

1. Valeurs approchées, encadrements.

1 Encadrements.

Définition 1. Soit x un nombre réel. Réaliser *un encadrement* de x , c'est trouver deux réels a et b tels que $a \leq x \leq b$.

Remarques.

1. $b - a$ est l'*amplitude* de l'encadrement.

Exemples.

1. $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ est encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 1.
2. $3,14 \leq \pi \leq 3,15$ est un encadrement de π d'amplitude 10^{-2} .

Définition 2. Soit x un nombre réel. On appelle *majorant* de x tout nombre a tel que $x \leq a$. On appelle *minorant* de x tout nombre réel b tel que $b \leq x$. On appelle *encadrement* de x la donnée d'un minorant et d'un majorant de x : $b \leq x \leq a$.

Exemples.

1. -4 est un minorant de 10^3 .
2. -4 est un majorant de -10 .
3. -12 et 3 forment un encadrement de -7 : $-12 \leq -7 \leq 3$.
4. On utilise notamment les encadrement pour les nombres irrationnels dont il est impossible de donner une valeur exacte. Considérons $\sqrt{2}$. Les nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre (croissance de la fonction racine carrée) : or $1^2 \leq \sqrt{2}^2 \leq 2^2$ donc $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$. Puis on réitère : $1,4^2 = 1,96$ et $1,5^2 = 2,25$ donc $1,4^2 \leq 2 \leq 2,25$ et donc $1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$. En itérant (un programme informatique) on peut obtenir un encadrement très précis de $\sqrt{2}$.

Remarques.

1. Selon les situations on pourra considérer des encadrements avec des inégalités strictes ou larges.

2 Règle de manipulations des encadrements.

Proposition 1. Soient a, b, x, a', b' et y des réels.

- (i) Si $a \leq x \leq b$ et $a' \leq y \leq b'$ alors $a + a' \leq x + y \leq b + b'$.
- (ii) Si $0 < a \leq x \leq b$ et $0 < b \leq y \leq b'$ alors $0 < aa' \leq xy \leq bb'$.

Démonstration. Découle des règles sur les inégalités.

Remarques.

1. Autrement dit on peut additionner membre à membre les encadrements mais pour la multiplication il faut travailler avec des nombres strictement positifs.
2. Il y a des résultats semblables avec des encadrements mêlant inégalités strictes et larges. Il faut prendre le temps de réfléchir et trouver si la valeur à la borne doit être exclue.
3. Les produits membres à membres d'inégalités ne sont possibles que si les nombres sont strictement positifs (confer exemples).
4. Les réciproques sont fausses.

Exemples.

1. Contre-exemples de produits avec nombres négatifs : $-3 \leq -2 \leq -1$ et $-4 \leq -3 \leq -2$ mais $-3 \times (-4) > (-2) \times (-3) > -1 \times (-2)$, $-1 \leq 0 \leq 1$ et $-2 \leq -1 \leq 0$ mais $-1 \times (-2) \not\leq 0 \times (-1) \leq 1 \times 0$.
2. Encadrer $u + v$ et uv sachant que $1 \leq u \leq 12$ et $5 \leq v \leq 7$: $6 \leq u + v \leq 19$ et $5 \leq uv \leq 84$.
3. Encadre $\frac{u}{v}$ sachant que : $-1,120 < u < -1,118$ et $-4,111 < v < -4,110$. On a $\frac{u}{v} = \frac{-u}{-v}$ et $1,118 < -u < 1,120$ et $4,110 < v < 4,111$. Par stricte décroissance de la fonction inverse sur les positifs : $\frac{1}{4,111} < \frac{1}{-v} < \frac{1}{4,110}$. On en déduit : $\frac{1,118}{4,111} < \frac{u}{v} < \frac{1,120}{4,110}$.

EXERCICE 1. Encadrez $\sqrt{7}$ par des décimaux dont la différence est 0,01.

Exercice 1. On peut le faire en obtenant une valeur approchée à la calculatrice. Développons une autre approche.

