Devoir du 10/12/2021.

I Exercice.

Pour cet exercice : une seule réponse, pas de justification, pas de pénalité en cas d'erreur.

1. On munit le plan du repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère les points $A(2;8)$, $B\left(\dfrac{25}{3};0\right)$, $C(7;-5)$ et $D(3;0)$.

   Alors, les droites (AB) et (CD) sont :

   a) parallèles,

   b) sécantes,

   c) confondues,

   d) autre.

   Déterminons les coordonnées des vecteurs directeurs de (AB) et (CD).

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{25}{3} - 2 \\ 0 - 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{19}{3} \\ -8 \end{pmatrix}$.

   De même $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   Or

   $$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) &= \begin{vmatrix} \frac{19}{3} & -4 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

   donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

   Réponse b.

2. On munit le plan du repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

   On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 5x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans ce repère. L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :

a) $y = -3x + 5$.

b) $y = -3x$,

c) $y = 3x$,

d) $y = 3x + 6$.

Notons $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Déterminons l'équation réduite de $\mathscr{T}$.

D'après les réponses proposées $f'(1)$ ne peut être que 3 ou -3 d'après la courbe représentative (donnée par la calculatrice) on devine que la tangente $\mathscr{T}$ descend donc $f'(1) = -3$. Il était encore plus simple d'utiliser le calcul du hombre dérivé de la calculatrice.

$f(1) = -3$ donc la tangente passe par le point de coordonnées $(1; -3)$. Or : $-3 \times 1 = -3$ donc

Réponse b.

3. L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $-2x^2 - 5x + 3 < 0$ est :

a) $\left]-3; \frac{1}{2}\right[$.

b) $]-\infty; -3[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$,

c) $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup]3; +\infty[$,

d) $\left]-\frac{1}{2}; 3\right[$.

Étudions le signe de la fonction trinôme $f : x \mapsto -2x^2 - 5x + 3$.

Les bornes des ensembles des solutions proposés permettent de deviner que les racines seront parmi : 3, -3, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Une vérification à la calculatrice -tableau de valeurs, courbe représentative ou calcul des images) permet de voir que -3 et $\frac{1}{2}$ sont racines.

Le trinôme est du signe de son coefficient dominant ($a = -2 < 0$) sauf entre les racines donc :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Réponse b.

4. La somme $15 + 16 + 17 + ... + 243$ est égale à :

   a) 29 403.　　b) 29 412,

   c) 29 541,　　d) 29 646.

Modélisons la situation : notons (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 15$ et de raison 1.

Calculons $S = 15 + \cdots + 243$.

On additionne $243 - 15 + 1 = 229$ termes.
Donc on additionne jusqu'au rang 228 et

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{228} \\ &= (228+1)\frac{15+243}{2} \\ &= 29541 \end{aligned}$$

Réponse c.

5. Les solutions dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ de l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont :

   a) $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.　　b) $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$,

   c) $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$,　　d) $-\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

On ne cherche que des solutions positives donc la réponse d est exclue.
Avec la calculatrice, ou en utilisant les cercle trigonométrique et les valeurs remarquables de sinus on obtient enfin :

Réponse a.

II Exercice.

Une entreprise vend des téléviseurs. Une étude a montré que ces téléviseurs peuvent rencontrer deux types de défauts : un défaut sur la dalle, un défaut sur le condensateur.

L'étude indique que :

- 3 % des téléviseurs présentent un défaut sur la dalle et que parmi ceux-ci, 2 % ont également un défaut sur le condensateur.
- 5 % des téléviseurs sans défaut sur la dalle ont un défaut sur le condensateur.

On choisit un téléviseur au hasard et on considère les événements suivants :

- D : « le téléviseur a un défaut sur la dalle » ;
- C : « le téléviseur a un défaut sur le condensateur ».

Pour tout événement E, on note $\mathbb{P}(E)$ sa probabilité et $\overline{E}$ l'événement contraire de E.

Pour tout événement F de probabilité non nulle, on note $\mathbb{P}_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

Les résultats seront approchés si nécessaire à 10^{-4} près.

1. Donner $\mathbb{P}(D)$ puis $\mathbb{P}_D(C)$.

   1 points

   — 0,5 par bonne réponse sans justification.

   D'après l'énoncé :

   $$\boxed{\mathbb{P}(D) = 0{,}03.}$$

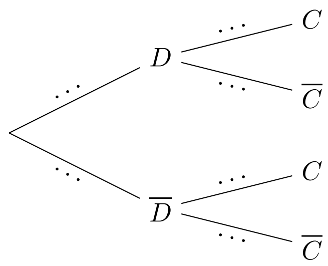
   $$\boxed{\mathbb{P}_D(C) = 0{,}02.}$$

2.

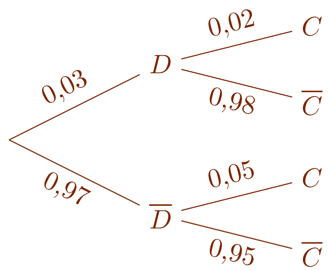
   — 0,25 pour placer les valeurs données aux bons endroits.
   — 0,25 pour compléter les valeurs inconnues.
   — 0,5 pour mettre les bonnes valeurs ($-0{,}25$ par erreur).

