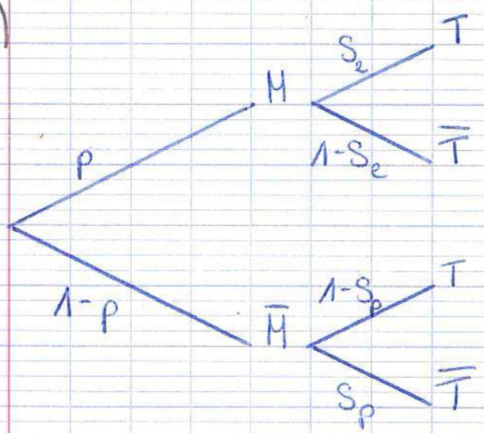
11380

Devoir libre n°2 : Probabilités.

Exercice 20 :

1)



2a) $P(M\cap T) = p \times S_e$

$P(M\cap \overline{T}) = p \times (1-S_e)$

$P(\overline{M}\cap T) = (1-p)\times(1-S_p)$

$P(\overline{M}\cap \overline{T}) = (1-p)\times S_p$

→ ce ne sont pas des issues : il faut justifier que ces évènements sont disjoints.

b) $P(M\cap T) + P(\overline{M}\cap\overline{T}) = p\times S_e + (1-p)\times S_p$

$= p \times S_e + S_p - p \times S_p$

$\boxed{P(M\cap T) + P(\overline{M}\cap\overline{T}) = p(S_e - S_p) + S_p}$

Je crains que vous ne recopiez sans rien comprendre : ce n'est pas $P(S_e)$ mais bien $p \times S_e$.

3a) $P(T) = P(M\cap T) + P(\overline{M}\cap T)$ → Justification par la formule des probabilités totales.

$= p\times S_e + (1-p)\times(1-S_p)$

$= p \times S_e + 1 - S_p - p + p \times S_p$

$\boxed{P(T) = p(S_e + S_p) - p - S_p + 1}$

b) $VPP = P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)}$

$$= \boxed{\dfrac{p \times S_e}{p(S_e + S_p) - p - S_p + 1}}$$

$VPN = P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \dfrac{P(\bar{M} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})}$

$$= \dfrac{(1-p) \times S_p}{1 - [p(S_e + S_p) - p - S_p + 1]}$$

$$= \dfrac{(1-p) \times S_p}{-p(S_e + S_p) + p + S_p}$$

c) $VPP > p \cancel{=} \dfrac{p \times S_e}{p(S_e + S_p) - p - S_p + 1} > p$

$= \dfrac{\cancel{p} \times S_e}{p(S_e + S_p) - p - S_p + 1} > \cancel{p}$

car $p > 0$

$= \dfrac{S_e}{p(S_e + S_p) - p - S_p + 1} > 1$

$= S_e > p S_e + (1-p)(1-S_p)$

$= S_e - p S_e > (1-p)(1-S_p)$

$= (\cancel{1-p}) S_e > (\cancel{1-p})(1-S_p)$ car $1 - p > 0$: vous divisez l'inégalité par $1-p$ en "simplifiant"

$= S_e > 1 - S_p$

$= \boxed{S_e + S_p > 1}$

Les inégalités ne sont pas égales, elles sont équivalentes. Le symbole est alors $\Leftrightarrow$

4a) $VPP_{\text{Tanzanie}} = P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)}$

$$= \dfrac{p(S_e)}{p(S_e + S_p) - p - S_p + 1}$$

$$= \dfrac{0{,}9 \times 0{,}9}{0{,}9(0{,}9 + 0{,}8) - 0{,}9 - 0{,}8 + 1}$$

11380

$$= \frac{0,81}{0,83}$$

$$\simeq \boxed{0,975}$$

b) - Patient de Tanzanie : environ 97,5 % d'être positif si le patient est malade, et 47 % d'être négatif si le patient n'est pas malade.

Que dire au patient ?

- Patient de France : le test est positif si le patient est malade, et le test est négatif si le patient n'est pas malade.

c) (i) $v(p) = \dfrac{p \times S_e \times}{p(S_e + S_p) - p - S_p + 1}$

Il fallait donner l'expression numérique.

(ii) $u = p(S_e)$
$u' = S_e$
$v = p(S_e) + 1 - p - S_p + p(S_p)$
$v' = S_e + S_p - 1$

→ C'est mal rédigé mais correcte.

