un entier a et un entier b non nul tel que :

$$5\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{5} = \frac{\frac{a}{b}}{5} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{\frac{a}{b}}{5} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{5b}. 5b \text{ étant un entier } \frac{a}{5b} \text{ est une}$$

fraction et donc $\sqrt{2}$ serait un rationnel. C'est impossible puisque nous avons déjà démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Nous avons démontré par l'absurde que $5\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. **Démontrons en raisonnant par l'absurde que $3 + \sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.**

Supposons que $3 + \sqrt{2}$ est rationnel et vérifions que cela conduit à une contradiction.

Dire que $3 + \sqrt{2}$ est rationnel signifie qu'il existe un entier a et un entier b non nul tel que :

$$3 + \sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 3 + \sqrt{2} - 3 = \frac{a}{b} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} - \frac{3}{1} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} - \frac{3 \times b}{1 \times b} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} - \frac{3b}{b} \Leftrightarrow$$

$\sqrt{2} = \frac{a-3b}{b}$. $a - 3b$ étant un entier $\frac{a-3b}{b}$ est une fraction et donc $\sqrt{2}$ serait un rationnel. C'est impossible puisque nous avons déjà démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Nous avons démontré par l'absurde que $3 + \sqrt{2}$ est irrationnel.

3. **Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{\sqrt{2}}$ est un nombre irrationnel.**

Supposons que $\sqrt{\sqrt{2}}$ est rationnel et vérifions que cela conduit à une contradiction.

Dire que $\sqrt{\sqrt{2}}$ est rationnel signifie qu'il existe un entier a et un entier b non nul tel que : $\sqrt{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$ donc en élevant au carré nous obtiendrons successivement : $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a^2}{b^2}$.

a^2 et b^2 étant des entiers $\frac{a^2}{b^2}$ est une fraction et donc $\sqrt{2}$ serait un rationnel. C'est impossible puisque nous avons déjà démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Nous avons démontré par l'absurde que $\sqrt{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

EXERCICE 558. Lors d'un tournoi il y a 80 hommes et 60 femmes inscrits. L'organisation veut constituer un maximum d'équipes mixtes contenant toutes le même nombre d'hommes que de femmes. Combien d'équipes peuvent-elles être constituées ?

Exercice 532. $80 = 2^4 \times 5$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ donc $2^2 \times 5 = 20$ équipes formées de $2^2 = 4$ hommes et 3 femmes.

EXERCICE 559.

1. Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne d'un entier par 3 ?
2. Justifier que tout entier naturel a peut s'écrire, soit $a = 3q$, soit $a = 3q + 1$, soit $a = 3q + 2$, avec q un entier naturel.

EXERCICE 560.

1. $\{0; 1; 2\}$.
2. Découle de la précédente.

EXERCICE 561. Déterminez un nombre entier compris entre 600 et 800, qui est pair, divisible par 11 et multiple de 3 et de 5.

Exercice 533. $600 \leq n \times 11 \times 3 \times 5 \leq 800$ donc $\frac{600}{11 \times 3 \times 5} \leq n \leq \frac{800}{11 \times 3 \times 5}$. Or $\frac{600}{11 \times 3 \times 5} \approx 3,6$ et $\frac{800}{11 \times 3 \times 5} \approx 4,9$ donc nécessairement $n = 4$ et le nombre cherché est 660.

EXERCICE 562. Montrez que le produit de deux nombres entiers consécutifs est un nombre pair.

Exercice 534. Parmi les deux nombres consécutifs l'un est nécessairement pair.

EXERCICE 563. Soient les nombres $a = 4p$ et $b = 5q$ avec p et q des entiers.

1. Justifiez que a est pair.
2. b peut-il être pair ?
3. Soit $c = ab$. Montrer que c est un multiple de 10.

Exercice 535.

1. $a = 4p = 2 \times 2p$ et $2p \in \mathbb{Z}$ donc a est pair.
2. b peut être pair : il suffit que q le soit.
3. $c = ab = 4p \times q = 2 \times 2p \times 5 \times q = 10 \times 2pq$.

EXERCICE 564. En utilisant la méthode du crible d'Ératosthène nous allons retrouver tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100.

1. Écrivez la liste des entiers naturels de 2 jusqu'à 100.
2. Hormis 2 aucun multiple de 2 n'est un nombre premier. Entourez 2 et barrez ses autres multiples.
3. Hormis 3 aucun multiple de 3 n'est un nombre premier. Entourez 3 et barrez ses autres multiples.
4. 4 étant barré entourez 5. Hormis 5 aucun multiple de 5 n'est un nombre premier. Barrez les multiples 5 autres que 5.
5. Poursuivez ainsi jusqu'à ce que tous les nombres soient barrés ou entourés.
6. Donnez la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 100.

