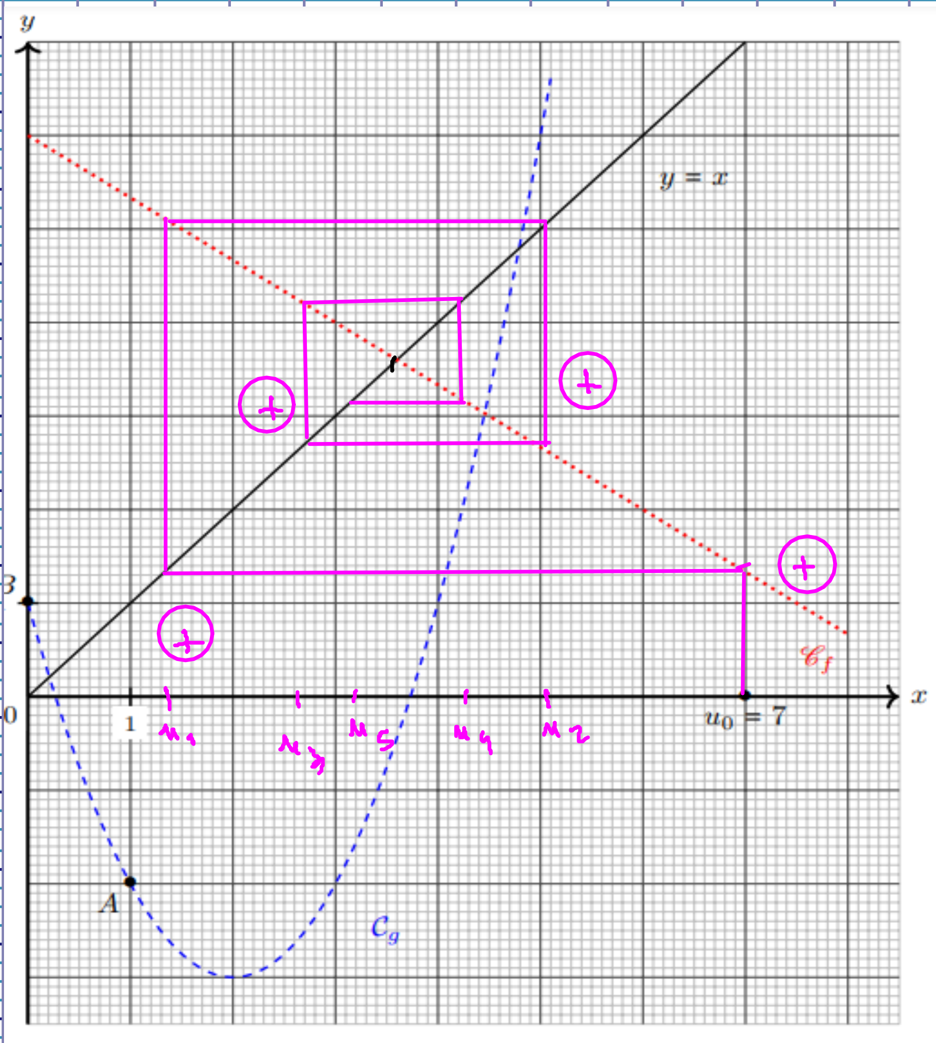
Exercice 1. (18 min)

+ + + 1) a) $\boxed{\mathcal{C}_f \quad y = -\frac{2}{3}x + 6}$

1) b)



+ + 1) c). $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 3,6.}$

2) a) g est polynomial de degré deux et son coefficient dominant est 1 donc :

\+ $\exists (b,c) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = x^2 + bx + c.$

\+ + *De plus $B \in \mathcal{E}_g$ donc : $g(0) = 1$. D'où $c = 1$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = x^2 + bx + 1$

\+ *De plus $A \in \mathcal{E}_g$ donc : $g(1) = -2$.

i.e. : $1^2 + b \times 1 + 1 = -2$

$b = -4$

D'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 - 4x + 1}$

2) b) : g est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 1$.

* $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12$.

* $\Delta > 0$ donc g admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{12}}{2 \times 1} = 2 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{12}}{2 \times 1} = 2 - \sqrt{3}$$

$\boxed{2 + \sqrt{3} \text{ et } 2 - \sqrt{3} \text{ sont les racines de } g.}$

Exercice 2 (7 minutes)

1) $e^{3x} > 0$ donc f est bien définie

2) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x + 1 \\ v(x) = e^{3x} \end{cases}$

Donc : $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

On $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3e^{x}$ donc :

$$f'(x) = \frac{2e^{3x} - (2x+1)3e^{3x}}{(e^{3x})^2}$$

$$= \frac{(-6x-1)e^{3x}}{e^{2 \times 3x}} = -(6x+1)e^{3x}e^{-6x}$$

$$f'(x) = -(6x+1)\, e^{3x-6x}$$

$$\boxed{f'(x) = -(6x+1)\, e^{-3x}}$$

3)

x	$-\infty$		$-1/6$		$+\infty$
e^{-3x}		$+$	|	$+$	
$-6x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	|	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 3 (9 min).

1) $u_1 = u_0 + 2\times 0 + 3 = 1 + 3 = 4$

2) $u_2 = u_1 + 2\times 1 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$

3) $u_3 = u_2 + 2\times 2 + 3 = 9 + 4 + 3 = 16$

$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{9}{4}$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{16}{9}$ $\quad \dfrac{9}{4} \neq \dfrac{16}{9}$ donc

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique.

4) $(n+1+1)^2 - (n+1)^2 = 4n + 4 - 2n - 1 = 2n+3$

Donc $((n+1)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien la relation de récurrence : $u_{n+1} - u_n = 2n+3$.

5) $u_0 = 0^2 + 1 = 1$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$.

6) $u_{n+1} - u_n = 2n+3 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.