Suites arithmétiques et géométriques.

Plein d'exercices originaux et de contexte historiques didier dimathème 1re 1982

Faire en sorte que toutes les suites commencent au rang 0 et conserver les situations de premier rang différents pour le cas général.

De même pas d'ensemble ni de rang en indice comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notation à conserver pour la fin de l'année.

Il faut que les exercices soient suffisamment variés pour avoir toutes les situations du programmes : notamment toutes les capacités attendues. PIocher en priorité dans les épreuves de bac de première.

Les suites sont le domaine privilégié pour l'introduction des algorithmes : révision de Python et fonction Python dans chaque exercice.

I Suites de trucs.

1 Suites logiques.

.

Exercice 1. Recherche.

Trouvez la logique des suites suivantes et complétez-les.

1. $-8\,;\,-5\,;\,-2\,;\,1\,;\,\ldots$
2. $1\,;\,2\,;\,3\,;\,5\,;\,8\,;\,13\,;\,\ldots$
3. $-2\,;\,6\,;\,-18\,;\,54\,;\,\ldots$
4. $1\,;\,2\,;\,4\,;\,8\,;\,16\,;\,\ldots$
5. $1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{9}\,;\,\frac{1}{27}\,;\,\ldots$
6. $\frac{2}{5}\,;\,\frac{9}{35}\,;\,\frac{4}{35}\,;\,-\frac{1}{35}\,;\,\ldots$

Exercice 2. Concours.

C.R.P.E. 2020.

Le mathématicien suédois von Koch a imaginé en 1904 une figure géométrique obtenue à partir d'un triangle équilatéral par réitération d'une transformation appliquée à chaque côté d'un triangle. Cette figure s'appelle *le flocon de von Koch*.

Pour passer d'une figure à la suivante, chaque côté est partagé en trois segments de même longueur. On remplace le tiers central de chaque segment par un triangle équilatéral sans base. On répète cette opération sur la figure obtenue.

On donne les trois premières étapes de construction :

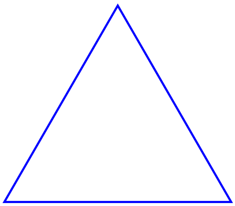


Figure 0.

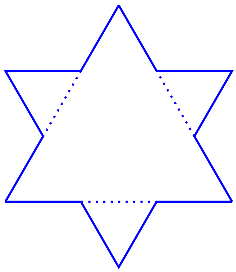


Figure 1.

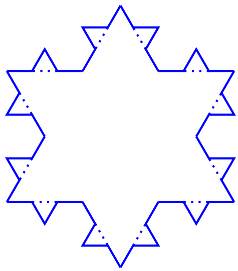


Figure 2.

Que pouvez-vous dire du périmètre des flocons ? de l'aire ?

Exercice 3. Recherche.

Voici un script rédigé en Python.

```
def suite(n):
    k=0
    u=4
    while k<n:
        u=2*u-3
        k=k+1
    return(u)
```

Dressez le tableau d'état des variables lorsqu'un utilisateur tape dans une console l'instruction

```
>>> suite(4)
```

2 Définition intuitive d'une suite numérique.

« Numérique » signifiant « de nombres » nous nous intéressons ici uniquement aux suites de nombres.

Vous verrez en terminale qu'une *liste de nombres* est une succession ordonnée de nombres. Par exemple $(1;2;4)$ est une liste. L'exemple typique de liste est celui des couples de coordonnées. Le fait que la liste est ordonnée implique en particulier que $(1;2) \neq (2;1)$.

Une *suite numérique* peut être comprise comme une liste infinie de nombres.

Exemples.

1. $(0;1;2;3;4;\dots)$: les entiers naturels forment une suite.
2. $(1;1;1;\dots)$ est une suite formée uniquement de 1. Nous dirons qu'il s'agit d'*une suite constante*.
3. $(3;14;15;9;9;9;\dots)$ et $(3;15;14;9;9;9;\dots)$ sont deux suites distinctes car l'ordre des termes compte.
4. $(1;2;4;8;\dots)$ les nombres 1, 2, 4, 8, etc, qui apparaissent dans la suite sont appelés *les termes* de la suite.
5. Il existe des suites crées au hasard. C'est d'ailleurs un domaine important des probabilités.