$7 = 70000 \times 10^{-4}$. Avec un programme Python :

```
def seuil():
    n=1
    while n**2<70000:
        n=n+1
    return n
```

on obtient 265. Donc : $264^2 < 70000 \leq 265^2$. La fonction racine carrée étant strictement croissante : $\sqrt{264^2} < \sqrt{70000} \leq \sqrt{265^2}$. Autrement dit : $2,64 < \sqrt{7} \leq 2,65$.

EXERCICE 2. Encadrez $\frac{x}{1-2x}$ sachant que $0,252 < x < 0,253$.

Exercice 2. $0,252 < x < 0,253$ donc $1-2 \times 0,252 > 1-2x > 1-2 \times 0,253$ i.e. $0,496 > 1-2x > 0,494$. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0, +\infty[$: $\frac{1}{0,496} < \frac{1}{1-2x} < \frac{1}{0,494}$. De l'encadrement donné et de celui trouvé, et puisque qu'il ne s'agit que de valeurs positives, en faisant un produit membre à membre : $\frac{0,252}{0,496} < \frac{x}{1-2x} < \frac{0,253}{0,494}$.

EXERCICE 3. Soit x un réel. On pose $a = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $b = \frac{2x}{1+x^2}$. Prouvez que a , b et $a^2 - b^2$ quel que soit x , admettent -1 pour minorant et 1 pour majorant.

Exercice 3.

* Quand on ne voit pas d'où vient un minorant (ou une inégalité) on peut raisonner par analyse-synthèse en supposant que nous avons effectivement l'inégalité désirée. Puis nous cherchons comment l'exprimer autrement, ou quelles en sont les conséquences. Supposons que nous ayons $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2}$ alors $-1 - x^2 \leq 1 - x^2$ et donc $-1 \leq 1$ ce qui est évidemment vrai. Nous ne présentons que la partie synthèse du raisonnement.

$-1 \leq 1$ donc $-1 - x^2 \leq 1 - x^2$ d'où $-1(1+x^2) \leq 1 - x^2$, et puisque $1+x^2 > 0$, $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

$-x^2 \leq x^2$ donc $1 - x^2 \leq 1 + x^2$ et puisque $1+x^2 > 0$, $\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$.

* De $(x-1)^2 \geq 0$ on déduit $1+x^2 \geq 2x$ et donc $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$. De même avec $(x+1)^2 \geq 0$ on obtient $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2}$.

* De $-1 \leq a \leq 1$ on déduit $0 \leq a^2 \leq 1$ et, de même, $-1 \leq -b^2 \leq 0$. En sommant les encadrements : $-1 \leq a^2 - b^2 \leq 1$.

EXERCICE 4. a et b sont deux réels tels que $1,73 \leq a \leq 1,75$ et $1,46 \leq b \leq 1,50$.
Donnez un encadrement pour chacun des nombres.

- a) $-2a + 5$. b) a^2 . c) $3a^2 - 2a + 5$. d) $-b$.
e) $a - b$. f) $\frac{1}{b}$. g) $\frac{a}{b}$.

Exercice 4.

a) $-2 \times 1,75 + 5 \leq -2a + 5 \leq -2 \times 1,73$.

b) $1,73^2 \leq a^2 \leq 1,75^2$.

c) Avec la question précédente : $3 \times 1,73^2 \leq 3 \times a^2 \leq 3 \times 1,75^2$.
 $-2 \times 1,75 \leq -2a \leq -2 \times 1,73$.

En sommant les encadrements : $3a^2 - 2a + 5$. $3 \times 1,73^2 - 2 \times 1,75 + 5 \leq 3 \times a^2 - 2a + 5 \leq 3 \times 1,75^2 - 2 \times 1,73 + 5$.

d) $-1,5 \leq -b \leq -1,46$.

e) $1,73 - 1,5 \leq a - b \leq 1,75 - 1,46$.

f) $\frac{1}{1,5} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{1,46}$.

g) Tous les nombres étant positifs ont peut multiplier membre à membre : $\frac{1,73}{1,5} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1,75}{1,46}$.