Exercice 536. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, et 97.

EXERCICE 565.

1. On a mesuré une durée de 92 647 secondes.
 - (a) Combien d'heures entières sont contenues dans 92 647 secondes ? Combien de secondes reste-t-il à exprimer en minutes et secondes ?
 - (b) Écrire 92 647 secondes en heures, minutes, secondes.
2. Écrire en Python un algorithme qui convertit un nombre n de secondes en heures, minutes et secondes.

Exercice 537.

1. (a) $92\,647 = 25 \times 3600 + 2647$
(b) $2647 = 44 \times 60 + 7$.
2. Écrire en Python un algorithme qui convertit un nombre n de secondes en heures, minutes et secondes. $92\,647 \text{ s} = 25 \text{ h} + 44 \text{ min} + 7 \text{ s}$.

EXERCICE 566. On considère un entier naturel n . Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- a) Si n est un carré parfait (c'est-à-dire s'il existe un entier k tel que $n = k^2$), alors n admet un nombre impair de diviseurs positifs.
- b) Si n admet un nombre impair de diviseurs positifs, alors n est un carré parfait.

Exercice 538.

- a) « Si n est un carré parfait (c'est-à-dire s'il existe un entier k tel que $n = k^2$), alors n admet un nombre impair de diviseurs positifs. » est vraie. Si α est un facteur premier de k de multiplicité h alors α est un facteur premier de n de multiplicité $2h$. Ainsi le facteur premier α dans l'arbre des diviseurs de n correspond à $2h + 1$ embranchement. En généralisant : le nombre de diviseurs de n est une produit de nombres tous impairs donc est impair.
- b) « Si n admet un nombre impair de diviseurs positifs, alors n est un carré parfait. » vraie pour la même raison.

Intuitivement : les diviseurs s'obtiennent par paires. Pour 12 : (1; 12), (2; 6), (3; 4). Pour 9 : (1; 9) et (3; 3) mais pour le dernier couple on a deux fois le même diviseur.

EXERCICE 567.

EXERCICE 568.

1. Soit n un entier naturel non nul et $p = (n + 1)(n + 3)$. Montrez que p n'est pas premier.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2 et $q = (n - 1)(n^2 + 7)$. Pour quelles valeurs de n l'entier q est-il premier ?

EXERCICE 569.

Exercice 55 page 51 du manuel Déclic.

EXERCICE 570. Discutez de la véracité des propositions suivantes.

1. Tout nombre entier strictement positif a un nombre pair de diviseurs.
2. Il y a plus de nombres premiers entre 20 et 30 qu'entre 40 et 50.
3. Un diviseur d'un nombre premier est forcément premier.
4. Si le carré d'un entier a est un diviseur de l'entier naturel n , alors a est un diviseur de $\sqrt{n}$.
5. Si l'entier a est un diviseur de l'entier b et s'il est aussi un diviseur de l'entier c , alors a^2 est un diviseur du produit bc .

EXERCICE 571. Discutez de la véracité des propositions suivantes.

1. Si a est un diviseur n alors il existe un diviseur b de n tel que $ab = n$. Un entier a donc toujours un nombre pair de diviseurs.
2. Puisque $25 = 3 \times 7 + 4$ le quotient de la division euclidienne de 25 par 3 est 7.
3. Si un entier naturel n est premier, alors $n + 1$ n'est pas premier.
4. Si un entier naturel n n'est pas premier, alors $n + 1$ est premier.
5. Le quotient de deux nombres rationnels non nul est un nombre rationnel.
6. La somme de deux nombre irrationnels est un nombre irrationnel.
7. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
8. Le carré d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

EXERCICE 572. Un distributeur de billets délivre des billets de 10 €, 20 € et 50 €. Nous souhaitons le programmer pour qu'il délivre le moins de billets possible à chaque demande d'un utilisateur.

1. Un utilisateur veut retirer 720 €. Quels billets le distributeur devra-t-il délivrer ? Et s'il demande 460 € ?
2. Expliquez en langage naturel comment déterminer le nombre de billets de chaque type pour une demande d'un montant S en €, où S est un multiple de 10 non nul.

EXERCICE 573. Un entier naturel de trois chiffres commence par 3 et se termine par 4. Le chiffre des dizaines est effacé : $3 \dots 4$. Peut-on trouver ce nombre si l'on sait qu'il est divisible par 9 ? 3 ? 4 ? 2 ? 5 ?

EXERCICE 574. Nous allons démontrer en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel. Nous supposons donc que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, avec p et q des entiers naturels premiers entre eux et q non nuls.