3 Notations.

Nous aurons besoin pour établir les formules générales d'une notation générique (donc littérale) pour désigner une suite de nombres.

Les termes (nombres) de la suite sont numérotés dans l'ordre en commençant par 0. Le numéro d'un terme de la suite est appelé son *rang*.

Exemples.

1. Dans la suite $(17;19;21;23;\dots)$, 17 est le terme de rang 0, 19 est le terme de rang 1, 21 est le terme de rang 2, etc.

Les suites seront le plus souvent notées u, v ou w mais sans exclusivisme. Les termes de la suite seront alors : u_0, u_1, u_2, etc. Pour un *terme général* nous écrirons u_n.

Exemples.

1. Pour la suite numérique $(17;19;21;23;\dots)$: $u_0 = 17$, $u_1 = 19$, $u_2 = 21$, etc.

Pour indiquer qu'il s'agit de la suite (la liste infinie donc) et non pas d'un terme particulier de la suite nous écrirons avec des parenthèses : (u_n), (v_n) et (w_n) désignent les suites.

4 Construction par récurrence d'une suite.

Un procéder assez naturel pour créer une suite et d'expliquer le procéder qui permet de passer d'un terme de la suite au suivant. Cette façon de définir étape par étape en continuant indéfiniment est appelé une *construction par récurrence.*

La construction d'une suite par récurrence exige de connaître le point de départ : le *terme initial* de la suite.

II Suites arithmétiques.

1 Définition.

Définition 1

Soit (u_n) une suite de nombres.

Nous dirons que (u_n) est *arithmétique* si et seulement si il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + r = u_{n+1}.$$

Si (u_n) est arithmétique nous dirons que r est *la raison* de la suite.

Exemples.

1. $(-3{,}2;\ -1{,}2;\ 1{,}8;\ 3{,}8\ \dots)$ est une suite arithmétique de premier terme $-3{,}2$ et de raison 2.
2. $(u_n) = (-6;\ -9;\ -12;\dots)$ est une suite arithmétique de terme initial $u_0 = -6$ et de raison -3.
3. $(v_n) = (1;1;1;1;\dots)$ est une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 1$ et de raison $r = 0$. Nous dirons qu'une telle suite est *constante*. Les suites constantes sont toutes des suites arithmétiques de raison 0.

Remarques.

1. Pour décrire une suite arithmétique nous indiquerons systématiquement son terme initial u_0 et sa raison r. Du moins quand ce sera possible.
2. Autrement dit la suite (u_n) est arithmétique si et seulement si il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ de sorte que chaque terme de la suite s'obtient à partir du précédent en lui ajoutant r.
3. Les égalités $u_n + r = u_{n+1}$ (pour $n \in \ltimes$) représente la relation de récurrence entre deux termes consécutifs de la suite.
   Ces égalités constituent la *formule de récurrence.*

Le terme de rang $n+1$ s'obtient à partir du terme précédent, celui de rang n en ajoutant r.

Ce sont ces égalités qui justifieront dans les exercices que la suite est arithmétique.

Insister sur le fait qu'il y a deux lignes de calculs différentes dans l'écriture précédente et que nous rencontrerons dorénavant des expressions avec trois lignes d'écriture : normale, indice et exposant. Des efforts d'attention dans la lecture et d'écriture pour la présentation seront nécessaires.

4. La formule de récurrence est le plus souvent écrite dans l'autre sens :$u_{n+1} = u_n + r$. Ce qui n'est pas sans rappeler la commande d'affectation en Python ; la nouvelle valeur de la variable u s'obtient à partir de la précédente.
5. Le terme initial est absolument indispensable pour définir une suite par récurrence : il faut connaître le point de départ. La raison de suffit pas. Pour décrire une suite arithmétique nous préciserons toujours, si possible, son terme initial et sa raison.

