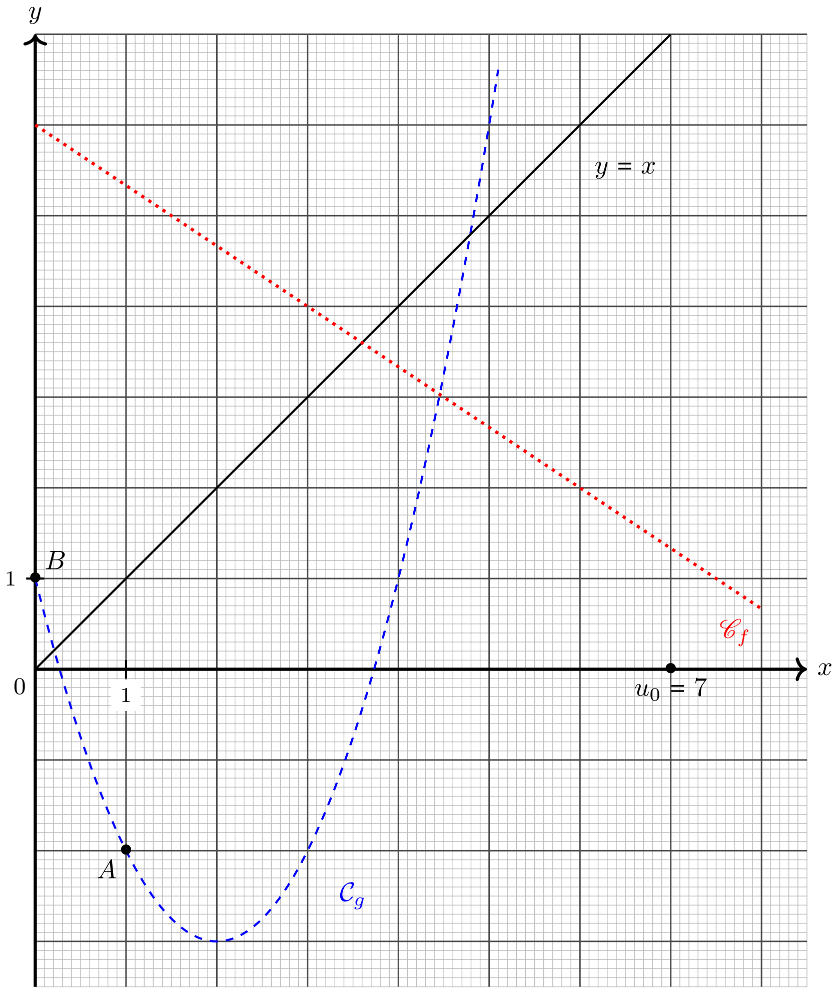
Devoir surveillé du 2022/04/21.

I Exercice. 6,75 points



1. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 7$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction affine dont la représentation graphique, $\mathscr{C}_f$, est dessinée ci-dessus.

   (a) Sans justification donnez l'équation réduite de $\mathscr{C}_f$.

   (b) Dessinez dans le repère les 5 premiers termes de la suite en vous aidant de $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$.

   (c) Déduisez-en une conjecture quand à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On a dessiné ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative d'une fonction polynomiale de degré deux dont le coefficient dominant est 1.

   (a) Sachant que $\mathscr{C}_g$ passe par les points de $A(1,-2)$ et $B(0{,}1)$ déterminez la forme développée de g.

   (b) Déterminez les racines de g.

II Exercice. 3,75 points

On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{\mathrm{e}^{3x}} \end{cases}$.

1. Justifiez que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminez f' sans justifier la dérivabilité et démontrez que, pour tout x réel : $f'(x) = -(6x+1)\mathrm{e}^{-3x}$.
3. Étudiez les variations de f. *Ne calculez pas les images.*

III Exercice. 4 points

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$. Dîtes si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.

1. $u_1 = 2$.
2. $u_2 = 9$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.
5. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = n^2 + 1$.
6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.