1. Montrez que $p^2 = 3qq^2$.
2. Nous allons dans cette question démontrer que si 3 est un diviseur de p^2 alors il est aussi diviseur de p . Pour cela nous en raisonnerons à nouveau par l'absurde.
 - (a) Supposons que 3 n'est pas un diviseur de p . Montrez qu'alors le nombre p peut s'écrire, soit sous la forme $3k + 1$ soit sous la forme $3k + 2$, avec k entier.
 - (b) Si $p = 3k + 1$ montrez que cela abouti à une contradiction.
 - (c) Faites de même si $p = 3k + 2$.
 - (d) Concluez.
3.
 - (a) Déduisez-en qu'il existe un entier naturel a tel que $q^2 = 3a^2$.
 - (b) En utilisant le résultat de la question 2. montrez qu'alors 3 est un diviseur de q .
 - (c) Concluez quand à l'irrationalité de $\sqrt{3}$.

EXERCICE 575.

Un entier est appelé un carré parfait s'il est le carré d'un autre entier.

Démontrez l'équivalence suivante pour tout entier naturel n : « $\sqrt{n}$ est un entier si et seulement si n est un carré parfait ».

EXERCICE 576.

À la fin du trimestre le professeur fait des moyennes. Ses élèves avaient 12 notes. Les moyennes sont inscrites sur le cahier de notes arrondies au $\frac{1}{2}$ point supérieur. le professeur ne veut pas faire de divisions (surtout s'il a beaucoup d'élèves) et il n'a pas de machine : il se fabrique alors une table de multiplication par 12

1	12
2	24
3	36
...	...

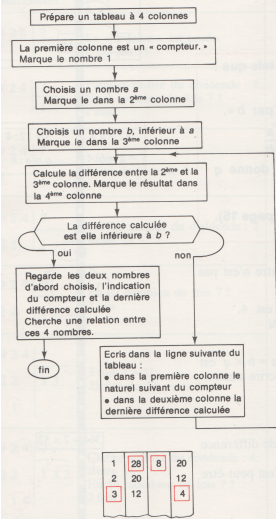
Complète cette table.

Dis comment le professeur peut faire pour trouver alors les moyennes de :

- France qui a 193 points,
- Georges qui a 157 points,
- Laurence qui a 106 points,
- Lucien qui a 52 points.

EXERCICE 577.

12. Voici un organigramme.
Après l'avoir lu et compris, fais-le fonctionner
comme dans l'exemple donné sous l'organigramme
(avec deux nombres de ton choix).
Quelle opération penses-tu avoir réalisée à partir des
deux nombres choisis ?



EXERCICE 578.

- Calculer la circonférence de cette roue en cm (arrondie au millimètre).
- La voiture roule à 110 km.h^{-1} .
 - Calculer le nombre de tours par seconde que fait la roue (au tour près).
 - La caméra utilisée a une vitesse de défilement de 24 images par seconde.
Combien de tours aura fait le pneu de la voiture entre deux images ?
- À quelle vitesse, en km/h, devrait rouler la voiture pour que, regardant le film, on ait l'impression que les roues ne tournent pas ?

Exercice 539.

- Calculons la circonférence, c , de la roue.
Si r désigne le rayon de la roue et d son diamètre alors

$$\begin{aligned}
 c &= 2\pi r \\
 &= 2\pi \frac{d}{2} \\
 &= 2\pi \times \frac{54}{2} \text{ cm} \\
 &= 54\pi \text{ cm} \\
 &\approx 169,64 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

La circonférence de la roue est de 169,4 cm.

- Déterminons le nombre de tour par seconde.
Exprimons la vitesse, v du véhicule, en mètre par seconde.

$$\begin{aligned}
v &= 110 \text{ km/h} \\
&= 110 \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} \\
&= 110 \frac{1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} \\
&= 110 \cdot \frac{1000}{60 \times 60} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
&= \frac{275}{9} \text{ m/s} \\
&\approx 30,556 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

Par conséquent en 1 s le nombre de tours effectué par la roue est

$$\begin{aligned}
\frac{v}{c} &\approx \frac{30,556 \text{ m/s}}{169,4 \text{ cm}} \\
&\approx \frac{30,556 \text{ m/s}}{169,4 \times 1 \text{ cm}} \\
&\approx \frac{30,556 \text{ m/s}}{169,4 \times 0,01 \text{ m}} \\
&\approx \frac{30,556}{169,4 \times 0,01} \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m}} \\
&\approx 18,037 \text{ s}^{-1}
\end{aligned}$$

Nous pourrions aussi bien utiliser l'unité de fréquence le hertz : Hz.

