Radians, valeurs remarquables de sinus et cosinus.

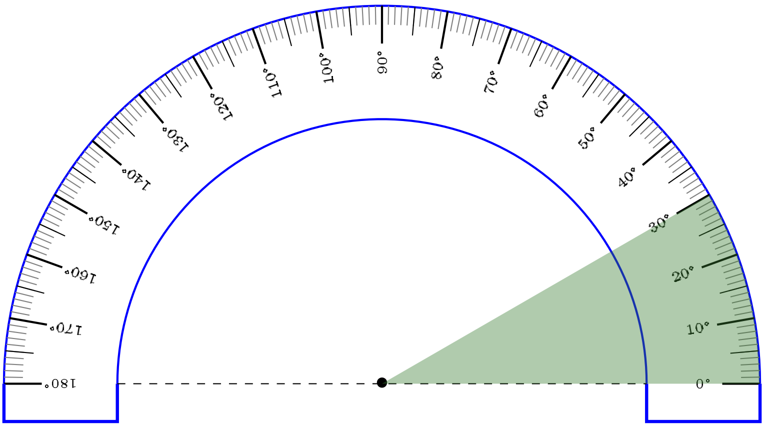
I Radians.

1 Cercle trigonométrique.

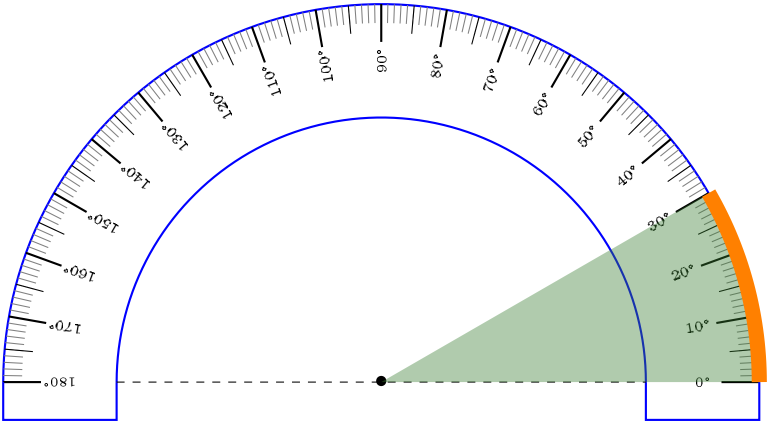
Diapositives : (pdf) et (tex).

Il y a diverses raisons qui ont amené à abandonner au fur et à mesure les mesures d'angles en degré. Nous en verrons plus tard. Pour l'instant découvrons cette nouvelle façon de faire.

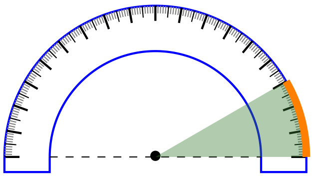
Les degrés représentent une proportion de disque. 30° c'est 30 parts du gâteau découpé en 360 morceaux. Si bien qu'en tant que proportion une mesure d'angle n'a pas d'unité.



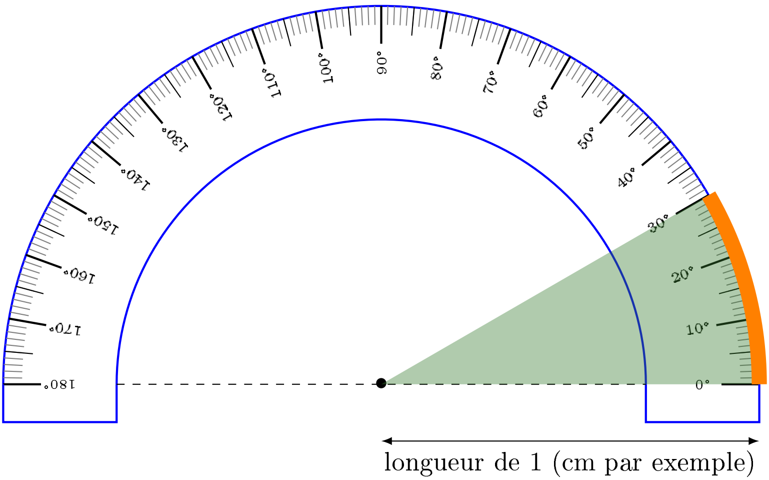
Pour mesurer un angle nous allons nous ramener à une unité du système international, à savoir, le mètre : nous allons mesurer la longueur de l'arc de cercle correspondant à l'angle.