Vous êtes en avance sur le cours.

$$v'(p) = \frac{S_e(p(S_e) + 1 - p - S_p + p(S_p)) - (p(S_e))(S_e + S_p - 1)}{(p(S_e) + 1 - p - S_p + p(S_p))^2}$$

Le signe de $v'(p)$ dépend de son numérateur.

$v'(p) = 0,9(p \times 0,9 + 1 - p + 0,8 + p \times 0,8) - (p \times 0,9)(0,9 + 0,8 - 1)$
$= 0,9(0,9p + 1 - p + 0,8 + 0,8p) - (0,9p) \times 0,7$
$= 0,9(0,7p + 1,8) - 0,63p$
$= 0,63p + 1,62 - 0,63p$
$= \boxed{1,62}$

$v'(p)$ est croissante.

3/4

Expliquez.

(iii) 95 % des cas, si le test est positif le patient sera malade.

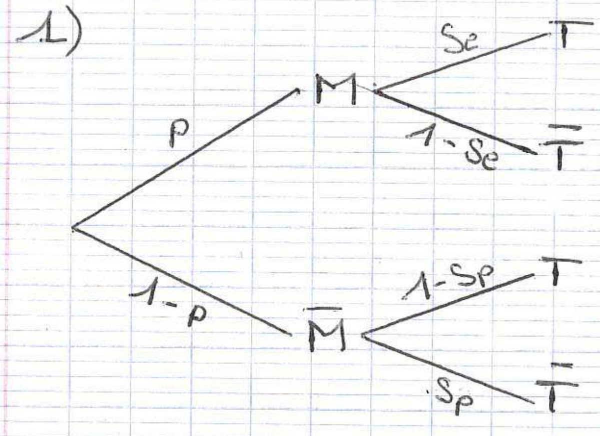
$\frac{5}{5}$

11730

Devoir libre : exercice 20

Mathématiques

1)



2) a) D'après la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(M) \neq 0$

$\mathbb{P}(M \cap T) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T)$
$\boxed{= p \times Se}$ Encadrez des phrases entières.

$\mathbb{P}(M \cap \overline{T}) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(\overline{T})$
$\boxed{= p \times (1 - Se)}$

$\mathbb{P}(\overline{M} \cap T) = \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)$
$\boxed{= (1-p) \times (1 - Sp)}$

$\mathbb{P}(\overline{M} \cap \overline{T}) = \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T})$
$\boxed{= (1-p) \times Sp}$

b) Soit J l'événement ~~la probabilité que~~ "le test délivré soit juste".
Calculons $\mathbb{P}(J)$
$\{M ; \overline{M}\}$ est un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales,

$\mathbb{P}(J) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\bar{M} \cap \bar{T})$

$\mathbb{P}(M) > 0$ et $\mathbb{P}(\bar{M}) > 0$ donc d'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(J) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\bar{M}) \times \mathbb{P}_{\bar{M}}(\bar{T})$$
$$= p \times Se + (1-p) \times Sp$$
$$= p \times Se + Sp - p \times Sp$$
$$\boxed{= p(Se - Sp) + Sp}$$

3) a) Calculons $\mathbb{P}(T)$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\bar{M} \cap T)$$

d'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\bar{M}) \times \mathbb{P}_{\bar{M}}(T)$$
$$= p \times Se + (1-p) \times (1 - Sp)$$
$$= pSe + 1 - Sp - p + pSp$$
$$\boxed{= p(Se + Sp - 1) + 1 - Sp}$$

b) $VPP = \mathbb{P}_T(M)$

D'après la ~~formule~~ définition. des probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)}$$
$$\boxed{= \frac{pSe}{p(Se + Sp - 1) + 1 - Sp}}$$

Exprimons VPN

$VPN = \mathbb{P}_{\bar{T}}(\bar{M})$

D'après la ~~formule~~ des probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{M} \cap \bar{T})}{\mathbb{P}(\bar{T})}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(\bar{M} \cap \bar{T})}{1 - \mathbb{P}(T)}$$
$$= \frac{(1-p)Sp}{1 - (p(Se + Sp - 1) + 1 - Sp)}$$
$$\boxed{= \frac{(1-p)Sp}{Sp - p(Se + Sp - 1)}}$$

