Généralités sur les suites.

I Définition.

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Nous appellerons *suite numérique réelle* toute application

$$u : \{p,\ p+1,\ p+2,\ \ldots\} \to \mathbb{R}.$$

Remarques.

1. Nous pouvons donc utiliser la notation fonctionnelle pour les suites : $u(n)$. L'usage, respectant en cela l'intuition, lui préfère la notation indicielle : u_n. Mathématiquement les deux notations sont équivalentes. Nous pourrions par exemple noter $(x^2)_{x\in\mathbb{R}}$ la fonction carrée.
2. La plus petite valeur de l'ensemble de définition de la suite n'est pas toujours 0. Autrement dit, le rang du terme initial de la suite n'est pas forcément 0.
3. Si $p \in \mathbb{N}$ est le rang du terme initial d'une suite u alors nous la noterons le plus souvent $(u_n)_{n\geqslant p}$.

II Génération de suites.

Il y a deux façons calculatoires usuelles de définir une suite : de *façon explicite* ou bien *par récurrence*.

Nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est définie de façon explicite si il existe une formule de calcul en fonction de n qui permet de calculer les termes de la suite.
Le plus souvent la formule de calcul est associée à une fonction numérique f définie au moins sur $\mathbb{R}_+$. Nous noterons alors parfois $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous dirons qu'une suite est définie par récurrence si les termes de la suite se déterminent en fonction des termes précédents de la suite.
La formule de récurrence est souvent associée à une fonction numérique réelle f telle que : $f(u_n) = u_{n+1}$.

Exercice 1.
Déterminez la formule explicite pour une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant p}$ où $p \in \mathbb{N}$.
Même question pour une suite géométrique.

Exercice 2.

Suite de Fibonacci.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et telle que

$$\text{quelque soit } n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (P).$$

1. Nous souhaitons déterminer les suites géométriques qui vérifient la propriété (P).
   (a) Soit (v_n) est une suite géométrique dont la formule explicite est $v_n = v_0 q^n$ avec $v_0 \neq 0$.
   Montrez que si (v_n) vérifie la propriété (P) alors forcément q est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   (b) Résolvez l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Vous noterez α et β les solutions.
2. Démontrez que la suite définie par $w_n = a\alpha^n + b\beta^n$ avec a et b des réels quelconques vérifie la propriété (P).
3. Déduisez-en une formule explicite de la suite de Fibonacci.
4. Calculez la somme S_n des n premiers termes de la suite de Fibonacci en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

III La variation d'une suite.

Une suite est dite croissante si elle est croissante en tant que fonction de la variable n. Il en est de même pour les expressions « décroissante », « strictement croissante » et « strictement décroissante ».

1 Cas général.

Théorème 1

Soient :
. $p \in \mathbb{N}$,
. $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite numérique.

$(u_n)_{n\geqslant p}$ est strictement croissante si et seulement si

$$\text{quelque soit } n \geqslant p :\ u_{n+1} - u_n > 0.$$

Remarques.

1. Ce résultat est incontournable en particulier pour les suites définies par récurrence.
2. Ce résultat est en fait une expression simplifiée de la définition générale de fonction strictement croissante pour des fonctions définies sur des entiers naturels.
3. Une analogie avec les suites arithmétiques est possible. Nous regardons si la raison (qui ici est en fait variable), c'est à dire la variation absolue entre deux termes consécutifs est positive ou non. Comme pour les suites arithmétiques : si la raison est positive alors la suite est croissante.

Exercice 3.

Énoncez des résultats similaires pour : croissante, strictement décroissante, puis, décroissante.

Exercice 4.

Étudiez le sens de variation de la suite u dans les cas suivants.

1. Pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + 5$.
2. $u_n = n + \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_{n+1} = u_n - n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$.
4. $u_n = n^2 - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_n = n^2 - 5n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 3^n - 5$.
7. $u_0 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2$.
8. $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{u_n}$.
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 8$.
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 0{,}5^n$.

Exercice 5. Application.

Exercice 53 page 87 du manuel Indice.

