Généralités sur les suites.

Nous avons déjà découvert et étudié les suites arithmétiques et géométriques. Nous allons maintenant généraliser les notions, notations et résultats vus sur les suites.

I Définition.

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Nous appellerons *suite numérique réelle* toute application

$$u : \{p,\ p+1,\ p+2,\ \dots\} \to \mathbb{R}.$$

Exemples.

1. La suite arithmétique de terme initial 37 et de raison $\frac{1}{2}$ est l'application
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \frac{1}{2} \times n + 37 \end{array} \right. .$$
2. La suite géométrique de terme initial 7 et de raison $\frac{3}{7}$ est l'application
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 7 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n \end{array} \right. .$$
3. L'application qui a tout entier naturel $n \geqslant 3$ associe le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés est une suite.
4. L'application qui a tout entier naturel n associe la somme des carrés des chiffres qui compose le nombre n est une suite. Il semble compliquer de trouver une expression explicite pour cette suite.
5. $u : \{0,\ 1,\ 2\} \to \mathbb{R}$ n'est pas une suite car son domaine de définition est fini.

Remarques.

1. Nous pouvons donc utiliser la notation fonctionnelle pour les suites : $u(n)$. L'usage, respectant en cela l'intuition, lui préfère la notation indicielle : u_n. Mathématiquement les deux notations sont équivalentes. Nous pourrions par exemple noter $(x^2)_{x\in\mathbb{R}}$ la fonction carrée.

2. La plus petite valeur de l'ensemble de définition de la suite n'est pas toujours 0. Autrement dit, le rang du terme initial de la suite n'est pas forcément 0.
3. Si $p \in \mathbb{N}$ est le rang du terme initial d'une suite u alors nous la noterons le plus souvent $(u_n)_{n \geqslant p}$.

II Génération de suites.

Il y a deux façons calculatoires usuelles de définir une suite : de *façon explicite* ou bien *par récurrence*.

Nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant p}$ est définie de façon explicite si il existe une formule de calcul en fonction de n qui permet de calculer les termes de la suite.

Le plus souvent la formule de calcul est associée à une fonction numérique f définie au moins sur $\mathbb{R}_+$. Nous noterons alors parfois $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples.

1. La suite arithmétique de terme initial $u_2 = 4$ et de raison 7 est définie de façon explicite par : $u_n = 4 + 7(n-2)$.
2. $\left(n^2+3\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite définie de façon explicite qui est associée à la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+3 \end{array} \right.$.
3. Si $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^3-8}$ alors $(f(n))_{n \geqslant 3}$ est une suite définie de façon explicite.
4. $\left(7^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite définie de façon explicite bien que nous ne puissions pas, pour l'instant l'associer à une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.

Nous dirons qu'une suite est définie par récurrence si les termes de la suite se déterminent en fonction des termes précédents de la suite.

La formule de récurrence est souvent associée à une fonction numérique réelle f telle que : $f(u_n) = u_{n+1}$.

Exemples.

1. La suite géométrique de terme initial $u_7 = 3$ et de raison $q = 5$ est donnée par la formule de récurrence : $u_{n+1} = 7 \times u_n$ pour tout $n \geqslant 7$. Autrement dit : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto 7x$.
2. La suite de Fibonacci est définie par $u_0 =$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Remarquons avec cet exemple qu'une formule de récurrence peut lier plus de termes de rangs différents de la suite. Nous dirons que la suite de Fibonacci est une suite récurrente d'ordre 2.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est définie par récurrence.

Exercice 1.
Déterminez la formule explicite pour une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant p}$ où $p \in \mathbb{N}$.
Même question pour une suite géométrique.

Correction de l'exercice 1 ....