Exercice 4.

À partir des premiers termes des suites suivantes dites s'il s'agit de suites arithmétiques ou non.

Sont donnés à chaque fois les premiers termes d'une suite dites s'il peut s'agir d'une suite arithmétique.

1. $(u_n) = (12;\ 15;\ 17; \dots)$.
2. $(v_n) = (\pi;\ 2\pi;\ 4\pi; \dots)$.

   Utiliser cet exemple en rajoutant soit 8π soit 6π à la suite pour montrer que les premiers termes ne suffisent pas à à garantir que nos ayons une suite arithmétique. Il faut vérifier pour tout entier naturel n.

3. $(w_n) = (4;\ 3{,}3;\ 2{,}6; \dots)$.
4. $(u_n) = (-1;\ 1;\ -1; \dots)$.
5. $(v_n) = (0;\ 2\pi;\ 4\pi; \dots)$.

   Utiliser cet exemple en rajoutant soit 8π soit 6π à la suite pour montrer que les premiers termes ne suffisent pas à à garantir que nos ayons une suite arithmétique. Il faut vérifier pour tout entier naturel n.

6. $(w_n) = (4;\ -3;\ -10; \dots)$.

Correction exercice 4

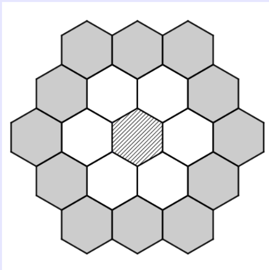
Nous ne démontrons pas que la suite est arithmétique nous conjecturons ce que ce pourrait être d'après les premiers termes. Nous faisons une modélisation, à la façon des sciences expérimentales : nous essayons de trouver un objet mathématique qui correspondent aux données expérimentales.

Si la suite n'est pas arithmétique il suffit par contre de trois termes pour démontrer qu'elle n'est pas arithmétique.

Exercice 5.

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce.
Le carrelage choisi a une forme hexagonale.
L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :

- à l'étape 0, il entoure le carreau central, à l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
- à l'étape 1 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.



On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la n-ième étape ($n \geqslant 0$).
Déterminez les trois premiers termes de la suite (u_n) et sa nature.

Explication de la question « déterminer la nature de la suite ».
Dans la pratique le choix de la suite arithmétique pour modéliser est arbitraire et relève de l'interprétation du contexte.

Correction exercice 5

* En comptant sur la figure les hexagones blancs : $u_0 = 6$.
* En comptant sur la figure : $u_1 = 12$.
* Avec un peu d'imagination ou en crayonnant à la main la rangée suivante on obtient : $u_2 = 18$.

La question de la nature d'un objet mathématique est une question récurrente en mathématiques mais dont les réponses peuvent être très variées. Pour nous cette année, cette question appellera trois réponses possibles : la suite est arithmétique ou la suite est géométrique ou la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

Nous pouvons conjecturer que

$$\boxed{\text{la site est arithmétique de premier terme } u_0 = 6 \text{ et de raison } r = 6.}$$

Exercice 6. Application.

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6 000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par u_n le nombre d'abonnés en $2019+n$ pour tout entier naturel n.
Déterminez les trois premiers termes de la suite (u_n) et sa nature.

Exercice 7.

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 26$ et $u_9 = 8$. La raison de (u_n) vaut : -18 ? $\dfrac{8}{26}$? 4,5 ? $-4{,}5$?

Exercice 8.

Calcul des termes successifs d'une suite en utilisant une fonction Python.

On définit ci-dessous la fonction Python `truc`.

```python
def truc(n):
    k=0
    u=4
    while k<n:
        u=2*u-3
        k=k+1
    return(u)
```

On définie une suite (u_n) en posant : $u_0 = \texttt{truc}(0)$, $u_1 = \texttt{truc}(1)$, $u_2 = \texttt{truc}(2)$, ...