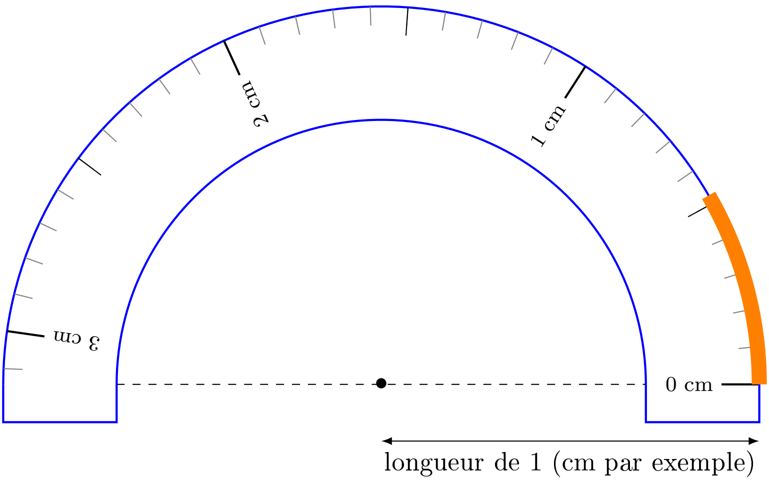
Il y a un problème : si le cercle (le rapporteur) à un plus petit rayon alors l'arc aussi est plus petit.



Il faut donc choisir une convention pour la taille du rapporteur : pour mesurer un angle il faut choisir un cercle-rapporteur de rayon 1.

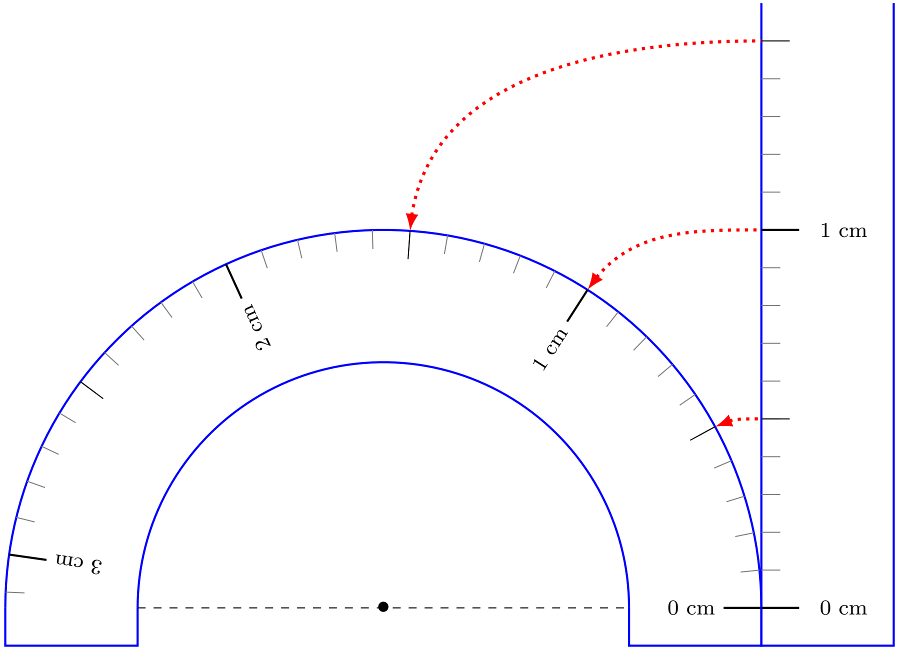


Nous choisissons comme graduation les longueurs sur le cercle en partant de la graduation zéro.