Démontrons la formule explicite pour une suite arithmétique.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant p$.
Nous allons déterminer la formule explicite de u_k.
Puisque $(u_n)_{n\geqslant k}$ est une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_p on a successivement :

$$u_{p+1} = u_p + r$$

On remarque que r est multiplié par $p + 1 - p$.

$$\begin{aligned} u_{p+2} &= u_{p+1} + r \\ &= u_p + 2r \end{aligned}$$

On remarque que r est multiplié par $p + 2 - p$.

$$\begin{aligned} u_{p+3} &= u_{p+2} + r \\ &= u_p + 3r \end{aligned}$$

On remarque que r est multiplié par $p + 3 - p$.

$$u_{p+4} = u_p + 4r$$

On remarque que r est multiplié par $p + 4 - p$.

$$u_{p+5} = u_p + 5r$$

On remarque que r est multiplié par $p + 5 - p$. Par itération (en recommençant de même) nous en déduisons que pour u_k, r est multiplié par $k - p$:

$$u_k = u_p + (k - p)r$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant\Longrightarrow u_k = u_p + -k - p)r.}$$

En procédant de même pour la suite géométrique :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant\Longrightarrow u_k = u_p \times q^{k-p}.$$

. . . . fin de la correction de l'exercice 1.

Exercice 2.

Suite de Fibonacci.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et telle que

$$\text{quelque soit } n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (P).$$

1. Nous souhaitons déterminer les suites géométriques qui vérifient la propriété (P).
   (a) Soit (v_n) est une suite géométrique dont la formule explicite est $v_n = v_0 q^n$ avec $v_0 \neq 0$.
   Montrez que si (v_n) vérifie la propriété (P) alors forcément q est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   (b) Résolvez l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Vous noterez α et β les solutions.
2. Démontrez que la suite définie par $w_n = a\alpha^n + b\beta^n$ avec a et b des réels quelconques vérifie la propriété (P).
3. Déduisez-en une formule explicite de la suite de Fibonacci.
4. Calculez la somme S_n des n premiers termes de la suite de Fibonacci en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 2 . . . .

1. (a) Supposons que (v_n) est une suite géométrique qui vérifie (P).
   Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

   Autrement dit, en utilisant la formule explicite de la suite géométrique :

$$v_0 q^{n+1} = v_0 q^{n+1} + v_0 q^n.$$

   Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} v_0 q^n \times q^2 &= v_0 q^n \times q + v_0 q^n \times 1 \\ q^2 &= q + 1 \\ q^2 - q - 1 &= 0 \end{aligned}$$

(b) $X^2 - X - 1$ est un trinôme du second degré avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$.
$\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes : $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} + w_n &= a\alpha^{n+1} + b\beta^{n+1} + a\alpha^n + b\beta^n \\ &= a\alpha^n \times \alpha + a\alpha^n \times 1 + b\beta^n \times \beta + b\beta^n \times 1 \\ &= a\alpha^n(\alpha + 1) + b\beta^n(\beta + 1) \end{aligned}$$

Puisque α et β sont des solutions de $x^2 = x + 1$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} + w_n &= a\alpha^n \times \alpha^2 + b\beta^n \times \beta^2 \\ &= a\alpha^{n+2} + b\beta^{n+2} \\ &= w_{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi (w_n) vérifie la propriété (P).

3. Nous savons que forcément la suite de Fibonacci est de la même forme que (w_n) car elle vérifie (P).
De plus elle doit vérifier $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Donc

$$\begin{aligned} 0 &= a\alpha^0 + b\beta^0 \\ 0 &= a + b \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 1 &= a\alpha^1 + b\beta^1 \\ 1 &= a\alpha + b\beta \end{aligned}$$

Ainsi a et b doivent être solution du système $\begin{cases} a + b &= 0 \\ \alpha a + \beta b &= 1 \end{cases}$.
En procédant par substitution : $a = -b$ donc $(-\alpha + \beta)b = 1$. Autrement dit : $\sqrt{5}b = 1$. Enfin : $b = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $a = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{5}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{5}\right)^n.}$$

ou plus simplement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\alpha^n - \beta^n\right).}$$

4. Notons $s_{1,n} = \sigma_{k=0}^{n}\alpha^n$ et $s_{2,n} = \sigma_{k=0}^{n}\beta^n$.
   Il s'agit des sommes des termes de deux suites géométriques donc :
   $s_{1,n} = \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$ et $s_{2,n} = \frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}$.
   D'où :

$$\boxed{S_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} - \frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}\right).}$$

.... fin de la correction de l'exercice 2.

III La variation d'une suite.