1. Donnez les trois premiers termes de (u_n).
2. D'après les trois premiers termes, (u_n) peut-elle être arithmétique ?
3. Donnez la valeur de u_{1000}.

2 Représentation graphique.

Exercice 9.

Depuis l'an 2000 date à laquelle il recensait 3 650 clients, un site de commerce en ligne voit le nombre de ses clients augmenter chaque année de 2 500.
On désigne par u_n le nombre de clients en $2000+n$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminez la nature de (u_n).
2. Recopiez et complétez le tableau ci-dessous.

Rang n	0	1	2	3	4	5
Valeur de u_n						

   Montrer l'utilisation de la mémoire de la calculatrice.

3. Parmi les représentations graphiques statistiques suivantes, indiquez lesquels seraient ici pertinentes en justifiant : diagramme circulaire, nuage de point, diagramme en bâton,diagramme en barres, histogramme, ligne polygonale, polygone des fréquences cumulées croissantes, ligne "courbe".
4. Représentez la série statistique obtenue à la question 1. par un nuage de point.
5. Que remarquez-vous sur le précédent graphique ? Par quelle fonction serait-on tenter de modéliser la suite (u_n) ?

Le plus souvent nous représenterons graphiquement une suite (u_n) par des nuages de points en indiquant en abscisse le rang du terme, n, et en ordonnée la valeur du terme de la suite, u_n.

Ajouter un petit graphique à la proposition pour montrer l'idée.

Proposition 1

Soit (u_n) une suite arithmétique.

Les points de coordonnées $(n; u_n)$, pour tout entier naturel n, qui forment le nuage de point représentant la suite, sont alignés.

Démonstration 1

En utilisant la caractérisation des fonctions affines grâce au taux d'accroissement. Autrement dit il y a proportionnalité entre la variation des ordonnées et la variation des abscisses.

La démonstration de ce résultat découle de la formule explicite des suites arithmétiques vue juste après.

Remarques.

1. Qui dit alignement, dit droite. Qui dit droite, dit fonction affine. Nous sommes donc tenter de trouver un lien entre les suites arithmétiques et les fonctions affines.

Que serait une telle fonction affine ? Sa variable (regarder la représentation graphique) ? Ses valeurs ? Sa formule de calcul ? Taux d'accroissement et raison ? Ordonnée à l'origine ?
Il faut se poser ces questions pour la suite dessinée à l'exercice précédent. Par lecture graphique c'est plus simple d'établir le résultat.

3 Formule explicite.

Proposition 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ (et de terme initial u_0).

Quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = r \times n + u_0.$$

Démonstration 2

Voici deux façons de démontrer ce résultat.

* Par sommation des égalités successives puis simplification.

Nous ne devons pas montrer une égalité mais une infinité d'égalités : pour chaque valeur de n il faut montrer une égalité. Il s'agit d'une propriété universelle et notre rédaction commence donc par choisir, par fixer, un n quelconque.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour obtenir le terme u_n nous avons utilisé la relation de récurrence n fois :

$$
\begin{aligned}
u_0 + r &= u_1 \\
u_1 + r &= u_2 \\
u_2 + r &= u_3 \\
u_3 + r &= \dots \\
\dots &= u_{n-1} \\
u_{n-1} + r &= u_n
\end{aligned}
$$

Si nous additionnons ces n égalités nous obtenons

$u_0 + r + u_1 + r + u_2 + r + u_3 + r + \dots u_{n-1} + r = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$.

En soustrayant u_1, u_2, u_3, ..., u_{n-1} de chaque membre de cette égalité nous obtenons l'égalité équivalente :

$$u_0 + r + r + r + \dots + r = u_n$$

où r apparaît n fois (autant de fois qu'il y avait d'égalité sommées).
Finalement : $u_0 + n \times r = u_n$.

Nous avons démontré que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \times r + u_0$.

* Par induction (récurrence intuitive).

Remarques.