2/3

11730 c) $VPP > p \iff \dfrac{p\,Se}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} > p$

$$\iff \frac{p\,Se}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} - p > 0$$

$$\iff \frac{p\,Se - p\left[p(Se+Sp-1)+1-Sp\right]}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} > 0$$

$$\iff \frac{p\left[Se - \left(p(Se+Sp-1)+1-Sp\right)\right]}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} > 0$$

$$\iff \frac{p\left[Se - Sp - 1 - p(Se+Sp-1)\right]}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} > 0$$

$$\iff \frac{p(Se+Sp-1)(1-p)}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} > 0$$

$p(Se+Sp-1)+1-Sp = \mathbb{P}(T)$ et $\mathbb{P}(T) > 0$

donc $p(Se+Sp-1)+1-Sp > 0$

Sachant que $p \in]0;1[$ donc $p \neq 0$ et $(1-p) > 0$

ce qui entraîne : $Se + Sp - 1 > 0$

$Se + Sp > 1$.

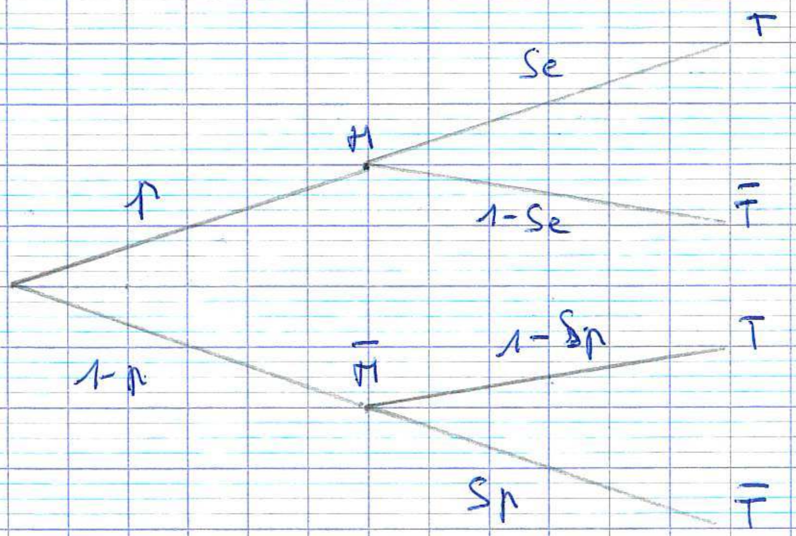
$\frac{5}{5}$

3/3

N° 11775 Vendredi 26 novembre 2021

Devoir libre

1.



2. a. D'après la formule des probabilités conditionnelles :

Justifiez qu'on peut l'utiliser.

$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = p \times Se$

$P(M \cap \bar{T}) = P(M) \times P_M(\bar{T}) = p \times 1 - Se$

$P(\bar{M} \cap T) = P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) = (1-p) \times (1 - Sp)$

$P(\bar{M} \cap \bar{T}) = P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(\bar{T}) = (1-p) \times Sp$

B. La probabilité que le test délivre une juste conclusion est :

Justifiez événements disjoints.

$$P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap \bar{T}) = p \times Se + (1-p) \times Sp$$
$$= p \times Se + Sp - Sp \times p$$
$$= p(Se - Sp) + Sp.$$

~~P(T~~

3.a. $P(T) = p \times Se + (1-p) \times (1-Sp)$ Justifiez.

b. VPP correspond à $P_T(M)$ soit à $\frac{P(M \cap T)}{P(T)}$ d'où :

$$VPP = \frac{p \times Se}{p \times Se + (1-p) \times (1-Sp)}$$

VPN correspond à $P_{\bar{T}}(\bar{M})$ soit à $\frac{P(\bar{M} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})}$ d'où :

$$VPN = \frac{(1-p) \times Sp}{(1-p) \times Sp + p \times (1-Se)}$$

3.c) Voir page 4

4. On remplace p, Se et Sp par les valeurs de l'énoncé, d'où

$$VPP_{Tanzanie} = \frac{0,9 \times 0,9}{0,9 \times 0,9 + (1-0,9) \times (1-0,8)} \simeq 0,98$$

b. $VPP_{Tanzanie} > p$ car $0,98 > 0,9$.

Donc doit-on dire à la personne ?