Puisque les suites sont des fonctions nous étudierons notamment leur sens de variation. Et donc :

Une suite est dite croissante si elle est croissante en tant que fonction de la variable n. Il en est de même pour les expressions « décroissante », « strictement croissante » et « strictement décroissante ».

1 Cas général.

Théorème 1

Soient :
. $p \in \mathbb{N}$,
. $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite numérique.

$(u_n)_{n \geqslant p}$ est strictement croissante si et seulement si

$$\text{quelque soit } n \geqslant p :\ u_{n+1} - u_n > 0.$$

Démonstration 1 ....

Rappelons la définition de fonction strictement croissante. Une fonction f est strictement croissante si et seulement si pour tous nombres a et b choisis dans son ensemble de définition si $a < b$ alors, forcément, $f(a) < f(b)$.

Notons $\mathscr{D}_p = \{p;\ p+1;\ \dots\}$.

* Soit n$\geqslant p$ un entier naturel.
Si u est une fonction strictement croissante sur $\mathscr{D}_p$, alors par définition de la croissance : quelque soient a et b dans $\mathscr{D}_p$, si $a < b$ alors $u(a) < u(b)$.
En particulier pour $a = n$ et $b = n + 1$: $u(n) < u(n + 1)$.
Autrement dit : $0 < u(n + 1) - u(n)$.

* Supposons que, quelque soit $n \geqslant p$, $u_{n+1} > u_n$ et démontrons que u est strictement croissante.
Soient $a < b$ deux éléments de $\mathscr{D}_p$. Nous avons de proche en proche : $u(a) < u(a + 1) < u(a + 2) < \cdots < u(b)$.
Ainsi u est strictement croissante.

.... Fin de la démonstration

Exemples.

1. Afin de connaître le sens de variation de la suite définie, pour tour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ nous devons étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit donc $n \in \mathbb{N}$.
Comme $u_{n+1} = (n + 1)^2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n + 1)^2 - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Donc : $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$ et $u_0 = 0$ est strictement croissante puisque, quelque soit le $n \in \mathbb{N}$ choisi nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 1$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, pour tout entier naturel n. Et par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Remarques.

1. Ce résultat est incontournable en particulier pour les suites définies par récurrence.
2. Ce résultat est en fait une expression simplifiée de la définition générale de fonction strictement croissante pour des fonctions définies sur des entiers naturels.

3. Une analogie avec les suites arithmétiques est possible. Nous regardons si la raison (qui ici est en fait variable), c'est à dire la variation absolue entre deux termes consécutifs est positive ou non. Comme pour les suites arithmétiques : si la raison est positive alors la suite est croissante.

Exercice 3.

Énoncez des résultats similaires pour : croissante, strictement décroissante, puis, décroissante.

Exercice 4.

Étudiez le sens de variation de la suite u dans les cas suivants.

1. Pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + 5$.
2. $u_n = n + \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_{n+1} = u_n - n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$.
4. $u_n = n^2 - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_n = n^2 - 5n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 3^n - 5$.
7. $u_0 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2$.
8. $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{u_n}$.
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 8$.
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 0{,}5^n$.

Exercice 5. Application.

Exercice 53 page 87 du manuel Indice.

Correction de l'exercice 5 . . . .

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left[2(n+1)^2 - (n+1) + 1\right] - \left[2n^2 - n + 1\right] \\
&= 2(n+1)^2 - (n+1) + 1 - 2n^2 + n - 1 \\
&= 2(n+1)^2 - (n+1) - 2n^1 + n \\
&= 2\left(n^2 + 2n + 1\right) - n - 1 - 2n^2 + n \\
&= 2n^2 + 4n + 2 - 1 - 2n^2 \\
&= 4n + 1
\end{aligned}$$

Or $4n+1>0$ puisque $n \geqslant 0$, donc $u_{n+1}-u_n>0$.
Ainsi nous avons établi que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n>0$. Autrement dit :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1-2}{2^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{2^{n+1}} \\ &< 0 \end{aligned}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 2n+3 \\ &> 0 \end{aligned}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

4.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= -\sqrt{u_n^2+3} \\ &< 0 \end{aligned}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

. . . . fin de la correction de l'exercice 5.