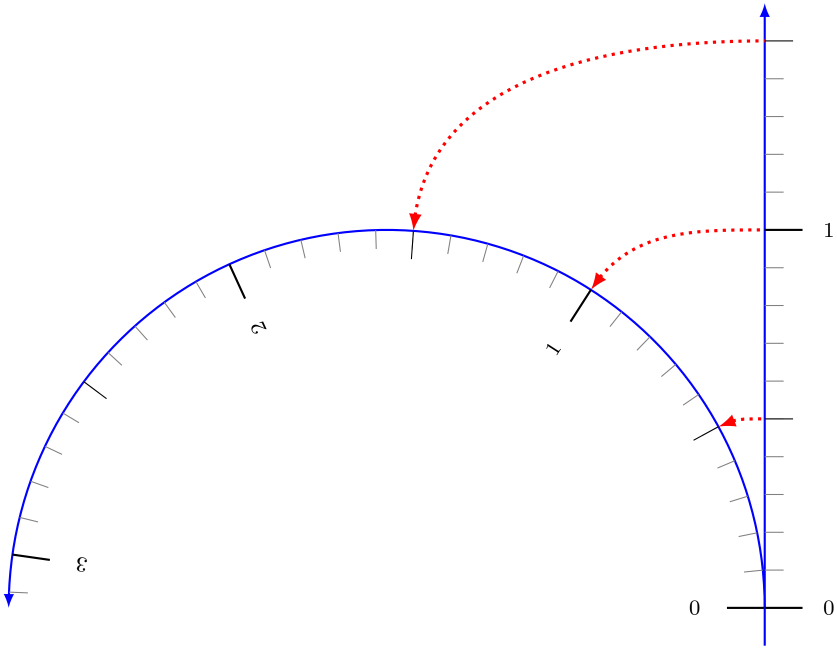


Nous reconnaissons des graduations habituelles. Il est naturel de les prolonger.

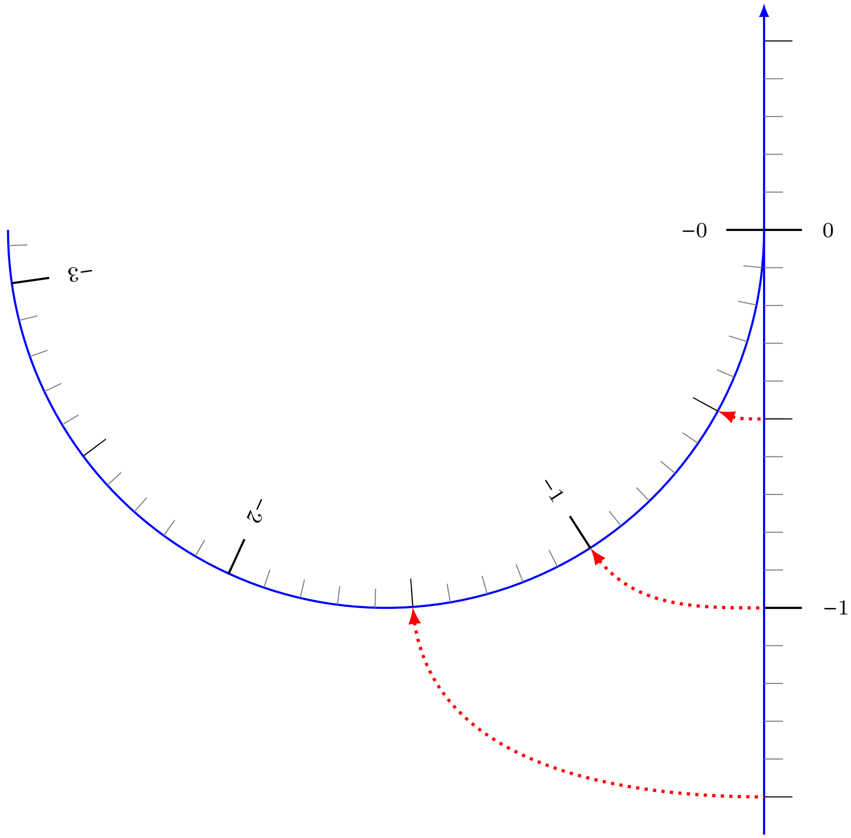
Tous ce passe comme si nous avions enrouler une règle graduée autour d'un cercle de rayon 1 cm.



Maintenant que nous voyons ce qui ce passe faisons un effort d'abstraction : nous venons d'entourer la droite des réels autour du cercle de rayon 1.

