Devoir du 10/12/2021.

I Exercice.

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs directeurs de (AB) et (CD).

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{25}{3} - 2 \\ 0 - 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{19}{3} \\ -8 \end{pmatrix}$.

   De même $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   Or

   $$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) &= \begin{vmatrix} \frac{19}{3} & -4 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

   donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

   Réponse b.

2. Notons $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   Déterminons l'équation réduite de $\mathscr{T}$.

   D'après les réponses proposées $f'(1)$ ne peut être que 3 ou -3 d'après la courbe représentative (donnée par la calculatrice) on devine que la tangente $\mathscr{T}$ descend donc $f'(1) = -3$. Il était encore plus simple d'utiliser le calcul du hombre dérivé de la calculatrice.

   $f(1) = -3$ donc la tangente passe par le point de coordonnées $(1; -3)$. Or : $-3 \times 1 = -3$ donc

   Réponse b.

3. Étudions le signe de la fonction trinôme $f : x \mapsto -2x^2 - 5x + 3$.

   Les bornes des ensembles des solutions proposés permettent de deviner que les racines seront parmi : 3, -3, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Une vérification à la calculatrice -tableau de valeurs, courbe représentative ou calcul des images) permet de voir que -3 et $\frac{1}{2}$ sont racines.

   Le trinôme est du signe de son coefficient dominant ($a = -2 < 0$) sauf entre les racines donc :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Réponse b.

4. Modélisons la situation : notons (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 15$ et de raison 1.

   Calculons $S = 15 + \cdots + 243$.

   On additionne $243 - 15 + 1 = 229$ termes.
   Donc on additionne jusqu'au rang 228 et

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{228} \\ &= (228+1)\frac{15+243}{2} \\ &= 29541 \end{aligned}$$

Réponse c.

5. On ne cherche que des solutions positives donc la réponse d est exclue.
   Avec la calculatrice, ou en utilisant les cercle trigonométrique et les valeurs remarquables de sinus on obtient enfin :

Réponse a.

II Exercice.

1.

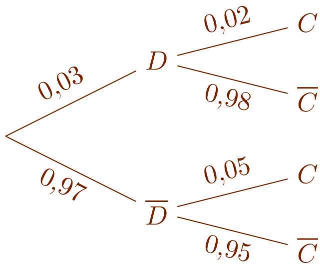
   — 0,5 par bonne réponse sans justification.

   D'après l'énoncé :

$$\mathbb{P}(D) = 0{,}03.$$

$$\mathbb{P}_D(C) = 0{,}02.$$

2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter uniquement les pointillés par les probabilités associées :



3.

— 0,25 vérification condition d'utilisation de la formule des probabilités composées.
— 0,25 évocation de la formule des probabilité composées ou du principe multiplicatif.
— 0,25 pour la formule littérale.
— 0,25 pour la formule numérique correcte.
— 0,25 pour le résultat correcte.

Calculons $\mathbb{P}(D \cap C)$.

$\mathbb{P}(D) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D \cap C) &= \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(C) \\ &= 0{,}03 \times 0{,}02\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(D \cap C) = 0{,}0006.$$

4.

- 0,25 vérification condition d'utilisation de la formule des probabilités totales.
- 0,25 évocation de la formule des probabilités totales.
- 0,25 formule littérale de la formule des probabilités totales.
- 0,25 pour l'utilisation de la formule des probabilités totales composées (nommée ou littérale).
- 0,25 pour la formule numérique correcte.
- 0,25 pour le résultat correcte.

Calculons $\mathbb{P}(C)$

$\{D,\overline{D}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(D \cap C) + \mathbb{P}(\overline{D} \cap C)$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(C) + \mathbb{P}(\overline{D}) \times \mathbb{P}_{\overline{D}}(C)\\ &= 0{,}03 \times 0{,}02 + 0{,}97 \times 0{,}05\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = 0{,}0491.}$$

5.

- 0,25 vérification condition d'utilisation de probabilité conditionnelle.
- 0,25 formule littérale de probabilité conditionnelle.
- 0,25 pour la formule numérique correct.
- 0,25 pour le résultat correct.

Calculons $\mathbb{P}_C(D)$.

$\mathbb{P}(C) > 0$ donc, par définition de la probabilité conditionnelle

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_D(C) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap D)}{\mathbb{P}(C)}\\ &= \frac{0{,}0006}{0{,}0491}\\ &\approx 0{,}01221 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

Donc en arrondissant à 10^{-4} près :

$$\boxed{\mathbb{P}_D(C) \approx 0{,}0122.}$$

III Exercice. 5 points

1.

- 0,25 formule littérale pour le coefficient multiplicateur.
- 0,25 valeur numérique du coefficient multiplicateur.
- 0,25 si procédé de calcul correct sans coefficient multiplicateur.
- 0,25 pour u_1.
- 0,25 pour u_2.

* Calculons u_1.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 3 % est

$$\begin{aligned}CM &= 1 + \frac{t}{100}\\ &= 1 + \frac{3}{100}\\ &= 1{,}03\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}u_1 &= u_0 \times 1{,}03\\ &= 600 \times 1{,}03\end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 618.}$$

* Calculons u_2.

  Comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \times 1{,}03 \\ &= 618 \times 1{,}03 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 636{,}54.}$$

2.

— 0,25 formule de récurrence avec valeur numérique.
— 0,25 nature de la suite (justifiée par formule de récurrence ou paraphrase de l'énoncé).
— 0,25 pour le terme initial.
— 0,25 pour la raison.

En s'inspirant de la question précédente, nous voyons que le nouveau prix est l'ancien multiplié par 1,03.

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \times 1{,}03 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

Nous reconnaissons la formule de récurrence définissant une suite géométrique.
Donc

$$\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique de terme initial } u_0 = 600 \text{ et de raison } q = 1{,}03.}$$

3.

— 0,25 justification par nature de la suite.
— 0,25 formule explicite littérale.
— 0,25 formule explicite littérale.

Puisque (u_n) est géométrique de terme initial $u_0 = 600$ et de raison $q = 1{,}3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$\boxed{u_n = 600 \times 1{,}03^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

4.

— 0,25 par complétion.
— 0,25 si de plus respect convention Python.

```
def nombreAnnees():
    n=0
    u=600
    while u<1000:
        n=n+1
        u=u*1.03
    return(n)
```

5. En tâtonnant ou en programmant le script Python précédent :

la fonction Python précédente renvoie 18.