2 Pour les suites à termes strictement positifs.

Proposition 1

Soient :
. $p \in \mathbb{N}$,
. $(u_n)_{n \geqslant p}$ dont tous les termes sont strictement positifs.

(i) Si quelque soit $n \geqslant p$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$
alors $(u_n)_{n \geqslant p}$ est strictement croissante.

(ii) Si quelque soit $n \geqslant p$:
$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$
alors $(u_n)_{n \geqslant p}$ est strictement décroissante.

Démonstration 2..

(i) Soit $n \geqslant$ un entier.
Puisque $u_n > 0$:
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 &\iff \frac{u_{n+1}}{u_n} \times u_n > 1 \times u_n \\ &\iff u_{n+1} > u_n \\ &\iff u_{n+1} - u_n > 0\end{aligned}$$
Nous avons démontré que quelque soit l'entier naturel n choisi nous avons toujours : $u_{n+1} - u_n > 0$.
Autrement dit la suite $(u_n)_{n \geqslant p}$ est strictement croissante.

(ii) Semblable.

.... Fin de la démonstration

Remarques.

1. Il faut évidemment que la suite ne s'annule pas car il est impossible de diviser par 0.
2. Le cas $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, pour tout $n \geqslant p$, n'aurait tout simplement pas de sens puisque la suite ne doit pas s'annuler.
3. Le cas $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ correspond à une suite constante.
4. Une analogie avec les suites géométriques est possible. Nous regardons si la raison (qui ici est en fait variable), c'est à dire le coefficient multiplicateur entre deux termes consécutifs est strictement supérieur à 1. Comme pour les suites arithmétiques : si la raison est strictement supérieure à 1 alors la suite est strictement croissante.

Exercice 6.

Étudiez les variations des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_n = 3^{2n^2+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_n = \dfrac{3^n \times 2^{n+1}}{3^{2n} \times 2^n}$.

3 Suite définie par une formule explicite.

Proposition 2

Soient :

. $p \in \mathbb{N}$,

. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement croissante sur $[p; +\infty[$ alors la suite $(f(n))_{n \geqslant p}$ est strictement croissante.

Démonstration 3 ....

Soit n un entier naturel avec $n \geqslant p$.

Puisque f est strictement croissante et $n < n+1$, $f(n) < f(n+1)$. Autrement dit : $f(n+1) - f(n) > 0$.

Donc $(f(n))$ est strictement croissante.

.... Fin de la démonstration

Exemples.

1. $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
3. $\left(n^2 - 6n - 15\right)_{n \geqslant 3}$ est strictement croissante car la fonction $f : x \mapsto x^2 - 6x - 15$ est strictement croissante sur $[3; +\infty[$ (d'après son tableau de variation obtenu avec la forme canonique ou l'étude du signe de f').
4. Nous ne pouvons étudier la monotonie de la suite $\left(2^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est pourtant donnée par une formule explicite, car nous ne connaissons par de fonction « $x \mapsto 2^x$ ».

5. La réciproque est fausse. La suite $\left(\left(n-\frac{1}{4}\right)^2+1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et pourtant la fonction $f : x \mapsto \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+1$ n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$.

Remarques.

1. Nous avons des résultats semblables pour des fonctions diversement monotones : strictement décroissante, croissante et décroissante.
2. Ce résultat signifie que la connaissance de la monotonie de la fonction f permet de connaître celle de $(f(n))_{n\geqslant p}$.
3. La réciproque est fausse.
4. Ce résultat deviendra particulièrement intéressant quand nous saurons étudier les variations d'une fonction grâce à la fonction dérivée.

Exercice 7.

Exercice 54 page 87 du manuel Indice.

Correction de l'exercice 7 ....

1. $f : x \mapsto 3x^2-4$. Nous reconnaissons la forme canonique d'un trinôme avec $a=3$, $\alpha=0$ et $\beta=-4$. Donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
2. $b : x \mapsto -2x+1$ est une fonction affine avec $a=-2$ et $b=1$. Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

.... fin de la correction de l'exercice 7.

Exercice 8.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculez les quatre premiers termes de cette suite.
2. Soit n un entier naturel. Exprimez u_{n+4} en fonction de u_n.
3. Déduisez-en les valeurs de u_{2012}, u_{2013}, u_{2014} et u_{2015}.