2 Pour les suites à termes strictement positifs.

Proposition 1

Soient :

. $p \in \mathbb{N}$,

. $(u_n)_{n\geqslant p}$ dont tous les termes sont strictement positifs.

(i) Si quelque soit $n \geqslant p$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$
alors $(u_n)_{n\geqslant p}$ est strictement croissante.

(ii) Si quelque soit $n \geqslant p$:
$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$
alors $(u_n)_{n\geqslant p}$ est strictement décroissante.

Remarques.

1. Il faut évidemment que la suite ne s'annule pas car il est impossible de diviser par 0.
2. Le cas $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, pour tout $n \geqslant p$, n'aurait tout simplement pas de sens puisque la suite ne doit pas s'annuler.
3. Le cas $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ correspond à une suite constante.
4. Une analogie avec les suites géométriques est possible. Nous regardons si la raison (qui ici est en fait variable), c'est à dire le coefficient multiplicateur entre deux termes consécutifs est strictement supérieur à 1. Comme pour les suites arithmétiques : si la raison est strictement supérieure à 1 alors la suite est strictement croissante.

Exercice 6.

Étudiez les variations des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_n = 3^{2n^2+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_n = \dfrac{3^n \times 2^{n+1}}{3^{2n} \times 2^n}$.

3 Suite définie par une formule explicite.

Proposition 2

Soient :

. $p \in \mathbb{N}$,

. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement croissante sur $[p; +\infty[$ alors la suite $(f(n))_{n \geqslant p}$ est strictement croissante.

Remarques.

1. Nous avons des résultats semblables pour des fonctions diversement monotones : strictement décroissante, croissante et décroissante.
2. Ce résultat signifie que la connaissance de la monotonie de la fonction f permet de connaître celle de $(f(n))_{n \geqslant p}$.
3. La réciproque est fausse.
4. Ce résultat deviendra particulièrement intéressant quand nous saurons étudier les variations d'une fonction grâce à la fonction dérivée.

Exercice 7.

Exercice 54 page 87 du manuel Indice.

Exercice 8.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculez les quatre premiers termes de cette suite.
2. Soit n un entier naturel. Exprimez u_{n+4} en fonction de u_n.
3. Déduisez-en les valeurs de u_{2012}, u_{2013}, u_{2014} et u_{2015}.

IV Utilisation d'une suite auxiliaire.

Exercice 9.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}9u_n + 90 \\ u_0 = 1000 \end{cases}$$

1. Calculez $u_1$et u_2.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout nombre entier naturel n par $v_n = u_n - 900$.
   (a) Calculez v_0 et v_1.
   (b) Montrez que pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}9v_n$.
   (c) Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Écrivez v_n en fonction de n.
3. Déduisez-en pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 100 \times 0{,}9^n + 900$.
4. Déterminez à l'aide la calculatrice de la valeur de laquelle semble se rapprocher u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
5. À partir de quel nombre entier n a-t-on $u_n \leqslant 901$?

Exercice 10.

Soient $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$w_n = -n^2 + 2n \quad \text{et} \quad S_n = w_{n+1} - w_n.$$

1. Exprimez w_{n+1} en fonction de n.
2. Déduisez-en l'expression de S_n en fonction de n.
3. Exprimez S_{n+1} en fonction de n.
4. Déduisez-en que $S_{n+1} - S_n = -2$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifiez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrez que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2$ est une suite arithmétique.
3. Donnez l'expression du terme général v_n en fonction de n.
4. Déduisez-en l'expression de u_n en fonction de n.
5. Trouvez la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 50$.

Exercice 12.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+3u_n}$.

1. Calculez u_2 et u_3.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?
3. On suppose que pour tour entier naturel n, $u_n \neq 0$ et on définie la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.
   (a) Montrez que la suite (v_n) est arithmétique et donnez ses éléments caractéristiques.
   (b) Donnez l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Donnez l'expression de u_n en fonction de n.
4. Étudiez la monotonie de la suite (u_n).
5. Montrez que pour tour n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$.

V Convergence et divergence.