Avec le résultat ci dessus, le test est donc pertinent en Tanzanie. La personne a une probabilité de 98% d'être malade sachant que le test est positif.
En France : $VPP_{France} < p$ car $0 < 0,01$. Le test n'est donc pas intéressant.

c. $V(p) = \frac{p \times Se}{p \times Se + (1-p) \times (1-Sp)}$

$$= \frac{p \times 0,9}{p \times 0,9 + (1-p) \times (1-0,8)}$$

$$= \frac{p\,0{,}9}{p\,0{,}9 + 0{,}2 \times (1-p)}$$

$$= \frac{p\,0{,}9}{p\,0{,}9 + 0{,}2 - 0{,}2p}$$

$$= \frac{p\,0{,}9}{p\,0{,}7 + 0{,}2}$$

Pas encore vu.

11) Il faut dériver ! sur $[0;1]$. On utilise la formule suivante :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Ici on a $$v'(p) = \frac{0{,}9\,(p\,0{,}7 + 0{,}2) - (p\,0{,}9 \times 0{,}7)}{(p\,0{,}7 + 0{,}2)^2}$$

$$= \frac{\cancel{0{,}63p} + 0{,}18 - \cancel{p\,0{,}63}}{(p\,0{,}7 + 0{,}2)^2}$$

$$= \frac{0{,}18}{(p\,0{,}7 + 0{,}2)^2} > 0$$

D'où on a donc $v'(p) > 0$, ce qui implique que v est strictement croissante sur $[0;1]$

3/4

3.c) On a $P_T(M) > p$

$\dfrac{P(M\cap T)}{P(T)} > p \iff \dfrac{P(M\cap T)}{P(M)} > P(T)$ car $\mathbb{P}(M) > 0$ et $\mathbb{P}(T) > 0$

$\iff \dfrac{\cancel{p}\times Se}{\cancel{p}} > p\times Se + (1-p)\times(1-Sp)$

$\cancel{\iff Se > p\,Se + (1-p)}$

$\cancel{\iff Se > p\,Se + 1 - Sp - p + p\,Sp}$

$\iff Se - p\,Se > (1-p)(1-Sp)$

$\iff \cancel{(1-p)}\,Se > \cancel{(1-p)}(1-Sp)$ car $1-p > 0$

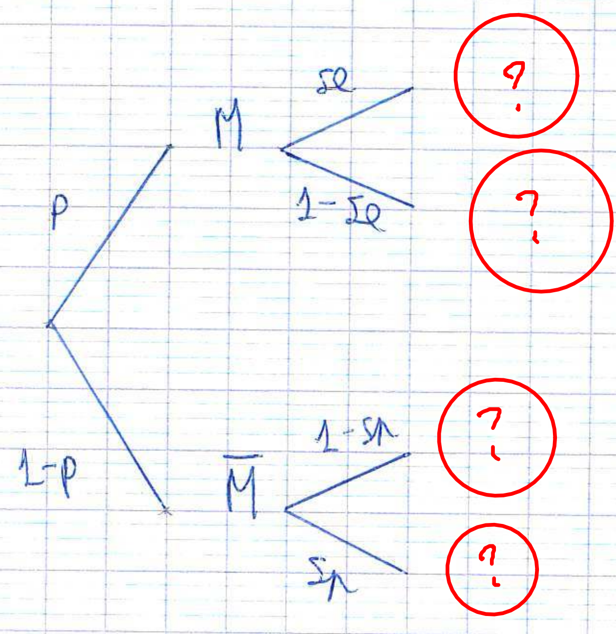
$\iff Se + Sp > 1$

$\dfrac{5}{5}$

11800

Exercice 20

1-



2 (a)

Puisque $\mathbb{P}(M) > 0$ on peut donc utiliser la formule des probabilités composées

~~D'après l'arbre, on a donc~~ En réalité inutile si vous utilisez la formule des probabilités composées.

$\mathbb{P}(\bar{M} \cap T) = (1-p) \times (1-Sp)$

$\mathbb{P}(\bar{M} \cap \bar{T}) = (1-p) \times Sp$

$\mathbb{P}(M \cap T) = p \times Se$

$\mathbb{P}(M \cap \bar{T}) = p \times (1-Se)$

b- J est l'événement « le test délivre une juste conclusion »

Le test est juste si le test est positif et l'individu est malade ou si le test est négatif et l'individu n'est pas malade. Bien

On dirait des valeurs absolues.

