Devoir sur table du 24/09/2021.

I Exercice. 4 points

On considère dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ les points $A(3; 12)$ et $B(-4; -37)$.

1. Déterminez les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

0,5 points

— 0,25 formule littérale.
— 0,25 le résultat correctement présenté.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4-3 \\ -37-12 \end{pmatrix}$.

Enfin

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ -49 \end{pmatrix}}$$

2. Déterminez une équation cartésienne de (AB).

1 points

— 0,25 explication des x et y.
— 0,25 argumentation sans erreur.
— 0,25 méthode efficace.
— 0,25 résultat.

Soit $M(x,y)$ un point du plan dont les coordonnées sont données dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Dire que $M \in (AB)$ équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) &= 0\\
\begin{vmatrix} x-3 & -7\\ y-12 & -49\end{vmatrix} &= 0\\
(x-3)\times(-49)-(y-12)\times(-7) &= 0\\
-49x+147+7y-84 &= 0
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{(AB):\ -49x+7y+63=0.}$$

3. Déduisez-en l'équation réduite de (AB).

1 *points*

— 0,25 argumentation sans erreur.
— 0,25 méthode efficace.
— L'équation est effectivement réduite.
— 0,25 résultat.

$$-49x+7y+63=0$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
-49x+7y+63+49x-63 &= 0+49x-63\\
7y &= 49x-63\\
\frac{7y}{7} &= \frac{49x-63}{7}\\
y &= \frac{49x}{7}-\frac{63}{7}\\
y &= \frac{49}{7}x-9
\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{(AB):\ y=7x-9.}$$

4. On considère la fonction ℓ définie sur $\mathbb{R}$ par $\ell : x \mapsto x^2 + x$.
Déterminez $\ell'(3)$.

1 *points*

— 0,25 utilisation du taux d'accroissement.
— 0,25 valeurs de a et $\ell(a)$.
— 0,25 développer $\ell(a+h)$.
— Rédaction du passage à la limite.
— Limite.

* Déterminons le taux d'accroissement de ℓ entre 3 et $3+h$.

$$\tau = \frac{\ell(a+h) - \ell(a)}{h}.$$

Or ici :

- $a = 3$,
- $\ell(a) = 12$,
- et

$$\begin{aligned}\ell(a+h) &= \ell(3+h)\\ &= (3+h)^2 + (3+h)\\ &= 3^2 + 2\times 3\times h + h^2 + 3 + h\\ &= h^2 + 7h + 12\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{h^2 + 7h + 12 - 12}{h}\\ &= \frac{h^2 + 7h}{h}\\ &= \frac{h(h+7)}{h}\\ &= h + 7\end{aligned}$$

* Passons (si possible à la limite).
$\lim_{h\to 0} \tau = \lim_{h\to 0} h + 7 = 7$.
Donc

$$\boxed{\ell \text{ est dérivable en 3 et } \ell'(3) = 7.}$$

5. Justifiez que la droite (AB) est la tangente au point d'abscisse 3 de la courbe représentative de la fonction ℓ.

0,5 *points*

— 0,25 prise en compte de deux valeurs.
— 0,25 vérification effectivement faite.

Le point d'abscisse 3 de la courbe est A puisque : $\ell(x_A) = \ell(3) = 3^2 + 3 = 12 = y_A$.
De plus le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 est $\ell'(3) = 7$.
Donc

$$\boxed{(AB) \text{ est bien la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.}}$$

II Exercice. 2 points

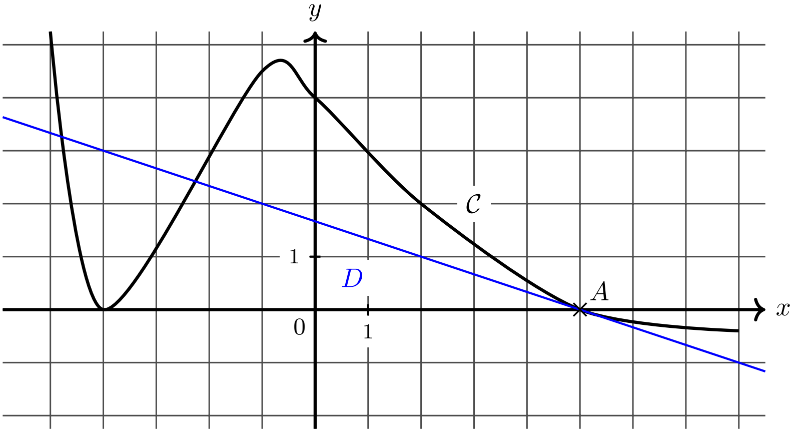
Ce QCM comprend 2 questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes.

Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. On se place dans un repère orthonormé du plan.
Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative notée $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La droite D est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(5;0)$.



Alors $f'(5)$ est égal à :

(a) 3.

(b) -3 ;

(c) $\frac{1}{3}$.

(d) $-\frac{1}{3}$.

$f'(5)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au moins d'abscisse 5. Donc par lecture graphique :

Réponse (d).

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 4x + 5$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de g dans un repère orthonormé au point d'abscisse -1 est :

(a) $y = 8x + 7$.

(b) $y = -7x + 1$.

(c) $y = -4x + 5$.

(d) $y = -x + 9$.

Avec la calculatrice : $g'(-1) = -1$, or $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse -1 donc :

Réponse (d).