EXERCICE 5. Le nombre x appartient à l'intervalle I . Déterminez à quel intervalle appartient chacun des nombres A , B et C donnés en fonction de x .

a) $I = [-1; 3]$. $A(x) = 2x - 5$. $B(x) = -2x + 1$. $C(x) = |2x + 3|$.

b) $I = [1; 3]$. $A(x) = -2x + 7$. $B(x) = x^2$. $C(x) = (x + 4)^2$.

c) $I = [-1; 4]$. $A(x) = x^2$. $B(x) = 2x + 5$. $C(x) = (x + 4)^2$.

d) $I = [-4; 2]$. $A(x) = -2x + 3$. $B(x) = -2x^2$.

e) $I = [-4; 2]$. $A(x) = 3x - 2x^2$. $B(x) = |3x - 2x^2|$.

Exercice 5.

a) $A(x) \in [2 \times (-1) - 5; 2 \times 3 - 5]$. $B(x) \in [-2 \times 3 + 1; -2 \times (-1) + 1]$. $C(x) \in [0; |2 \times (-1) + 3|] \cup [0; |2 \times 3 + 3|] = [0; 9]$.

b) $A(3) \leq A(x) \leq A(1)$. $B(1) \leq B(x) \leq B(3)$. $C(1) \leq C(x) \leq C(3)$.

c) $I = [-1; 4]$. $0 \leq A(x) \leq 4^2$. $B(-1) \leq B(x) \leq B(4)$. $C(-1) \leq C(x) \leq C(4)$.

d) $A(2) \leq A(x) \leq A(-4)$. $B(2) \leq B(x) \leq B(-4)$.

e) $I = [-4; 2]$. $3 \times (-4) - 2 \times 2^2 \leq 3x - 2x^2 \leq 3 \times 2 - 2 \times (-4)^2$. $B(x) \in [0; \max(A(-4); A(2))]$.

EXERCICE 6. On donne deux nombres x et y et les intervalles auxquels ils appartiennent. Déterminez les intervalles correspondants auxquels appartiennent les nombres donnés.

a) $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$, $y \in \left[5, \frac{11}{2}\right]$, $A = x + y$, $B = x - y$, $C = xy$.

b) $x \in [-1; 2]$, $y \in \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right]$, $A = 2x + y$, $B = x - 2y$, $C = xy$.

c) $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$, $y \in \left[-\frac{17}{4}, -\frac{1}{3}\right]$, $A = x^2$, $B = y^2$, $C = x^2 + y^2$, $D = x^2 - y^2$, $E = xy$.

d) $x \in [-0,2; 2,3]$ et $y \in [1,3; 2,4]$, $A = x^2$, $B = y^2$, $C = xy$, $D = x^2 + y^2$,
 $E = (x + y)^2$.

Exercice 6.

- a) $\frac{1}{2} + 5 \leq A \leq \frac{7}{2} + \frac{11}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{11}{2} \leq B \leq \frac{7}{2} - 5$, $\frac{1}{2} \times 5 \leq C \leq \frac{7}{2} \times \frac{11}{2}$.
- b) $-2 \times (-1) + \frac{5}{3} \leq A \leq 2 \times 2 + \frac{5}{2}$, $-1 - 2 \times \frac{5}{2} \leq B \leq 2 - 2 \times \frac{2}{3}$, $C = xy$.
- c) $(\frac{1}{2})^2 \leq A \leq (\frac{5}{2})^2$, $(-\frac{1}{3})^2 \leq B \leq (-\frac{17}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{3})^2 \leq C \leq (\frac{5}{2})^2 + (-\frac{17}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2 - (-\frac{17}{4})^2 \leq D \leq (\frac{5}{2})^2 - (-\frac{1}{3})^2$, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \leq -E \leq \frac{5}{2} \times \frac{17}{4}$.
- d) $x \in [-0,2; 2,3]$ et $y \in [1,3; 2,4]$, $0 \leq A \leq 2,3^2$, $1,3^2 \leq B \leq 2,4^2$, $0 \leq C \leq 2,3^2 \times 2,4^2$, $1,3^2 \leq D \leq 2,3^2 + 2,4^2$, $(-0,2 + 1,3)^2 \leq E \leq (2,3 + 2,4)^2$.

3 Valeur absolue.

Confer la leçon sur valeur absolue.