Donc $J = (\bar{M} \cap \bar{T}) \cup (M \cap T)$

$$\mathbb{P}(J) = \mathbb{P}(\bar{M} \cap \bar{T}) + \mathbb{P}(M \cap T)$$
$$= (1-p) \times Sp + p \times Se$$
$$= p(Se - Sp) + Sp$$

$$\mathbb{P}(J) = p(Se-Sp) + Sp$$

3 (a)

M et $\bar{M}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\bar{M} \cap T)$$

$\mathbb{P}(M) > 0$ et $\mathbb{P}(\bar{M}) > 0$ donc d'après la formule des probabilités composées.

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$$
$$= p \times Se + (1-p)(1-Sp)$$

b)

$$VPP = \mathbb{P}_T(M)$$

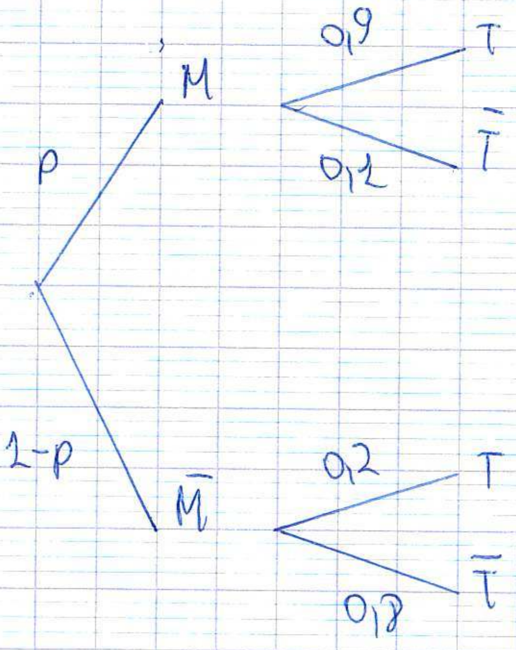
Puisque $\mathbb{P}(T) > 0$:

$$VPP = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)}$$

21700 $VPN_{\text{Tanzanie}} = 0,47$ donc si le test est négatif donc il faut dire au patient que nous n'avons pas pu déterminer si il est malade

Autres cas ?

C) i On peut faire un nouvelle arbre avec $Se = 0,9$ et $Sp = 0,8$



$$v(p) = P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{P(M \cap T)}{P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)}$$

$$= \frac{0,9p}{0,9p + 0,2(1-p)}$$

$$= \frac{0,9p}{0,7p + 0,2}$$

5/6

Donc $v(p) = \frac{9p}{7p+2}$ quelque soit $p \in]0,1[$.

ii Soit $f(x) = 9x$ et
$g(x) = 7x+2$

Pas vu en classe.

$$v' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$v'(x) = \frac{9 \times (7x+2) - 9x \times 7}{(7x+2)^2}$$

$$= \frac{18}{(7x+2)^2}$$

$v' > 0$ sur $]0;1[$ et v est strictement croissante sur $]0;1[$

iii - La fonction v est croissante donc $p > 0{,}8$? et $v(p) > (v(0{,}8))$

$$v(p) > \frac{0{,}9 \times 0{,}8}{0{,}9 \times 0{,}8 + 2}$$ donc $VPP > 0{,}95$

Cela veut dire qu'un patient dont le test est positif a de grande chance d'être malade (supérieur à 0,95. Le test est donc très pertinent

11800 $VPP = \dfrac{p \times Se}{p \times Se + (1-p) \times (1 - Sp)}$

$$VPN = \mathbb{P}_{\bar{T}}(\bar{M})$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\bar{M} \cap \bar{T})}{\mathbb{P}(\bar{T})}$$

$$= \frac{(1-p) \times Sp}{1 - \mathbb{P}(T)}$$

$$= \frac{(1-p) \times Sp}{1 - [p \times Se + (1-p) \times (1 - Sp)]}$$

$$VPN = \frac{(1-p) \times Sp}{Sp - p(Se + Sp - 1)}$$

c) Si $VPP > p$

alors $\dfrac{p \times Se}{p \times Se + (1-p) \times (1 - Sp)} > p$

Pour manipuler les inéquations il faut aussi non nuls.