III Exercice. 4,25 points

Soient $f : x \mapsto 2x + 3$ et $g : x \mapsto 0{,}5x^2 + x + 1{,}5$ deux fonctions définies sur $[-3; 8]$.

On souhaite déterminer la position relative des courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g.

1. On souhaite dans un premier temps conjecturer la réponse par une lecture graphique.

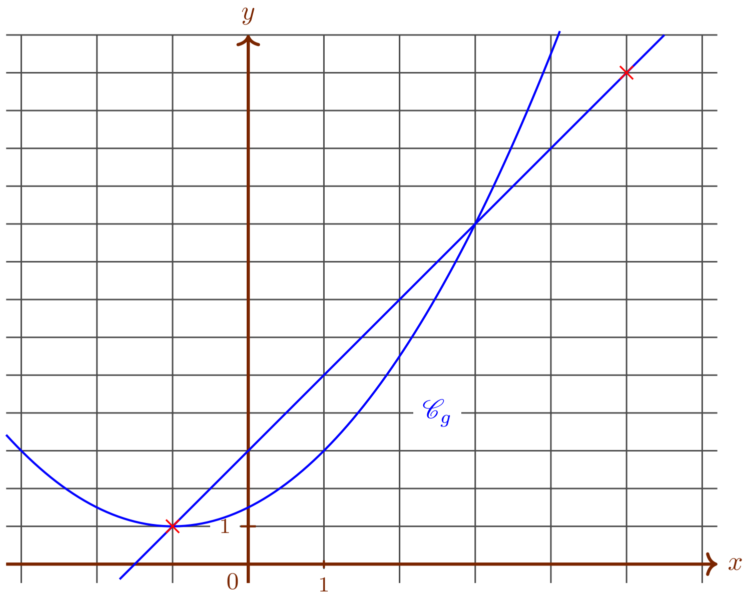
   (a) Dessinez sans justification dans le repère fourni en annexe la courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, de la fonction f.

   0,5 *points*

   — 0,25 si au moins ordonnée à l'origine ou pente, coordonnées d'un point indiquées.

   Puisque f est une fonction affine sa courbe représentative est une droite. Il suffit de placer deux points.

$$f(-1) = 1$$
$$f(5) = 13$$



(b) Conjecturez, sans justifier et par lecture graphique l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) > f(x)$ sur $[-3; 8]$.

0,25 points

$g(x) > f(x)$ si la courbe représentative de g est au-dessus de celle de f à l'abscisse x.

Donc

$$g(x) > f(x) \text{ si et seulement si } x \in [-3; -1[\cup]3; 8].$$

2. Nous allons démontrer le résultat trouvé précédemment.

On note h la fonction définie sur $[-3; 8]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

(a) Démontrez que, pour tout $x \in [-3; 8]$, $h(x) = 0{,}5x^2 - x - 1{,}5$.

0,5 points

— 0,25 pour l'idée de partir des expressions algébrique et de la différence des fonctions.

— 0,25 pour le développement sans erreur.

Soit $x \in [-3;8]$.
Par définition de h :

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= 0{,}5x^2 + x + 1{,}5 - (2x + 3) \\ &= 0{,}5x^2 + (1-2)x + 1{,}5 - 3 \\ &= 0{,}5x^2 - x - 1{,}5 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [-3;8],\ h(x) = 0{,}5x^2 - x - 1{,}5.}$$

(b) Démontrez que, pour tout $x \in [-3;8]$, $h(x) = (x+1)(0{,}5x - 1{,}5)$

1 *points*

— 0,25 pour utiliser la forme développée donnée à la question précédente.
— 0,25 pour partir d'un côté de l'égalité.
— 0,5 pour le développement.

Soit $x \in [-3;8]$.

$$\begin{aligned} (x+1)(0{,}5x - 1{,}5) &= x \times 0{,}5x + x \times (-1{,}5) + 1 \times 0{,}5x + 1 \times (-1{,}5) \\ &= 0{,}5x^2 - 1{,}5x + 0{,}5x - 1{,}5 \\ &= 0{,}5x^2 - x - 1{,}5 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [-3;8],\ (x+1)(0{,}5x - 1{,}5) = h(x).}$$

(c) Dressez le tableau de signe de la fonction $k : x \mapsto 0{,}5x - 1{,}5$ sur $[-3; 8]$.

1 points

— 0,25 ligne de x.
— 0,25 ligne de k.
— 0,25 justification du signe.
— 0,25 justification du 0.

$$\begin{aligned} k(x) > 0 &\iff 0{,}5x - 15 > 0 \\ &\iff 0{,}5x - 1{,}5 + 1{,}5 > 0 + 1{,}5 \\ &\iff 0{,}5x > 1{,}5 \\ &\iff \frac{0{,}5x}{0{,}5} > \frac{1{,}5}{0{,}5}, \quad \text{car } 0{,}5 > 0 \\ &\iff x > 3 \end{aligned}$$

De même $k(x) = 0 \iff x = 3$.

x	-3		3		8
$k(x)$		$-$	0	$+$	

(d) Dressez, sans justification, le tableau de signe de la fonction h

1 points

— 0,25 par ligne.
— Du fait du manque de clarté de l'énoncé, 1 si première et dernière ligne correctes.
— 0,25 pour la conclusion de l'exercice non demandée.

x	-3		-1		3		8
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$0{,}5x-1{,}5$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

IV Annexe.