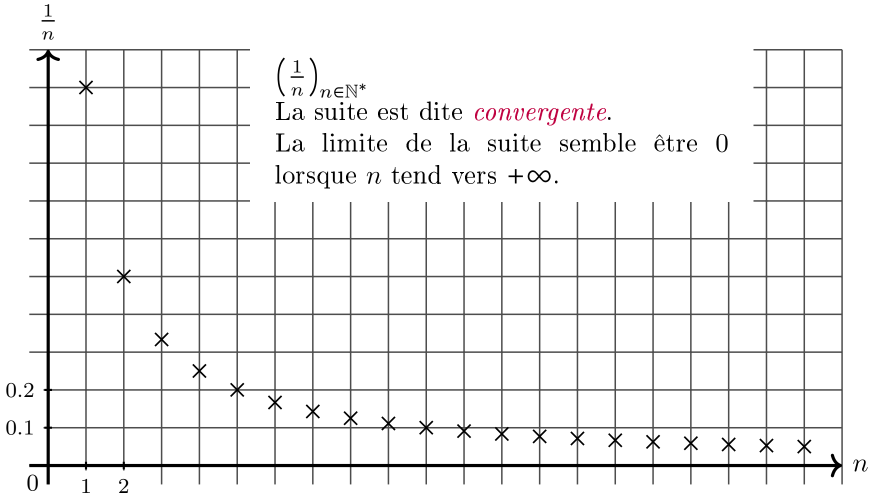
1 Avec une représentation graphique.

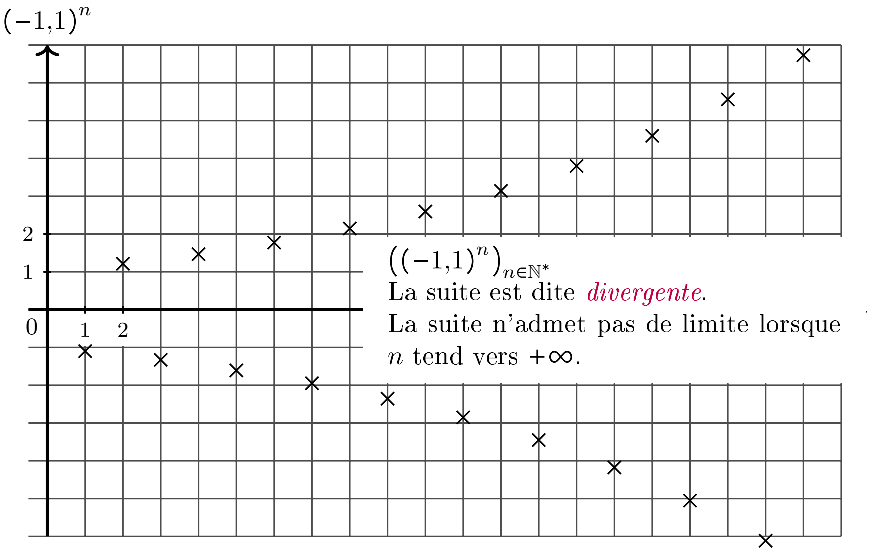
Nous voudrions dans une approche intuitive essayer de conjecturer ce qu'il advient d'une suite lorsque n devient très grand. Idéalement nous dirons lorsque « n tend vers $+\infty$ ».