Correction de l'exercice 8 ....

1. $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=0$, $u_3=-1$.
2. $u_{n+4}=\sin\left(\frac{(n+4)\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+2\pi\right)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=u_n$.
3. $2012=503\times 4$ donc $u_{2012}=u_0=0$. Et on en déduit : $u_{2013}=1$, $u_{2014}=0$ et $u_{2015}=-1$.

.... fin de la correction de l'exercice 8.

IV Utilisation d'une suite auxiliaire.

Exercice 9.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}9u_n + 90 \\ u_0 = 1000 \end{cases}$$

1. Calculez $u_1$et u_2.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout nombre entier naturel n par $v_n = u_n - 900$.
   (a) Calculez v_0 et v_1.
   (b) Montrez que pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}9v_n$.
   (c) Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Écrivez v_n en fonction de n.
3. Déduisez-en pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 100 \times 0{,}9^n + 900$.
4. Déterminez à l'aide la calculatrice de la valeur de laquelle semble se rapprocher u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
5. À partir de quel nombre entier n a-t-on $u_n \leqslant 901$?

Correction de l'exercice 9 ....

1.

.... fin de la correction de l'exercice 9.

Exercice 10.

Soient $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$w_n = -n^2 + 2n \quad \text{et} \quad S_n = w_{n+1} - w_n.$$

1. Exprimez w_{n+1} en fonction de n.
2. Déduisez-en l'expression de S_n en fonction de n.
3. Exprimez S_{n+1} en fonction de n.
4. Déduisez-en que $S_{n+1} - S_n = -2$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 10 ....

1.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= -(n+1)^2 + 2(n+1) \\ &= -(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2 \\ &= -n^2 - 2n - 1 + 2n + 2 \\ &= -n^2 + 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} S_n &= w_{n+1} - w_n \\ &= -n^2 + 1 - \left(-n^2 + 2n\right) \\ &= -n^2 + 1 + n^2 - 2n \\ &= -2n + 1 \end{aligned}$$

Dès ici nous remarquons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de terme initial $S_0 = 1$ et de raison -2. Ce qui répond aux questions suivantes.

.... fin de la correction de l'exercice 10.

Exercice 11.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifiez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrez que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2$ est une suite arithmétique.
3. Donnez l'expression du terme général v_n en fonction de n.
4. Déduisez-en l'expression de u_n en fonction de n.
5. Trouvez la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 50$.

Correction de l'exercice 11 ....

1. $u_n^2 + 3 \geqslant 0$.
2. $v_{n+1} = u_{n+1}^2 = u_n^2 + 3 = v_n + 3$.
3. $v_n = -1 + 3n$.
4. $u_n = \sqrt{-1 + 3n}$ si $n \geqslant 1$ et $u_0 = -1$.
5. $u_n > 50$ donc $-1 + 3n \geqslant 2500$ et $n \geqslant \frac{2500-1}{3} = 833$.

.... fin de la correction de l'exercice 11.

Exercice 12.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+3u_n}$.

1. Calculez u_2 et u_3.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?
3. On suppose que pour tour entier naturel n, $u_n \neq 0$ et on définie la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.
   (a) Montrez que la suite (v_n) est arithmétique et donnez ses éléments caractéristiques.
   (b) Donnez l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Donnez l'expression de u_n en fonction de n.
4. Étudiez la monotonie de la suite (u_n).
5. Montrez que pour tour n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$.

Correction de l'exercice 12..

1.
$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2u_0}{2+3u_0} \\ &= \frac{2\times 1}{2+3\times 1} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

   De même

$$u_2 = \frac{1}{4}$$
$$u_3 = \frac{2}{11}$$

2. $u_2 - u_1 = -\frac{3}{20}$ et $u_3 - u_2 = -\frac{3}{44}$ donc pas arithmétique.
3. (a) $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2+3u_{n+1}}{2u_{n+1}}$
   $v_{n+1} - v_n = \frac{2+3u_n}{2u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2+3u_n-2}{2u_n} = \frac{3}{2}$. $r = \frac{3}{2}$ et $u_0 = 1$
   (b) $v_n = 1 + \frac{3}{2}n$.
   (c) $u_n = \frac{1}{1+\frac{3}{2}n}$.
4. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\frac{3}{2}n}{1+\frac{3}{2}(n+1)} < 1$. Donc strictement décroissante.
5. $u_n > 0$ par formule explicite et $u_n \leqslant 1$ par monotonie.