Recopier l'arbre ci-dessous et compléter uniquement les pointillés par les probabilités associées :

1 points



Recopier l'arbre ci-dessous et compléter uniquement les pointillés par les probabilités associées :



3. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(D \cap C)$ de l'événement $D \cap C$.

1,25 points

— 0,25 vérification condition d'utilisation de la formule des probabilités composées.
— 0,25 évocation de la formule des probabilité composées ou du principe multiplicatif.
— 0,25 pour la formule littérale.
— 0,25 pour la formule numérique correcte.
— 0,25 pour le résultat correcte.

Calculons $\mathbb{P}(D \cap C)$.

$\mathbb{P}(D) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D \cap C) &= \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(C)\\ &= 0{,}03 \times 0{,}02\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(D \cap C) = 0{,}0006.}$$

4. Quelle est la probabilité qu'un téléviseur ait un défaut de condensateur ?

1,5 *points*

— 0,25 vérification condition d'utilisation de la formule des probabilités totales.
— 0,25 évocation de la formule des probabilités totales.
— 0,25 formule littérale de la formule des probabilités totales.
— 0,25 pour l'utilisation de la formule des probabilités totales composées (nommée ou littérale).
— 0,25 pour la formule numérique correcte.
— 0,25 pour le résultat correcte.

Calculons $\mathbb{P}(C)$

$\{D,\overline{D}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(D \cap C) + \mathbb{P}(\overline{D} \cap C)$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(C) + \mathbb{P}(\overline{D}) \times \mathbb{P}_{\overline{D}}(C)\\ &= 0{,}03 \times 0{,}02 + 0{,}97 \times 0{,}05\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = 0{,}0491.}$$

5. Le téléviseur choisi a un défaut sur le condensateur. Quelle est alors la probabilité qu'il ait un défaut sur la dalle ?

1 points

— 0,25 vérification condition d'utilisation de probabilité conditionnelle.
— 0,25 formule littérale de probabilité conditionnelle.
— 0,25 pour la formule numérique correct.
— 0,25 pour le résultat correct.

Calculons $\mathbb{P}_C(D)$.

$\mathbb{P}(C) > 0$ donc, par définition de la probabilité conditionnelle

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_D(C) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap D)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{0{,}0006}{0{,}0491} \\ &\approx 0{,}01221 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

Donc en arrondissant à 10^{-4} près :

$$\boxed{\mathbb{P}_D(C) \approx 0{,}0122.}$$

III Exercice. 5 points

Un téléphone coûte 600 euros lors de son lancement. Tous les ans, le fabricant sort une nouvelle version de ce téléphone. Le prix de ce téléphone augmente de 3 % chaque année.

On note u_n le prix du téléphone en euros n années après son lancement. On a donc $u_0 = 600$.

1. Calculer u_1 et u_2. Interpréter les résultats dans le contexte.

1 points

— 0,25 formule littérale pour le coefficient multiplicateur.

— 0,25 valeur numérique du coefficient multiplicateur.
— 0,25 si procédé de calcul correct sans coefficient multiplicateur.
— 0,25 pour u_1.
— 0,25 pour u_2.

* Calculons u_1.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 3 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{3}{100} \\ &= 1{,}03 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times 1{,}03 \\ &= 600 \times 1{,}03 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 618.}$$

* Calculons u_2.

Comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \times 1{,}03 \\ &= 618 \times 1{,}03 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 636{,}54.}$$

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n et en déduire la nature de la suite (u_n). Préciser sa raison et son premier terme.

1 *points*

- 0,25 formule de récurrence avec valeur numérique.
- 0,25 nature de la suite (justifiée par formule de récurrence ou paraphrase de l'énoncé).
- 0,25 pour le terme initial.
- 0,25 pour la raison.

En s'inspirant de la question précédente, nous voyons que le nouveau prix est l'ancien multiplié par 1,03.

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \times 1{,}03 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

Nous reconnaissons la formule de récurrence définissant une suite géométrique.

Donc

$$\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique de terme initial } u_0 = 600 \text{ et de raison } q = 1{,}03.}$$

3. Exprimer, pour tout entier n, u_n en fonction de n.

0,75 *points*

- 0,25 justification par nature de la suite.
- 0,25 formule explicite littérale.
- 0,25 formule explicite littérale.

Puisque (u_n) est géométrique de terme initial $u_0 = 600$ et de raison $q = 1{,}3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$\boxed{u_n = 600 \times 1{,}03^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

4. Recopier et compléter sur la copie la fonction Python ci-dessous pour qu'elle détermine le nombre minimum d'années nécessaires afin que le prix du téléphone dépasse 1000 euros.

1 points

```
def nombreAnnees():
 n=0
 u=600
 while .....:
     n= .....
     u= .....
 return(n)
```

— 0,25 par complétion.
— 0,25 si de plus respect convention Python.

```
def nombreAnnees():
    n=0
    u=600
    while u<1000:
        n=n+1
        u=u*1.03
    return(n)
```

5. Quelle est la valeur de n renvoyée par cette fonction Python ?

1 points

En tâtonnant ou en programmant le script Python précédent :

la fonction Python précédente renvoie 18.