1. Nous dirons que nous avons une *formule explicite* des terme de la suite, par opposition à la formule de récurrence. Nous pouvons trouver directement les valeurs des termes de la suite sans avoir besoin de recalculer tous les termes successifs.
2. Réciproquement toute suite définie par une formule explicite de la forme : $u_n = an + b$ est une suite arithmétique (cf exercice 12).

Exercice 10. ♥

À partir du contexte démontrer que la suite est arithmétique et en déduire la formule explicite : sujet de bac. Puis question calcul de terme résoudre une équation (est-il possible d'avoir telle valeur ? de dépasser telle valeur ?)
sujet 8 spe math première

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6 000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par u_n le nombre d'abonnés en $2019+n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2020 et 2021.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. En quelle année le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019 ?

Exercice 11. Application.

Sujet 50

Fanny est inscrite dans un club d'athlétisme. Elle pratique le penta bond (le penta bond est un enchaînement de cinq bonds après une course d'élan).
La première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m.
Chaque semaine, la longueur de son saut augmente de 0,1 m.
Pour n entier naturel non nul, on note s_n la longueur, en mètres, de son saut la n-ième semaine d'entraînement.
Puisque lors de la première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m, on a $s_0 = 8$.

1. Pour $n \geqslant 2$, on considère la fonction Python suivante.

```python
def saut(n):
    s=8
    for k in range(2,n+1):
        s=s+0.1
    return s
```

   (a) Quelle valeur s est-elle renvoyée par la commande saut(4) ?
   (b) Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

2. Exprimer avec justification s_n en fonction de n pour n entier naturel non nul.
3. Pour être qualifiée à une compétition, Fanny doit faire un saut d'au moins 12 mètres.
   (a) À partir de quelle semaine, Fanny réalisera-t-elle un tel saut ?
   (b) Justifier votre réponse.

Correction exercice 11

1. (a) saut(4) renvoie 8,3 cependant la présentation de Python est un peu différente.

   saut(4) renvoie 8.299999999999999.

   (b) saut(4) est la valeur de s_3.

2. Puisque le premier saut mesurait 8 m et que chaque semaine cette performance est augmentée de 0,1 m nous pouvons affirmer que

(s_n) est une suite arithmétique de terme initial $s_0 = 8$ et de raison $r = 0{,}1$.

3. Déterminons la plus petite valeur de n de sorte que $s_n \geqslant 12$.

D'après la question précédente (u_n) est arithmétique et donc sa formule explicite est, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = r \times n + u_0$$

Donc :

$$u_n = 0{,}1n + 8$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_k \geqslant 12 &\iff 0{,}1k + 8 \geqslant 12 \\ &\iff 0{,}1k \geqslant 12 - 8 \\ &\iff 0{,}1k \geqslant 4 \\ &\iff k \geqslant \frac{4}{0{,}1} \quad \text{car } 0{,}1 > 0 \\ &\iff k \geqslant 40 \end{aligned}$$

À partir de la quarante-et-unième semaine le saut est supérieur ou égale à 12 m.

Exercice 12. ♥

Donner des formules explicites et vérifier si la suite est arithmétique.

Baratin sur propriété universelle et contre-exemple.

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

1. (u_n) définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n+2)^2 - n^2$.

   Pour celui-là méthode générale différences de deux termes consécutifs.

2. (v_n) telle que, quelque soit n entier positif, $v_n = n^2 + 1$.
3. (w_n) avec, pour tout entier naturel n, $w_n = -3n + 2$.

   Méthode de la différence de deux termes consécutifs puis constater que cela se généralise sans difficulté : dès que l'on rencontre cette formule explicite il est possible d'affirmer qu'il s'agit d'une suite arithmétique.

4 Monotonie.

Que signifie d'après vous que la suite est croissante ? Faire émerger l'idée que d'un terme à l'autre ça augmente.

Intuitivement nous dirons qu'une suite est croissante si lorsqu'on passe d'un terme de la suite au suivant il y a une augmentation.

