Devoir sur table 1 heure.

I Exercice.

À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier se prépare à lancer des fusées à partir d'une plateforme située à 8 mètres de hauteur.

On modélise la hauteur, en mètre, atteinte par les fusées en fonction de leur temps de vol, en dixième de seconde, par la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;20]$ par :

$$f(x) = -0{,}5x^2 + 10x + 8.$$

L'explosion des fusées doit avoir lieu lorsque celles-ci sont situées à une altitude supérieure ou égale à 40 mètres. On cherche à déterminer l'intervalle dans lequel doit se trouver x pour satisfaire à cette contrainte.

1. Montrer que pour satisfaire à la contrainte posée, x doit être solution de l'inéquation
$$-0{,}5x^2 + 10x - 32 \geqslant 0.$$

0,5 *points*

— 0,25 pour traduire l'énoncé par une inéquation.
— 0,25 pour transformer l'inéquation comme demandé.

On souhaite que la hauteur soit supérieure ou égale à 40 m donc que :

$$f(x) \geqslant 40$$

ce qui équivaut successivement à :

$$-0{,}5x^2 + 10x + 8 \geqslant 40$$
$$-0{,}5x^2 + 10x + 8 - 40 \geqslant 40 - 40$$
$$-0{,}5x^2 + 10x - 32 \geqslant 0$$

Ainsi x dit bien satisfaire l'inéquation : $-0{,}5x^2 + 10x - 32 \geqslant 0$.

2. Démontrer que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$-0{,}5x^2 + 10x - 32 = (-0{,}5x + 2)(x - 16).$$

1 points

— 0,25 pour une démonstration propre : partir d'un côté aller vers l'autre ...,
— 0,75 pour un développement correct,

Démontrons l'égalité entre les deux expressions.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(-0{,}5x + 2)(x - 16) &= -0{,}5x \times x + (-0{,}5x) \times (-16) + 2 \times x + 2 \times (-16)\\ &= -0{,}5x^2 + 8x + 2x - 32\\ &= -0{,}5x^2 + 10x - 32\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R},\ -0{,}5x^2 + 10x - 32 = (-0{,}5x + 2)(x - 16).}$$

3. Détaillez l'étude du signe de $g : x \mapsto -0{,}5x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

1 points

— 0,25 identifier la nature de la fonction,
— 0,5 inéquation et équation ou coefficient directeur et zéro,
— 0,25 tableau de signe.

Étudions le signe de g.

g est une fonction affine avec $a = -0{,}5$ et $b = 2$.
$a < 0$ donc g est strictement décroissante.
g s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{-0{,}5} = 4$.

Nous en déduisons :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
g		$+$	0	$-$	

4. Dresser le tableau de signe de la fonction $h : x \mapsto (-0{,}5x+2)(x-16)$ définie sur $[0;20]$ sans justification.

1 *points*

— 0,25 ensemble de définition et zéros,
— 0,25 par ligne de signe cohérente.

Déterminons le tableau de signe de h.

x	$-\infty$		4		16		$+\infty$
$-0{,}5x+2$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-16$		$-$		$-$	0	$+$	
h		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. Répondez au problème.

1 *points*

— 0,25 pour justifier avec les questions précédentes.
— 0,75 pour une conclusion correcte.

D'après la question 1 les solutions de l'équation $-0{,}5x^2+10x-32 \geqslant$.
Donc les solutions aux problèmes sont les x qui rendent h positive au nulle.
D'après le précédent tableau signe nous voyons que

> la fusée sera au dessus de 40 m entre 4 et 16 dixièmes de secondes.

II Exercice.

Ce QCM comprend 2 questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes.

Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. Dans un repère orthonormé, la droite d d'équation cartésienne $2x-5y-4=0$.

   (a) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;-4)$

   (b) passe par le point de coordonnées $(2;0{,}2)$.

   (c) admet $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

   (d) admet $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

   Le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. Il est clair que si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{v}$. Ces vecteurs sont colinéaires et $\overrightarrow{u}$ est non nul donc

   Réponse (c).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé.
   Les droites d'équations $2x+y+1=0$ et $3x-2y+5=0$

   (a) sont sécantes en $A(1;1)$.

   (b) sont sécantes en $B(1;-1)$.

   (c) sont sécantes en $C(-1;1)$

   (d) ne sont pas sécantes.

   En substituant x et y dans les deux équations proposées par les coordonnées des points A, B et C nous trouvons que seul C appartient à ces deux droites.

   Réponse (c).

III Exercice.

Un mobile autoporteur a une trajectoire rectiligne uniforme sur une table horizontale. Un repère orthonormé est dessiné afin de lire les positions successives du mobile.

On relève une première position $A(4;24)$ puis une seconde $B(14;12)$.

1. Déterminez les coordonnées d'un vecteur directeur de (AB).

0,5 *points*

— 0,25 pour formule littérale et numérique,
— 0,25 pour réponse.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).

Déterminons les coordonnées de (AB).

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 14-4 \\ 12-24 \end{pmatrix}$ ou encore

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 10 \\ -12 \end{pmatrix}.}$$

2. Déterminez une équation cartésienne de (AB).

1 *points*

— 0,25 utilisation d'un point M,
— 0,25 les deux notation du déterminant,
— 0,25 développement du déterminant,
— 0,25 réponse

Déterminons une équation cartésienne de (AB).

Soit $M(x;y)$.

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x-4 & 10 \\ y-24 & -12 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (x-4)\times(-12) - (y-24)\times 10 = 0 \\ &\iff -12x + 48 - 10y + 240 = 0 \\ &\iff -12x - 10y + 288 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{(AB) : \ -12x - 10y + 288 = 0.}$$

3. En déduire l'équation réduite de (AB).

1 points

— 0,25 pour indiquer les équivalences,
— 0,25 et 0,25 pour les deux étapes de manipulation algébrique.
— 0,25 pour la réponse correcte.

Déterminons l'équation réduite de (AB).

$$-12x - 10y + 288 = 0$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned} -12x - 10y + 288 + 12x - 288 &= 0 + 12x - 288 \\ -10y &= 13x - 288 \\ \frac{-10y}{-10} &= \frac{12x - 288}{-10} \\ y &= \frac{12x}{-10} + \frac{-288}{-10} \\ y &= -1{,}2x + 28{,}8 \end{aligned}$$

$$\boxed{(AB) : \ y = -1{,}2x + 28{,}8.}$$

4. Déterminer les coordonnées du palet lorsque son abscisse est 20.

1 *points*

— 0,25 pour l'utilisation de 20,
— 0,5 pour l'utilisation de l'équation réduite ou d'un moyen efficace,
— 0,25 pour la réponse.

Déterminons les coordonnées du palet.

Les coordonnée du palets vérifient l'équation de la droite donc si l'abscisse du palet est $x = 20$ alors son ordonnées est :

$$\begin{aligned} y &= -1{,}2x + 28{,}8 \\ &= -1{,}2 \times 20 + 28{,}8 \\ &= 4{,}8 \end{aligned}$$

Si $x = 20$ alors le palet est au point de coordonnées $(20; 4{,}8)$.