Sachant que les probabilité sont des nombres positifs donc les nombres considérés sont tous positifs

Donc : $\cancel{p} \times Se > \cancel{p} \times [p \times Se + (1-p)(1 - Sp)]$

$$Se > p \times Se + (1-p) \times (1 - Sp)$$

$$(\cancel{S}1 - p) \times Se > (1-p) \times (1 - Sp)$$

$$Se \times (1-p) > (1-p) \times (1 - Sp)$$

$$Se > 1 - Sp$$

$$Se + Sp > 1$$

Donc si $VPP > 1$ alors $Se + Sp > 1$

4 (a) $p = 0,9$ $Se = 0,9$ $Sp = 0,8$

Donc $VPP_{Tanzanie} = \dfrac{p \times Se}{p \times (Se + Sp - 1) + 1 - Sp}$

$= \dfrac{0,9 \times 0,9}{0,9(0,9 + 0,8 - 1) + 1 - 0,8}$

$= \dfrac{0,81}{0,83} \approx 0,98$

b) En France :

- $VPN_{France} = 0,47$ donc si le test est négatif alors il faut dire au patient qu'il n'est pas malade

- $VPP_{France} = 0$ donc si le test est positif alors il faut dire au malade qu'il est sans doute victime d'un faux positif

En Tanzanie :

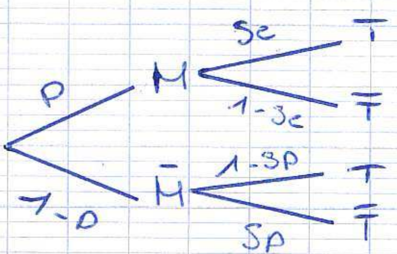
$VPP_{Tanzanie} \approx 0,98$ donc si le test est positif alors il faut dire au malade qu'il est sans doute malade

$\frac{5}{5}$ J'espère que vous avez compris ce que vous écriviez.

Devoir libre : Exercice 20.

Observations : | Note

1) On illustre la situation par un arbre de probabilité.



2a. D'après l'arbre :

$P(M \cap T) = p \times Se$.

$P(\bar{M} \cap T) = (1-p)(1-Sp)$

$P(M \cap \bar{T}) = p \times (1-Se)$

$P(\bar{M} \cap \bar{T}) = (1-p) \times Sp$.

2b. La probabilité que le test delivre une conclusion juste est : $P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap \bar{T}) = p \times Se + (1-p) \times Sp = p \times Se + Sp - p \times Sp = p(Se - Sp) + Sp$.

3) Il y a :

- La valeurs predictive positive du test (VPP), la probabilité $P_T(M)$ d'etre malade, sachant que le test est positif.
- La valeur predictive negative du test (VPN) la probabilité $P_{\bar{T}}(\bar{M})$ d'être non malade, sachant que le test est negatif.

3a. D'après la formule des probabilités totales on a :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = pSe + (1-p)(1-Sp) =$

$pSe + 1 - p - Sp + pSp =$

$p(Se + Sp - 1) + 1 - Sp$.

3b. $VPP = P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{pSe}{p(Se+Sp-1)+1-Sp}$.

$$VPN = P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{P(\bar{M} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})}$$

$$= \frac{P(\bar{M} \cap \bar{T})}{1 - P(T)}$$

$$= \frac{(1-p)\,Sp}{1-(p(Se+Sp-1)+1-Sp)}$$

$$= \frac{(1-p)\,Sp}{Sp - p(Se+Sp-1)}$$

3c. Montrons que $Se + Sp > 1$.

Le test est considéré comme intéressant si $VPP > p$.

$$VPP > p \iff \frac{pSe}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} > p \iff \frac{pSe}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} - p > 0$$

$$\iff \frac{p(Se-(p(Se+Sp-1)+1-Sp))}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} > 0$$

$$\iff \frac{p(Se+Sp-1-p(Se+Sp-1))}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} > 0$$

$$\iff \frac{p(Se+Sp-1)(1-p)}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} > 0$$

$\cancel{P}p(Se+Sp-1)+1-Sp = P(T)$ donc $p(Se+Sp-1)+1-Sp > 0$

$p \in]0;1[$ donc $p > 0$ et $1-p > 0$ donc

$\frac{p(Se+Sp-1)(1-p)}{p(Se+Sp-1)+1-Sp} > 0$ entraîne $Se + Sp - 1 > 0$ donc $Se + Sp > 1$.

$\frac{4,5}{5}$