Autrement dit la vrai définition ce sera : quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Corollaire 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $r \in \mathbb{R}$.
- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante (égale à u_0).

5 Série arithmétique : somme des termes d'une suite arithmétique.

D'abord somme des premiers entiers : deux présentations avec les couples et en doublent la liste.

Puis deuxième suite en additionnant de proche en proche : simplification, télescopage, des égalités.

Exemples.

1. Somme des entiers naturels de 1 à 100.

   Présentation géométrique avec les marches d'escalier.

2. Suite arithmétique de terme initial $u_0 = 5$ et de raison 10.

Proposition 3 - Somme des termes d'une suite arithmétique

Soient :

. (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $r \in \mathbb{R}$,

. $k \in \mathbb{N}$.

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_k = (k+1)\frac{u_0 + u_k}{2}.$$

Démonstration 3

Remarques.

1. Autrement dit : c'est le produit du nombre de termes par la moyenne du premier et du dernier.
2. Nous noterons aussi avec le symbole sommatoire évoqué à propos des polynômes :
$$\sum_{m=0}^{k} u_m = (k+1)\frac{u_0 + u_k}{2}.$$

Exercice 13.

En reprenant la situation de l'exercice 5 répondez aux questions suivantes.

1. Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5 ? Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?
2. On pose, pour $k \geqslant 1$, $S_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{k-1}$. Montrer que $S_k = 6(1+2+3+\cdots+k)$ puis que $S_k = 3k^2 + 3k$.
3. Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la $(n-1)$-ième étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$. À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2 977e carreau. Combien a-t-il fait d'étapes ?

Exercice 14. ♥

QCM de sujet 14.

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 2$ et de raison 3.
Calculez la somme S définie par $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{12}$.

Exercice 15. Recherche.

Exprimez, pour $k \in \mathbb{N}$, la somme des k premiers termes d'une suite arithmétique en fonction du terme initial et de la raison de cette dernière.

III Suites géométriques.

En travail personnel refaire une leçon comme celle pour les suites arithmétiques. Il faut juste donner et écrire la définition de géométrique.

1 Définition.

Défe, identifier, ou non, une suite arithmétique d'après le contexte, d'après les premiers termes de la suite, retrouver sa raison à partir de deux termes consécutifs ou non.

Définition 2

Soit (u_n) une suite de nombres.

Nous dirons que (u_n) est *géométrique* si et seulement si il existe un nombre $q \in \mathbb{R}$ de sorte que chaque terme de la suite s'obtient à partir du précédent en le multipliant par q.
Si (u_n) est géométrique nous dirons que q est *la raison* de la suite.

Exemples.

1. $(1;\ -2;\ 4;\ -8\ \dots)$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison -2.
2. $(u_n) = \left(4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \dots\right)$ est une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Remarques.

1. La formule de récurrence qui participe de la définition de la suite géométrique est :
$$u_n \times q = u_{n+1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
2. Là encore la formule de récurrence ne suffit pas à définir le suite. Il faut aussi indiquer le terme initial.
3. Si une suite géométrique admet un terme nul alors tous les termes qui suivent sont forcément nuls.

Exercice 16. ♥

À partir des premiers termes des suites suivantes dites s'il s'agit de suites arithmétiques ou non.

Sont donnés à chaque fois les premiers termes d'une suite. Dites à chaque fois s'il peut s'agir d'une suite géométrique.

1. $(u_n) = (8;\ 24;\ 64; \ldots)$.
2. $(v_n) = (\pi;\ 2\pi;\ 4\pi; \ldots)$.
3. $(w_n) = (1;\ -1;\ 1; \ldots)$.

Correction exercice 16

L'idée est ici de comparer la progression entre les deux premiers termes et les deux suivants.

1. Les termes de la suite sont non nuls et

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} &= \frac{24}{8} \\ &= 3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1} &= \frac{64}{24} \\ &= \frac{2^3}{3} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Comme $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ nous pouvons affirmer :

(u_n) n'est pas géométrique.