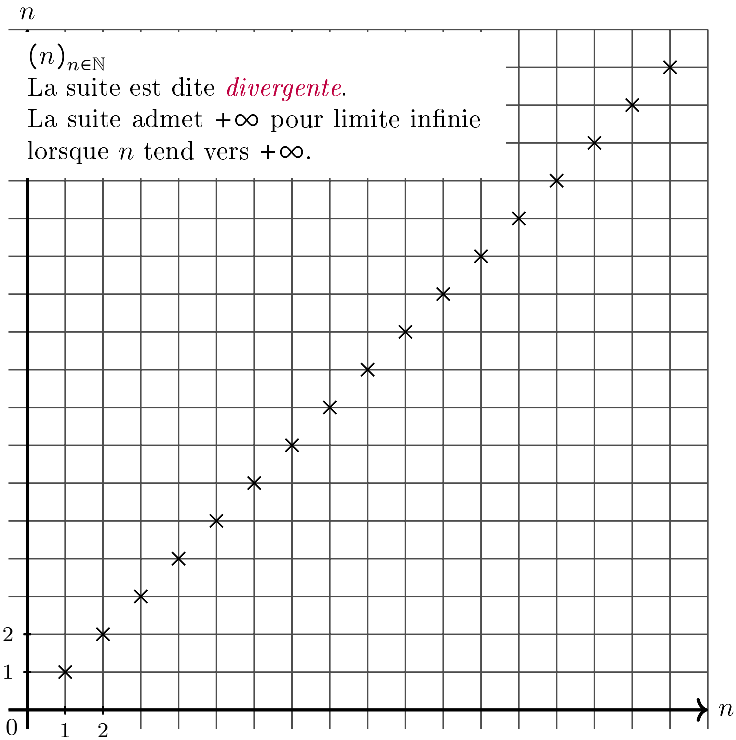
Nous ne verrons pas de définition théorique de ces notions, elles seront étudiées en terminales.

Étudions trois exemples de suites définie explicitement à partir de leur représentation graphique.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \left((-1{,}1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad (n)_{n\in\mathbb{N}}.$$


$\frac{1}{n}$
$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
La suite est dite *convergente*.
La limite de la suite semble être 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
0.2
0.1
0
1
2
n


$(-1{,}1)^n$
$\left((-1{,}1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
La suite est dite *divergente*.
La suite n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.
2
1
0
1
2

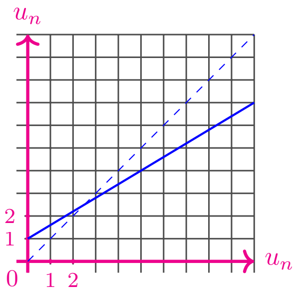


Dans les exemples précédents le suites était définies explicitement ce qui permet d'obtenir facilement une représentation graphique. Qu'en est-il pour les suites définies par récurrence ?

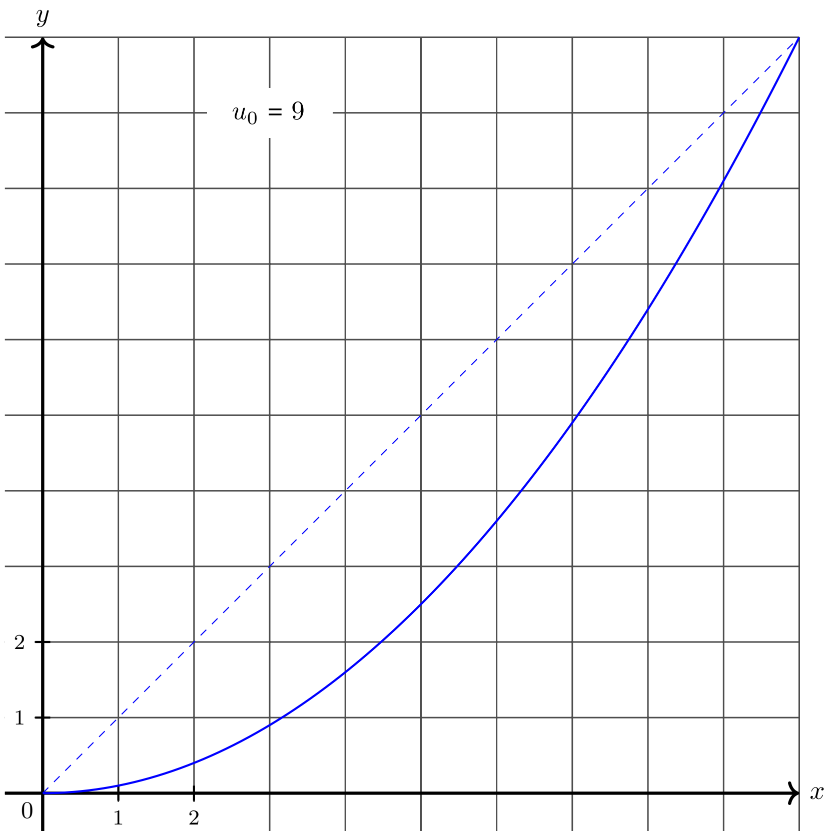
2 Une autre représentation graphique pour une suite définie par récurrence.