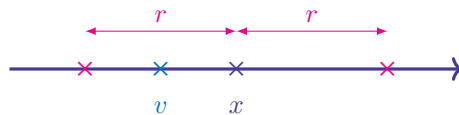
4 Approximation.

Nous allons, en mathématique, être confronté à des nombres qui ne peuvent s'écrire avec une écriture décimale finie ($\sqrt{2}$, π) mais les sciences expérimentales ont besoin d'écritures décimales. Nous sommes donc amenés à donner des valeurs approximatives. Nous allons cependant quantifier notre approximation en disant à quelle distance de la valeur exacte nous nous trouvons.

Définition 3. Soient a , x et ε des réels, ε étant strictement positif. On dit que a est une *valeur approchée* (ou approximation) du nombre x à ε près (ou à la précision ε) lorsque : $|x - a| \leq \varepsilon$.

Remarques.

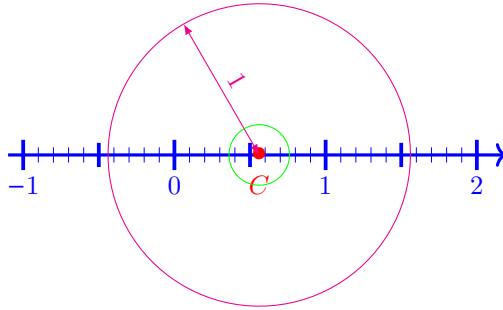
1. Dans la leçon valeur absolue nous avons vu que $|x - a| \leq \varepsilon$ équivaut à $a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$, autrement dit un encadrement de x d'amplitude 2ε . On peut aussi écrire l'inégalité $|x - a| \leq \varepsilon$ sous la forme $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.
2. En interprétant géométriquement : la distance entre a et x doit être inférieure à ε .
3. Donner une valeur approchée sans précision n'a pas de sens ni surtout d'intérêt : tout nombre est une valeur approchée de tout autre nombre. 14 est une valeur approchée de 20 000 000 mais c'est sans intérêt tant cette approximation est grossière. Nous voyons bien sur cet exemple qu'il est vain de parler de valeur approchée si nous ne sommes pas capable de limiter, de quantifier, l'erreur commise.
4. Pour se représenter la situation nous raisonnons géométriquement :



Nous voyons clairement sur le précédent schéma que $a \in [x - \varepsilon; x + \varepsilon]$. ε peut être appelé le *rayon de l'intervalle* (par analogie avec le disque) et $2r$ est alors le diamètre ou l'*amplitude* de l'intervalle (ou de l'encadrement).

Exemples.

1. Pour donner une valeur approchée de 0,561 considérons le point C d'abscisse 0,561.



* Valeurs approchées à 1 près.

Le cercle magenta a un rayon de 1 et est centré sur le point d'abscisse 0,561. Toutes les abscisses des points de l'axe gradué, situés à l'intérieur du cercle, sont des valeurs approchées à 1 unité près de 0,561.

Ainsi : 0, -0,2, 0,5, 1, 0,56, 1,2 et bien sûr, 0,561 lui-même, sont des valeurs approchées de 0,561 à une unité près.

* Valeurs approchées à 0,2 près.

Le cercle vert a un rayon de 0,2 et est centré sur le point d'abscisse 0,561.

Ainsi : 0,4, 0,5, 0,6 et 0,7 sont des valeurs approchées de 0,561 à 0,2 près.

- * Puisque $1,9 \in [2 - 0,5; 2 + 0; 5]$ nous pouvons dire que 1,9 est une valeur approchée de 2 à 0,5 près.

Proposition 2. Soient a, x et b des nombres. Si $a \leq x \leq b$, autrement dit si nous avons un encadrement de x , alors $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près.

Démonstration.

* Si $a \leq x \leq b$ alors $x \in [a, b]$.

* $\frac{a+b}{2}$ est le centre de l'intervalle $[a, b]$ et le rayon de cet intervalle est $\frac{b-a}{2}$ donc

$$[a, b] = \left[\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \right].$$

* Enfin si $x \in \left[\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \right]$ alors $\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}$.