....fin de la correction de l'exercice 12.

V Convergence et divergence.

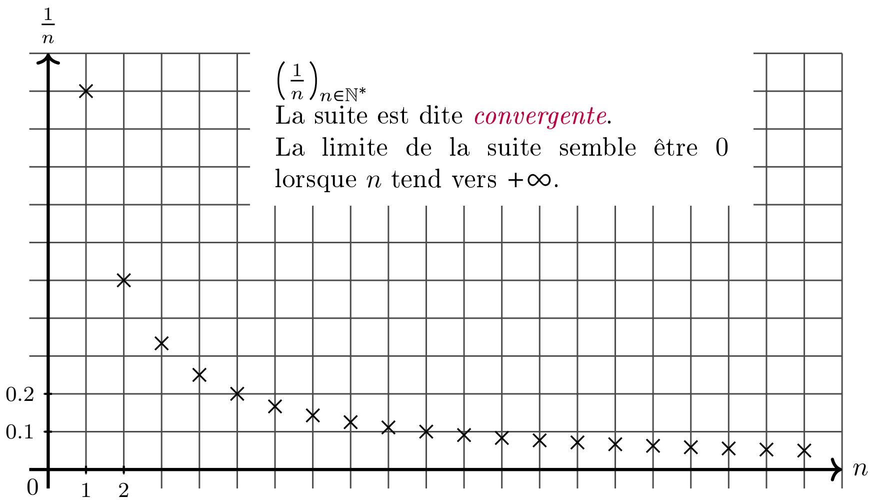
1 Avec une représentation graphique.

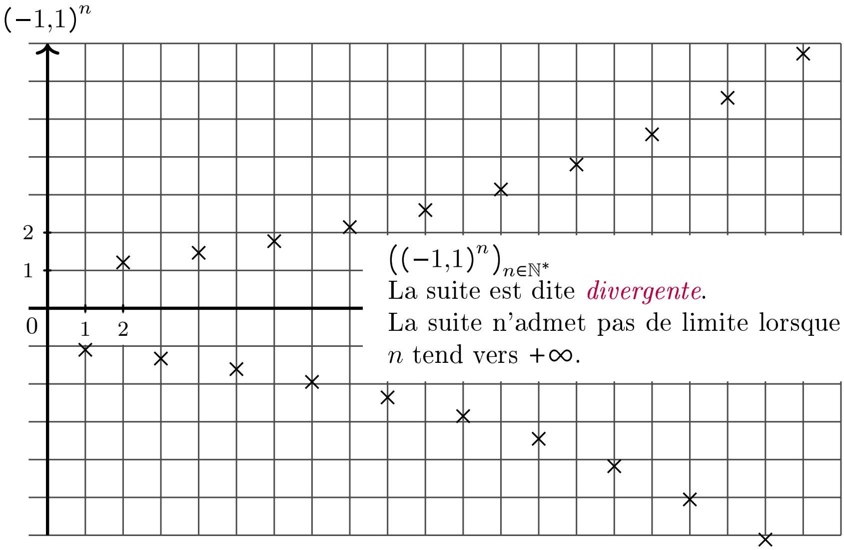
Nous voudrions dans une approche intuitive essayer de conjecturer ce qu'il advient d'une suite lorsque n devient très grand. Idéalement nous dirons lorsque « n tend vers $+\infty$ ».