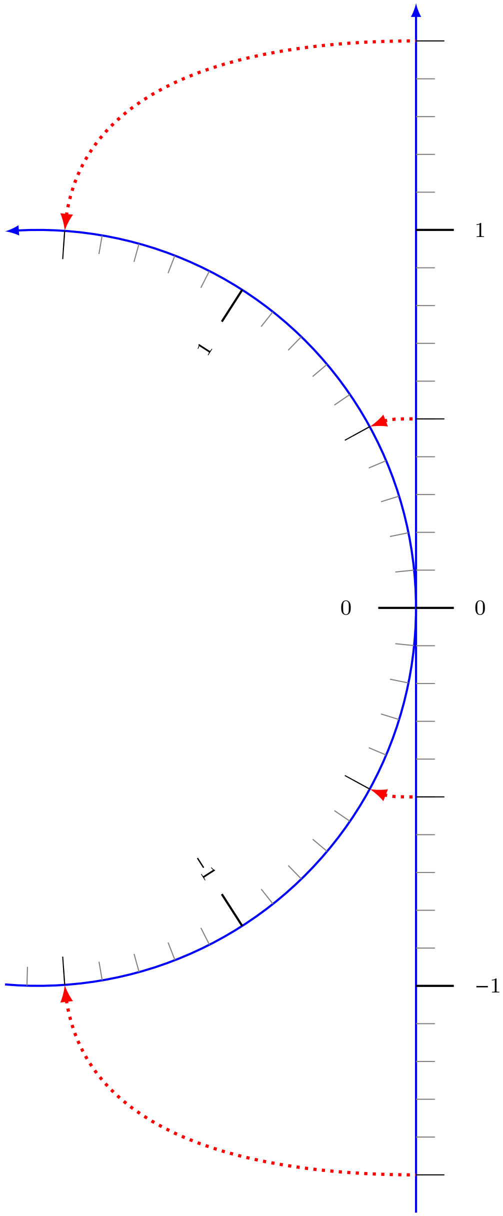


Mais s'il s'agit de la droite des réels nous pouvons tout aussi bien enrouler les nombres négatifs :



Reprenons la construction de cette nouvelle unité au propre.

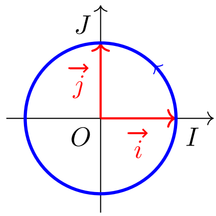
Nous nous pouvons nous débarrasser des unités de longueur qui appartiennent à la science physique pas à la mathématique. considérons un cercle de rayon 1 et enroulons l'axe des réels autour :



Ainsi lorsque nous enroulons dans le sens directe c'est en positif quand nous enroulons dans le sens contraire c'est en négatif.

Définition 1

Étant donné un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, nous appellerons *cercle trigonométrique* le cercle de centre O, de rayon 1 muni d'un sens de parcours appelé *sens trigonométrique* (sens inverse des aiguilles d'une montre).



Remarques.

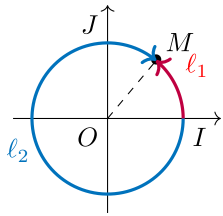
1. Le cercle trigonométrique sera le rapporteur abstrait des mathématiciens.
2. Le sens trigonométrique est aussi appelé *sens direct*. C'est un sens conventionnel qui apparaît autant en physique qu'en mathématiques.

Définition 2

Soit M un point sur le cercle trigonométrique. *Une mesure en radian* de l'angle $\widehat{IOM}$ est

— la longueur ℓ_1 de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ si le déplacement de I vers M se fait dans le sens trigonométrique

— l'opposée de la longueur ℓ_2 de l'arc de cercle si le déplacement se fait dans le sens opposé.



Faire une manipulation de ce que serait une mesure d'un angle en radian avec un rapporteur.

Remarques.

1. Voici une animation qui illustre l'enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique en Geogebra : fichier Geogebra à ouvrir avec l'application ou ici en ligne site Geogebra.
2. Les angles sont donc orientés. $\widehat{IOM}$ et $\widehat{MOI}$ ont des mesures opposées.
3. Nous utiliserons souvent une notation des angles avec des vecteurs : plutôt que $\widehat{IOM}$ nous écrirons $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.

4. Il est possible de faire plusieurs tours de cercle avant de s'arrêter sur le point M pour définir un angle. Un angle aura donc de nombreuses mesures en radian (longueurs d'arc) possibles.
5. Le radian n'est pas une unité au sens de la science physique puisque c'est un nombre sans dimension : c'est le rapport de la longueur de l'arc de cercle sur la longueur du rayon.
6. Pour un point M du cercle trigonométrique il y a une infinité de mesures d'angles en radian qui lui corresponde. Si θ est une mesure de $\widehat{IOM}$ alors $\theta + 2\pi$, $\theta + 2 \times 2\pi$, $\theta + 3 \times 2\pi$, ..., $\theta - 2\pi$, $\theta - 2 \times 2\pi$, $\theta - 3 \times 2\pi$, ..., sont aussi des mesures en radian correspondant au point M.
7. Nous appellerons *mesure principale d'un angle* la mesure en radian correspondant au même point et qui est dans $]-\pi;\pi]$.