Autrement dit $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près.

Remarques.

1. Ce résultat nous montre comment passer d'un encadrement à une valeur approchée. Mais dans la démonstration nous voyons aussi comment traduire cet encadrement par une appartenance à un intervalle.

Définition 4. Soient a, x et ε des nombres avec $\varepsilon > 0$. Nous dirons que a est une valeur approchée de x à ε près par défaut si $a \leq x \leq a + \varepsilon$. Nous dirons que a est une valeur approchée de x à ε près par excès si $a - \varepsilon \leq x \leq a$.

Remarques.

1. Un procédé simple pour obtenir une valeur approchée à 10^{-n} , avec $n \in \mathbb{N}$, consiste à arrêter son écriture décimale au n -ième chiffre après la virgule. Ce procédé est appelé *troncature*. Tronquer 1,23456 à 10^{-4} donne 1,2345. Tronquer -1,23456 à 10^{-3} donne -1,234.

Exemples.

1. Admettons : $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$. Autrement dit : $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,414 + 0,001$ donc $1,414$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par défaut. Mais aussi : $1,415 - 0,001 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$ donc $1,415$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par excès.

Définition 5. Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{D}$. Nous dirons que v est une valeur arrondie de x à 10^n près si v est une valeur approchée de x à $\frac{1}{2} \times 10^n$ près et si $v \times 10^{-n}$ est un entier.

Remarques.

1. Nous retiendrons que l'arrondie est la plus proche des valeurs approchées par excès et par défaut.

Rappelons qu'un nombre décimal d est un nombre qui peut s'écrire $d = a \times 10^n$ où a et n sont des entiers relatifs.

Dans la pratique (mathématiques appliquées) on ne peut utiliser que des nombres décimaux utilisant peu de chiffres. Avec la calculatrice notamment le nombre de chiffres est très limité. Nous admettrons ce résultat (densité de \mathbb{D} dans \mathbb{R}) : entre deux réels x et x' avec $x < x'$, il existe toujours un nombre décimal d tel que : $x < d < x'$. Ce résultat permet aussi d'affirmer que, pour x un nombre réel, quel que soit la précision $\varepsilon > 0$ choisie, il existe des décimaux d et d' tels que : $x - \varepsilon < d < x < d' < x + \varepsilon$. Autrement dit on peut toujours trouver des valeurs décimales approchées par défaut, d , et par excès, d' , de x , et ce, quelle que soit la précision désirée.

L'écriture scientifique d'un nombre (notation flottante normalisée) est particulièrement adaptée à l'écriture des nombres décimaux.

Exemples.

1. $1\,234,5678 = 1,234\,5678 \times 10^3$.
2. La vitesse de la lumière est de l'ordre de $300\,000$ km/s c'est-à-dire 3×10^8 m \cdot s $^{-1}$.
3. La charge électrique élémentaire est de l'ordre de $1,6 \times 10^{-9}$ C.
4. La distance de la Terre au Soleil est de l'ordre de 15 millions de kilomètres, c'est-à-dire $1,5 \times 10^7$ km où $1,5 \times 10^{10}$ m.

5 Encadrement d'un quotient.

Proposition 3. Soient a et b deux nombres non nuls et de même signe. Si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Démonstration. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$. Or a et b sont de même signe donc $ab > 0$. D'où : $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ est du signe de $b - a$ donc positif.

EXERCICE 7. Déterminez un encadrement de $\frac{1}{x}$ à l'aide de nombres décimaux à une décimale. Dans chaque cas l'encadrement obtenu devra avoir la plus faible amplitude possible.

- | | | |
|--|------------------------------|--|
| a) $1,1 \leq x \leq 1,2$. | b) $-0,3 \leq x \leq -0,2$. | c) $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{3}{4}$. |
| d) $-\frac{11}{18} \leq x \leq -\frac{1}{2}$. | e) $0,47 \leq x \leq 0,51$. | |

Exercice 7.