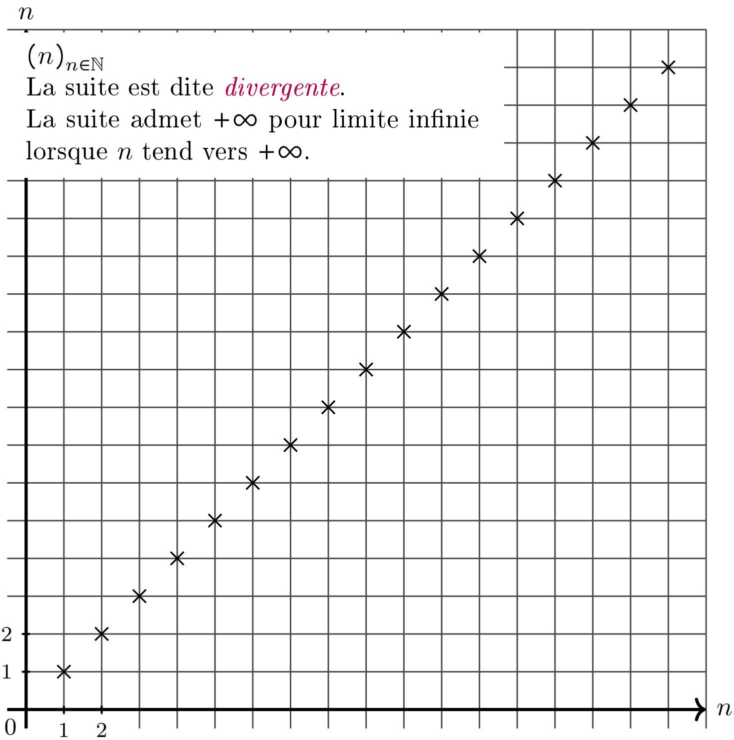
Nous ne verrons pas de définition théorique de ces notions, elles seront étudiées en terminales.

Étudions trois exemples de suites définie explicitement à partir de leur représentation graphique.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \left((-1,1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad (n)_{n\in\mathbb{N}}.$$





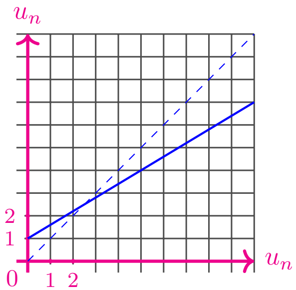


Dans les exemples précédents le suites était définies explicitement ce qui permet d'obtenir facilement une représentation graphique. Qu'en est-il pour les suites définies par récurrence ?

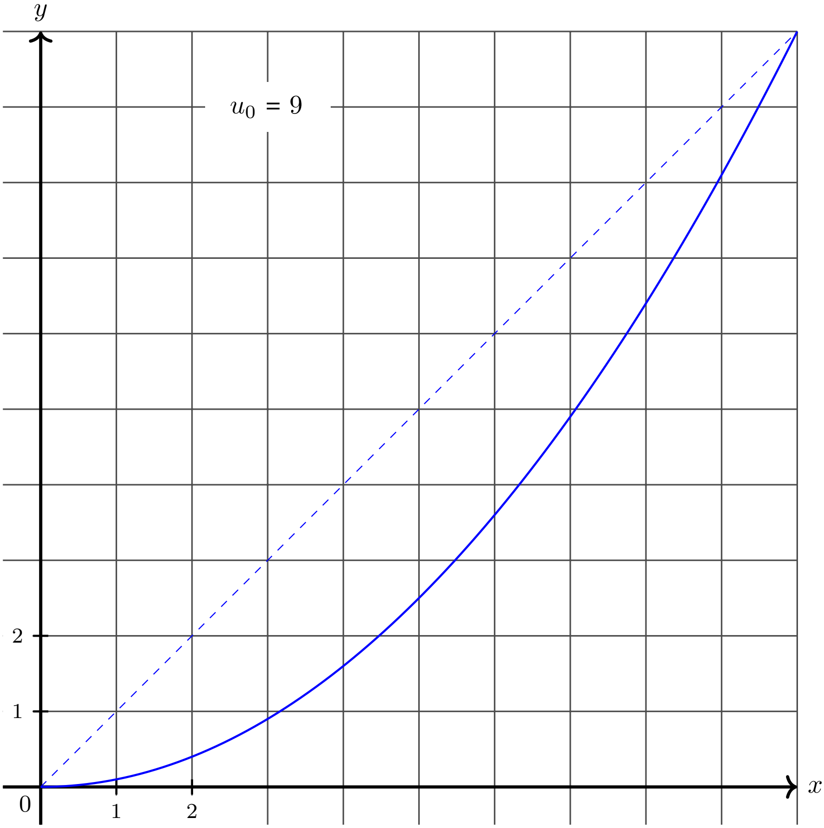
2 Une autre représentation graphique pour une suite définie par récurrence.