La roue fait 18 tours par seconde.

- (b) Déterminons le nombre de tours de roue, N_t , par image.

$$\begin{aligned}
N_t &= \frac{18}{24} \\
&= \frac{3}{4} \\
&= 0,75
\end{aligned}$$

Entre deux images le pneu aura fait les $\frac{3}{4}$ d'un tour.

3. Déterminons, par exemple, la vitesse v_1 pour qu'entre deux images la roue ait fait un tour. Autrement dit la roue fait 24 tours par seconde, ce qui correspond à une vitesse de :

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{24 \times c}{1 \text{ s}} \\
&\approx \frac{24 \times 169,4 \text{ cm}}{1 \text{ s}} \\
&\approx \frac{24 \times 169,4}{1} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\
&\approx 4065,6 \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ s}} \\
&\approx 4065,6 \frac{0,00001 \text{ km}}{\frac{1}{60 \times 60} \text{ h}} \\
&\approx 4065,6 \times 60 \times 60 \times 0,00001 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\
&\approx 146,3616 \text{ km/h}
\end{aligned}$$

Du fait de la forme de la roue qui a 5 rayons il suffit que la roue effectue de un quatre cinquième d'un tour pour que nous ayons l'impression d'immobilité.

Ainsi les vitesses

$$v_{\frac{1}{5}} \approx 29,27 \text{ km/h}$$

$$v_{\frac{2}{5}} \approx 58,54 \text{ km/h}$$

$$v_{\frac{3}{5}} \approx 87,82 \text{ km/h}$$

$$v_{\frac{4}{5}} \approx 117,01 \text{ km/h}$$

conviennent également (en se limitant aux vitesses autorisées par le code de la route).

Pour avoir l'impression que les roues ne tournent pas il faudrait que le véhicule roule à une vitesse multiple de 29,27 km/h.

EXERCICE 579.

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.

1. Affirmation : « 117 est un nombre premier. »
2. Affirmation : « Pour n'importe quel nombre entier n , $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 8. »

Exercice 540.

1. $1 + 1 + 7 = 9$ et 9 est divisible par 3, donc 117 est divisible par 3.

L'affirmation 1 est fausse.

- 2.

$$\begin{aligned}(n+2)^2 - (n-2)^2 &= [(n+2) - (n-2)] \times [(n+2) + (n-2)] \\ &= 4[2n] \\ &= 8n\end{aligned}$$

L'affirmation 2.(a) est vraie.

EXERCICE 580.

Démontrez que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal en raisonnant par l'absurde.

Indication. Dire qu'une nombre est décimal cela signifie que nous pouvons l'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 581.

Démontrez que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

Indication. Considérez le produit de tous les nombres premiers augmenté de 1.

EXERCICE 582.

Écriture décimale périodique et rationalité.

1. Écriture décimale.

Le nombre $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ n'est pas un nombre décimal mais on peut écrire son développement décimal illimité sous la forme $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$.

(a) Posez la division euclidienne de 14 par 11 et de 1 427 par 333.

(b) Qu'observez-vous ?

(c) Écrivez le développement décimal illimité de chacun des quotients $\frac{14}{11}$ et $\frac{1427}{333}$.

- (d) i. Quelles valeurs peuvent prendre les restes dans une division par 11 ?
Comment alors pouvez-vous expliquer cette périodicité dans la partie décimale de $\frac{14}{11}$?
- ii. Quelles valeurs peuvent prendre les restes dans une division par 333 ?
Comment alors pouvez-vous expliquer cette périodicité dans la partie décimale de $\frac{1427}{333}$?
- iii. De manière plus générale, que pouvez-vous dire du développement décimal d'un nombre rationnel ?
2. Nous savons à partir de l'écriture fractionnaire d'un nombre rationnel déterminer son développement décimal. Dans cette partie, nous chercherons sur des exemples, une écriture fractionnaire d'un nombre rationnel écrit sous la forme d'un développement décimal périodique.
- (a) Considérons le nombre $x = 1,\overline{8}$.
Calculez $10x - x$ et concluez.
- (b) Adaptez la méthode afin de déterminer une écriture fractionnaire de $y = 1,\overline{58}$ puis de $z = 4,23\overline{569}$.
- (c) Montrez que $0,\overline{9} = 1$.
Le résultat de cette question est surprenant : le développement décimal illimité de certains nombres n'est pas forcément unique.

EXERCICE 583.

Algorithme d'Euclide pour déterminer le P.G.C.D. de deux entiers naturels.

EXERCICE 584.

Écriture décimale et divisibilité

EXERCICE 585.

Polynôme d'Euler.