- a) $\frac{1}{1,1} = 0,90909\dots$ et $\frac{1}{1,2} = 0,8333\dots$ donc $0,8 \leq \frac{1}{x} \leq 1$.
 b) $\frac{1}{0,3} = 3,333\dots$ et $\frac{1}{0,2} = 5$ donc $-5 \leq \frac{1}{x} \leq -3,3$.
 c) $\frac{4}{3} = 1,333\dots$ $1,3 \leq \frac{1}{x} \leq 6$.
 d) $\frac{18}{11} = 1,636363\dots$ donc $-2 \leq \frac{1}{x} \leq -1,63$.
 e) $\frac{11}{0,47} \approx 2,12$ et $\frac{1}{0,51} \approx 1,96$ donc $1,96 \leq \frac{1}{x} \leq 2,13$.

EXERCICE 8. Déterminez un encadrement de $\frac{x}{y}$ à l'aide de nombres décimaux à une décimale. Dans chaque cas l'encadrement obtenu devra avoir la plus faible amplitude possible.

- a) $1,1 \leq x \leq 1,2$ et $0,5 \leq y \leq 0,6$. b) $-2,3 \leq x \leq -2,2$ et $1,3 \leq y \leq 1,4$.
 c) $-0,3 \leq x \leq -0,2$ et $-1,5 \leq y \leq -1,4$. d) $-0,1 \leq x \leq 0,1$ et $0,3 \leq y \leq 0,4$.
 e) $-0,2 \leq x \leq 0$ et $-0,2 \leq y \leq -0,1$.

Exercice 8.

- a) $1,1 \leq x \leq 1,2$ et $0,5 \leq y \leq 0,6$. $\frac{1,1}{0,6} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1,2}{0,5}$. $\frac{1,1}{0,6} = 1,8333\dots$ et $\frac{1,2}{0,5} = 2,4$ donc $1,8 \leq \frac{x}{y} \leq 2,4$.
 b) $-2,3 \leq x \leq -2,2$ et $1,3 \leq y \leq 1,4$. $2,3 \geq -x \geq 2,2$ et $\frac{1}{1,3} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{1,4}$. $\frac{2,3}{1,3} \geq -\frac{x}{y} \geq \frac{2,2}{1,4}$. $\frac{2,3}{1,3} \approx 1,769$
 en tronquant et $\frac{2,2}{1,4} \approx 1,571$ donc $-1,8 \leq \frac{x}{y} \leq -1,5$.
 c) $-0,3 \leq x \leq -0,2$ et $-1,5 \leq y \leq -1,4$. $0,3 \geq -x \geq 0,2$ et $\frac{1}{1,5} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{1,4}$ donc $\frac{0,2}{1,5} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{0,3}{1,4}$.
 $\frac{0,2}{1,5} = 0,1333\dots$ et $\frac{0,3}{1,4} \approx 0,214$ en tronquant donc $0,1 \leq \frac{x}{y} \leq 0,3$.
 d) Si $0 \leq x \leq 0,1$ et $0,3 \leq y \leq 0,4$ alors $\frac{0,1}{0,4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{0,1}{0,3}$ et donc $0 \leq \frac{x}{y} \leq 0,4$.
 Si $-0,1 \leq x \leq 0$ et $0,3 \leq y \leq 0,4$ alors $\frac{0}{0,4} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{0,1}{0,3}$ et donc $0 \geq \frac{x}{y} \geq -0,4$.
 $-0,4 \leq \frac{x}{y} \leq 0,4$.
 e) $-0,2 \leq x \leq 0$ et $-0,2 \leq y \leq -0,1$. $0,2 \geq -x \geq 0$ et $\frac{1}{0,2} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{0,1}$ donc $\frac{0}{0,2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{0,2}{0,1}$ enfin
0leqsant $\frac{x}{y} \leq 2$.

6 Exercices.

EXERCICE 9. Le côté c d'un carré mesure 20 cm à 5 mm près.

1. Encadrez c , puis l'aire a du carré (en cm^2).
2. Si on veut connaître a à 1 cm^2 près avec quelle précision faut-il mesurer c ?

EXERCICE 10.