Lorsqu'une suite est définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel nous utiliserons une nouvelle représentation graphique de la suite qui permet une construction géométrique des termes successifs de la suite.

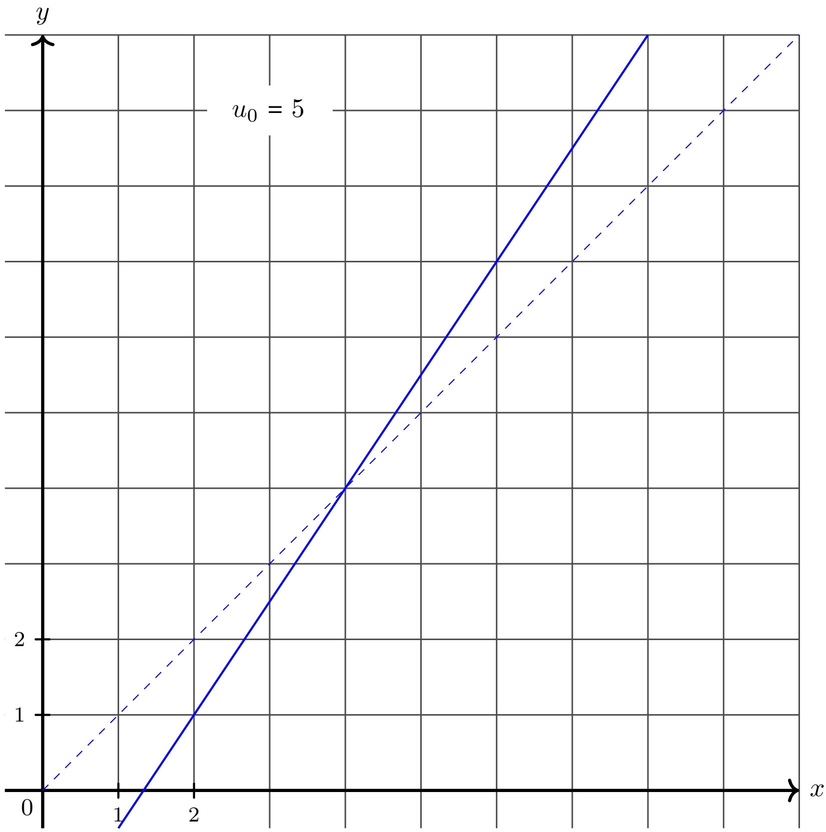
Cliquez sur l'image pour voir le diaporama.



$x \mapsto 0{,}6x + 1$
$u_{n+1} = f(u_n)$
et $u_0 = 9$



y
$u_0 = 9$
2
1
0
1
2
x



3 Conjecturer avec des outils informatiques.

VI Exercices.

Exercice 13.
Exercices utilisant des listes Python 3 : exercices 63 à 66 page 88 du manuel Indice.

Exercice 14.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. De quelle façon est définie la suite (u_n) ?
2. Donnez l'expression de la fonction f telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. Représentez graphiquement la fonction f, puis représentez les cinq premiers termes de la suite sur ce graphique.
4. Que pouvez-vous conjecturer quant aux variations de cette suite ?
5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n, par $v_n = \frac{u_n+2}{u_n-2}$. Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
6. Déduisez-en v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

Exercice 15.

1. On considère le nombre B dont l'écriture décimale illimitée est $0{,}375\,375\,375\ldots$ où 375 est répété indéfiniment. Le nombre B est-il rationnel ? Justifiez votre réponse.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme $u_1 = 0{,}375$ et $u_{n+1} = 10^{-3}u_n$ pour tout entier n.
   (a) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   (b) On considère pour tout entier naturel n, la somme S_n des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a donc $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. Exprimez S_n en fonction de n.
3. Conjecturez la valeur de $\lim_{n\to+\infty} 10^{-3n}$.
4. Déduisez-en $\lim_{n\to+\infty} S_n$. Que représente ce nombre par rapport à B ?