2 Des mesures en radian remarquables.

Cette nouvelle façon de mesurer présente un gros inconvénient. Il est un angle que nous rencontrons souvent et qui est important c'est l'angle droit. Or si nous essayons de lire la mesure en radian de l'angle droit nous n'obtenons qu'une valeur approchée : 1,57.

Nous ne pourrons jamais donner une valeur exacte sous forme décimale de cette mesure.

Cependant il est possible de l'exprimer simplement.

Un angle droit correspond à un quart de la longueur du cercle. Or la longueur d'un cercle de rayon 1 est 2π donc l'angle droit a une mesure égale $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Les mesures d'angles usuelles qu'il faut pouvoir exprimer aisément en radian :
— 360° (angles plein),
— 180° (angle plat),
— 90° (angle droit),
— 60° (angle du triangle équilatéral),
— 45° (angle d'un triangle isocèle-rectangle),
— 30°.

Exercice 1. ♥

Si la méthode de conversion est à retenir, les valeurs obtenues sont classiques et doivent être apprises par cœur.

Par proportionnalité déterminez les mesures en radian exprimées avec π des angles usuels :

Mesure en degré	360	180	90	60	45	30
Mesure en radian	2π					

Correction exercice 1

Mesure en degré	360	180	90	60	45	30
Mesure en radian	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Exercice 2. ♥

Placez sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E, F associés aux mesures en radian :

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{4\pi}{3}, \quad \frac{-2\pi}{3}.$$

Correction exercice 2

Exercice 3. Application.

Placez sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E, F associés aux mesures en radian :

$$\frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4}, \quad \frac{2\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{19\pi}{4}, \quad \frac{-7\pi}{4}.$$

II Cosinus et sinus d'un nombre réel.

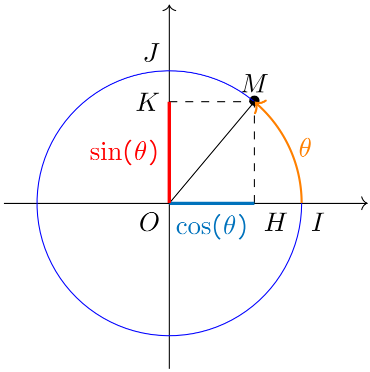
1 Nouvelle définition.

Les cosinus et sinus ont été définis au collège, mais uniquement pour des angles d'un triangle rectangle, donc d'une mesure entre 0° et 90°. Or les skateurs ou les patineurs le savent il est tout à fait possible d'envisager des angles de plus de 360°, il faut donc trouver une définition qui généralise celle du collège. D'autant que nous venons de définir une mesure d'angle qui autorise toutes les valeurs réelles.

Définition 3

Soit un angle de mesure θ en radian, repéré par un point M sur le cercle trigonométrique.

Nous définirons désormais :
- $\cos(\theta)$ comme l'abscisse de M,
- $\sin(\theta)$ comme l'ordonnée de M.



Remarques.

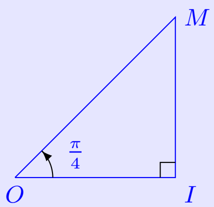
1. Cette définition permet d'étendre les notions de cosinus et sinus vues au collège.
   Les deux définitions coïncident (pour un angle compris entre 0° et 90°) :
   $$\cos\left(\widehat{IOM}\right) = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH = \cos(\theta)$$
   et
   $$\sin\left(\widehat{IOM}\right) = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM = OK = \sin(\theta).$$
   Par conséquent les raisonnements faits depuis le collège et jusqu'à présent restent licites.
2. Avec cette définition le cosinus et le sinus peuvent prendre des valeurs négatives.
3. Clairement, en considérant les abscisses et ordonnées des points du cercle trigonométrique, pour tout angle α
   $$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$
   $$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$$

2 Des valeurs remarquables de sinus et cosinus.

Les deux exercices qui suivent doivent être faits avec les outils et méthodes du collège.

Exercice 4.

Soient OIM un triangle rectangle en I tel que $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{4}$.