1. Montrez que, pour tout $x \neq -1$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$.
2. Montrez que pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$, $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 2$. Déduisez-en que, pour $x \geq -\frac{1}{2}$,
 $0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq 2x^2$, puis que $1 - x$ est une valeur approchée de $\frac{1}{1+x}$ par défaut à $2x^2$ près.
3. À l'aide de ce qui précède donnez une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{1,01}$ et de $\frac{1}{0,98}$ en indiquant la précision.

EXERCICE 11. On considère un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers, q étant non nul. Ce nombre a pour valeur approchée par excès à 10^{-3} près 1,118. On sait de plus que $q = 1789$. Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) pour p ?

Exercice 9.

* Interprétons les conditions données par l'énoncé.

— Ce nombre a pour valeur approchée par excès à 1^{-3} près 1,118, donc :

$$1,117 \leq \frac{p}{q} \leq 1,118$$

— On sait de plus que $q = 1789$, donc :

$$1,117 \leq \frac{p}{1789} \leq 1,118$$

De cet encadrement on déduit :

$$1789 \times 1,117 \leq p \leq 1789 \times 1,118$$

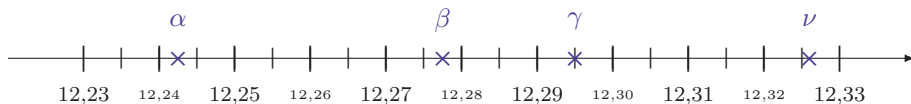
$$1998,313 \leq p \leq 2000,102$$

Et puisque p est un entier :

$$1999 \leq p \leq 2000$$

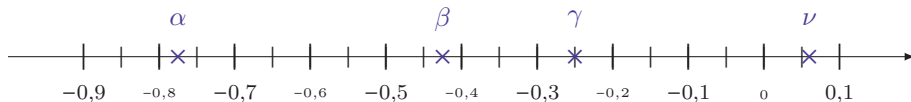
* Réciproquement, si $p = 1999$ (respectivement $p = 2000$), alors $\frac{p}{1789} \approx 1,11738$ (resp. $\frac{p}{1789} \approx 1,11794$). Autrement dit les deux valeurs possibles pour p sont 1999 et 2000.

EXERCICE 12.



Donnez, pour α , β , γ et ν , un encadrement décimal d'amplitude 10^{-2} , des valeurs approchées par excès, par défaut et arrondies à 10^{-2} près.

EXERCICE 13.



Donnez, pour α , β , γ et ν , un encadrement décimal d'amplitude 10^{-1} , des valeurs approchées par excès, par défaut et arrondies à 10^{-1} près.

EXERCICE 14. Donnez un encadrement décimal de $\frac{2}{3}$ à 0,1 près, puis à 0,01 près, puis 0,001 près.

EXERCICE 15. Donnez, avec une précision de 10^{-4} , un encadrement décimal, des valeurs approchées par défaut et par excès et enfin une valeur arrondie de $\frac{11}{7}$.

EXERCICE 16. À l'aide de la calculatrice donnez

- un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-3} ,
- une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} par défaut,
- une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} par excès,
- une valeur arrondie de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} ,
- une valeur arrondie de $-\sqrt{3}$ à 10^{-5} ,
- une valeur arrondie de e à 10^{-4} .

EXERCICE 17. En physique on a mesuré une masse m et on donne comme résultat $m = 11,6$ kg. Le dernier chiffre est en fait inconnu à $\pm 0,5$ kg. Donnez un encadrement de m en kg et précisez son amplitude.

EXERCICE 18. Donnez encadrement, valeurs approchées et arrondie du nombre α avec la précision ε .

a) $\alpha = 857,543, \varepsilon = 10^{-2}$.

b) $\alpha = -3,14159, \varepsilon = 10^{-4}$.

c) $\alpha = \pi + \sqrt{5}, \varepsilon = 0,001$.

d) $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \varepsilon = 0,0001$.

e) $\alpha = 23\,450\,000, \varepsilon = 10^5$.

f) $\alpha = 14, \varepsilon = 10^{-1}$.

EXERCICE 19.

1. À la Grecque. En considérant un disque de rayon 1 cm et des carrés, expliquez l'encadrement $3 < \pi < \frac{22}{7}$.
2. Pour calculer l'air d'un disque, les Égyptiens procèdent ainsi : multiplier le diamètre par 8, diviser par 9 puis élever au carré. Quel résultat obtient-on pour un disque de rayon 1 cm ?
3. Comparer les deux résultats obtenus.