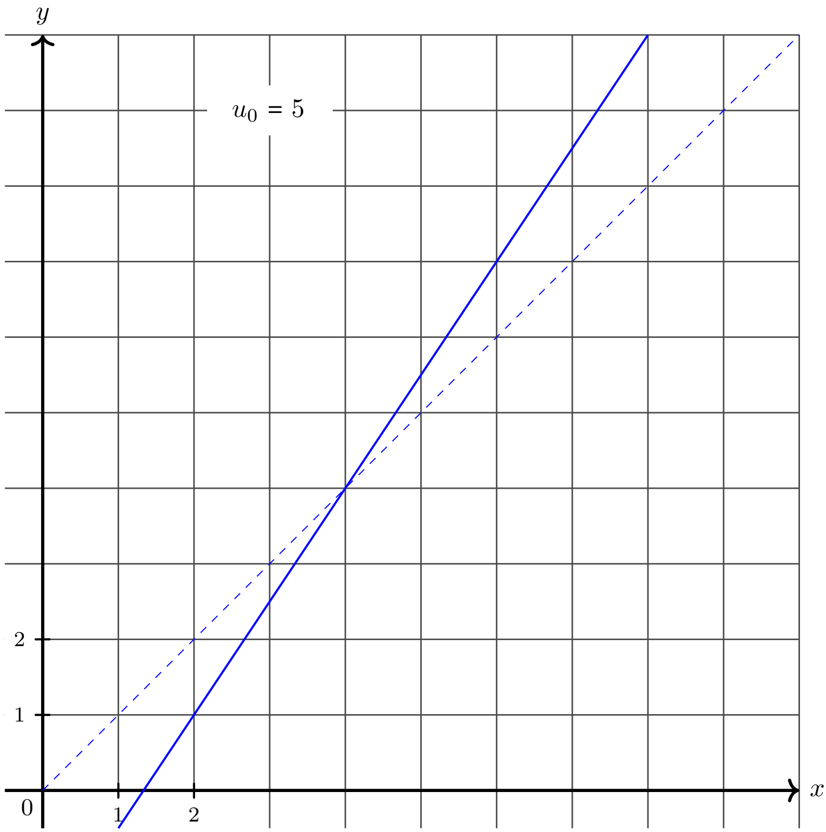
Lorsqu'une suite est définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel nous utiliserons une nouvelle représentation graphique de la suite qui permet une construction géométrique des termes successifs de la suite.

Cliquez sur l'image pour voir le diaporama.



$x \mapsto 0{,}6x + 1$
$u_{n+1} = f(u_n)$
et $u_0 = 9$





3 Conjecturer avec des outils informatiques.

VI Exercices.

Exercice 13.
Exercices utilisant des listes Python 3 : exercices 63 à 66 page 88 du manuel Indice.

Exercice 14.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. De quelle façon est définie la suite (u_n) ?
2. Donnez l'expression de la fonction f telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. Représentez graphiquement la fonction f, puis représentez les cinq premiers termes de la suite sur ce graphique.
4. Que pouvez-vous conjecturer quant aux variations de cette suite ?
5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n, par $v_n = \frac{u_n+2}{u_n-2}$. Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
6. Déduisez-en v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

Exercice 15.

1. On considère le nombre B dont l'écriture décimale illimitée est $0{,}375\,375\,375\ldots$ où 375 est répété indéfiniment. Le nombre B est-il rationnel ? Justifiez votre réponse.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme $u_1 = 0{,}375$ et $u_{n+1} = 10^{-3}u_n$ pour tout entier n.
   (a) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   (b) On considère pour tout entier naturel n, la somme S_n des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a donc $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. Exprimez S_n en fonction de n.
3. Conjecturez la valeur de $\lim_{n\to+\infty} 10^{-3n}$.
4. Déduisez-en $\lim_{n\to+\infty} S_n$. Que représente ce nombre par rapport à B ?