1. (a) Donnez une mesure en degré de $\widehat{IOM}$.
   (b) Justifiez que OIM est isocèle.
   (c) Exprimez OI en fonction de OM.
2. Déterminez, grâce à la définition du cosinus vue au collège, une expression de OI en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et OM.
3. Nous supposons de plus que $OM = 1$. Déduisez-en une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Correction exercice 4

1. (a) Par proportionnalité

2π	$\frac{\pi}{4}$
360	45

$\widehat{IOM}$ mesure 45°.

(b) La somme des mesures des angles d'un triangle doit être égale à 180° donc (en degré)

$$45 + 90 + \widehat{OMI} = 180.$$

D'où : $\widehat{OMI} = 180 - 90 - 45 = 45$.
Ainsi $\widehat{OMI} = \widehat{IOM}$ et par conséquent

OIM est isocèle en I.

(c) OIM est rectangle en I donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$OI^2 + IM^2 = OM^2.$$

Comme de plus OIM est isocèle en I :

$$2OI^2 = OM^2$$

ce qui équivaut à

$$OI^2 = \frac{1}{2}OM^2$$

Puisque OI est une longueur nécessairement :

$$\begin{aligned} OI &= \sqrt{\frac{1}{2} OM^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{OM^2} \\ &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{OM^2} \\ &= \frac{\sqrt{1} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \cdot \sqrt{OM^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{OI = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{OM^2}.}$$

2. Puisque OIM est rectangle en I

$$\cos\left(\widehat{IOM}\right) = \frac{OI}{OM}.$$

Donc

$$\boxed{OI = OM \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).}$$

3. Des deux questions précédentes nous déduisons par transitivité

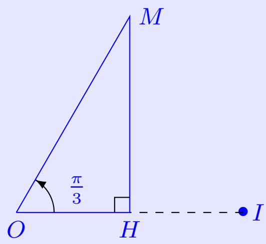
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{OM^2} = OM \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Et puisque OM est une longueur donc un nombre positif :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

Exercice 5.

Soient OHM un triangle rectangle en H tel que $OM = 1$ et $\widehat{HOM} = \frac{\pi}{3}$, I le symétrique de O par rapport à H.



1. (a) Donnez une mesure en degré de $\widehat{HOM}$.
   (b) Justifiez que $OI = 1$.
   (c) Déduisez-en la longueur OH.
2. En utilisant la définition du cosinus vue au collège donnez une égalité liant OH et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Puis déduisez-en une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
3. En remarquant que $MH = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, trouvez une expression radicale de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Correction exercice 5

1. (a) Par proportionnalité

2π	$\frac{\pi}{3}$
360	60

$\widehat{IOM}$ mesure 60°.

   (b) Puisque $\widehat{HOM} = 60°$ et puisque I est le symétrique de O par rapport à H, nécessairement $\widehat{MIH} = 60°$.
   Le triangle IOM ayant deux angles dont la mesure est 60° il est donc équilatéral.
   Comme $OM = 1$ finalement

$OI = 1.$

   (c) Puisque I est le symétrique de O par rapport à H :

$$OH = \frac{1}{2}OI.$$

$OH = \frac{1}{2}.$

2. Puisque OHM est rectangle en H

$$\cos\left(\widehat{HOM}\right) = \frac{OH}{OM}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{OH}{1}$$

Donc

$$\boxed{OH = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).}$$

En tenant compte du résultat de la question précédente

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.}$$

3. La somme des mesures des angles d'un triangle vaut π donc $\widehat{HOM} = \frac{\pi}{6}$.
   En utilisant la définition de collège du cosinus nous obtenons bien $MH = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

   Le triangle OHM est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore : $HM = \sqrt{\frac{3}{4}}$.
   Donc

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Le résultat à connaître par cœur est le suivant. ♥

θ (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Placer les valeurs remarquables ur le cercle trigonométrique.

Exercice 6.

Par des arguments de symétrie, par simple lecture graphique sur le cercle trigonométrique comparez :

1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$,
2. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$,
3. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$,
4. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)$.
5. $\cos(\theta)$ et $\cos(\pi-\theta)$,
6. $\sin(\theta)$ et $\sin(-\theta)$,
7. $\cos(\theta)$ et $\cos(\theta-\pi)$,
8. $\cos(\theta)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$,
9. $\cos(\theta)$ et $\cos(-\theta)$.