EXERCICE 20. La vitesse d'un satellite qui tourne autour de la Terre sur son orbite circulaire est donnée par la formule :

$$V = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

où R est le rayon de la Terre, g est l'accélération de la pesanteur d'environ $9,81 \text{ m/s}^2$ et h l'altitude du satellite. Calculez la vitesse du satellite en m/s puis en km/h pour une hauteur de 200 km ? de 50 000 km ?

EXERCICE 21. Soit $A(x) = \frac{1}{1+x}$ avec $x \neq -1$.

1. Montrez que $\frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}$.

2. Nous supposons maintenant que $|x| \leq \frac{1}{2}$.

(a) Quel est le signe de $\frac{1}{1+x} - (1-x)$?

(b) Montrez que : si $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ alors $0 < \frac{1}{1+x} \leq 2$.

(c) Déduisez-en successivement que

• $0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq 2x^2$.

• $0 \leq \frac{1}{1+x} - (1-x) \leq 2x^2$.

• $1-x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1-x+2x^2$.

(d) En utilisant le dernier encadrement, donnez un encadrement de chacun des nombres suivants.

a) $\frac{1}{1,1}$.

b) $\frac{1}{1,01}$.

c) $\frac{1}{0,9}$.

d) $\frac{1}{0,99}$.

EXERCICE 22. Donnez l'ensemble des solutions des encadrements suivants.

a) $2 < |x+1| < 3$.

b) $1 < |x-2| \leq \frac{5}{4}$.

EXERCICE 23. Résolvez les inéquations dans \mathbb{R} .

a) $|x + 3| \leq |x - 1|$.

b) $|5 - x| > |1 - x|$.

EXERCICE 24. a et b sont des nombres tels que : $\left|a - \frac{1}{2}\right| < 1$ et $|b - 1| < \frac{1}{2}$.

1. À quels intervalles appartiennent a et b ?

2. Donnez un encadrement de $a + b$, $a - b$ et $a^+ b^2$.

EXERCICE 25. En utilisant l'encadrement : $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, encadrez chacun des nombres suivants : $2 + \sqrt{3}$, $1 - 2\sqrt{3}$, $\frac{2-3\sqrt{3}}{5}$.

EXERCICE 26. En utilisant les encadrements suivants : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, encadrez chacun des nombres suivants : $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$, $\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 27. Encadrez l'aire d'un rectangle dont les dimensions des côtés à la précision d'un millimètre sont 10 cm et 5 cm.

EXERCICE 28. $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, de hauteur $[DH]$. Les mesures à 1 mm près sont $AB = 10,2$ cm, $CD = 6,4$ cm et $DH = 3,1$ cm. Donnez une valeur approchée de l'aire du trapèze.

EXERCICE 29. Le périmètre d'un cercle est compris entre 48 cm et 50 cm. On prend : $3,14 < \pi < 3,15$. Donnez une valeur approchée de son rayon à 0,2 cm près et une valeur approchée de son aire à 10 cm^2 près.

EXERCICE 30. La diagonale d'un carré mesure 1 m à 5 mm près.

1. Donnez une mesure de son côté au demi-centimètre près.

2. Donnez son aire au centimètre carré près.

EXERCICE 31. L'hypoténuse d'un triangle rectangle mesure 0,50 m à 1 mm près et un côté de l'angle droit 0,30 m à 1 mm près.

1. Donnez une mesure de l'autre côté de l'angle droit à 0,5 cm.

2. Donnez son aire au centimètre carré près.

EXERCICE 32. Donnez dans chaque cas un encadrement de $A(x)$ d'après celui de x .

a) $A(x) = (x - 3)(2x - 3)$ lorsque $\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$.

b) $A(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$ lorsque $-1 \leq x < 0$.

c) $A(x) = \frac{2(x^2-2)}{x^2+5}$ lorsque $1 \leq x \leq 2$.

d) $A(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ lorsque $-2 \leq x \leq -1$.