2. Les termes de la suite sont non nuls et

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_0} &= \frac{2\pi}{\pi} \\ &= 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{v_2}{v_1} &= \frac{4\pi}{2\pi} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Comme $\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = 2$ nous pouvons affirmer :

(v_n) pourrait être une suite géométrique de raison $q = 2$.

3. Les termes de la suite sont non nuls et

$$\begin{aligned}\frac{w_1}{w_0} &= \frac{1}{-1}\\ &= -1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{w_2}{w_1} &= \frac{-1}{1}\\ &= 2\end{aligned}$$

Comme $\frac{w_1}{w_0} = \frac{w_2}{w_1} = -1$ nous pouvons affirmer :

(w_n) pourrait être une suite géométrique de raison $q = -1$.

Exercice 17. ♥

Premier termes, nature
Sujet 9

À la naissance de Lisa, sa grand-mère a placé la somme de 5 000 euros sur un compte et cet argent est resté bloqué pendant 18 ans.
Lisa retrouve dans les papiers de sa grand-mère l'offre de la banque :

> Offre.
> Intérêts composés au taux annuel constant de 3 %.
> *À la fin de chaque année le capital produit 3 % d'intérêts qui sont intégrés au capital.*

On considère que l'évolution du capital acquis, en euro, peut être modélisée par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le capital acquis, en euro, n années après la naissance de Lisa.
On a ainsi $u_0 = 5\,000$.

1. Montrer que $u_1 = 5\,150$ et $u_2 = 5\,304{,}5$.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) en précisant sa raison et son premier terme.
3. Rédigez une fonction python `suite(n)` qui calcule u_n.
4. Calculez le capital acquis par Lisa à l'âge de 18 ans. Arrondir au centième.

Correction exercice 17

1. Calculons u_1.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 3 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{3}{100} \\ &= 1{,}03 \end{aligned}$$

   Donc le capital acquis au bout d'un an est :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times 1{,}03 \\ &= 5000 \times 1{,}03 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 5150.}$$

2. Calculons u_2.

   De même que précédemment :

$$u_2 = u_1 \times 1{,}03 \qquad = 5150 \times 1{,}03$$

$$\boxed{u_2 = 5304{,}5.}$$

3. Déterminons la nature de (u_n).

   Nous avons vu à la question précédente que d'une année sur l'autre le capital est multiplié par 1,03. Autrement dit :

$$\boxed{\text{quelque soit } n \in \mathbb{N},\ u_n \times 1{,}03 = u_{n+1}.}$$

   Nous déduisons de cette formule de récurrence que

   (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de terme initial $u_0 = 5000$.

4.

```
def suite(n):
    k=0
    u=5000
    while k<n:
        u=1.03*u
        k=k+1
    return(u)
```

5. Utilisons la fonction définie dans le script précédent en lançant `suite`(18).
   Nous obtenons

   le capital acquis à 18 ans s'élève à 8512,17 €.

2 Représentation graphique.

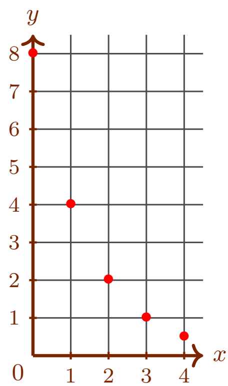
Exercice 18.

Représentez graphiquement les 5 premiers termes de la suite géométrique (u_n) si :

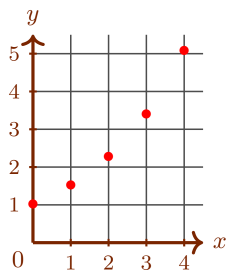
1. $u_0 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$,
2. $u_0 = 1$ et $q = 1{,}5$,
3. $u_0 = 1$ et $q = -1{,}5$,
4. $u_0 = 1$ et $q = 1$,
5. $u_0 = 1$ et $q = -1$.

Correction exercice 18

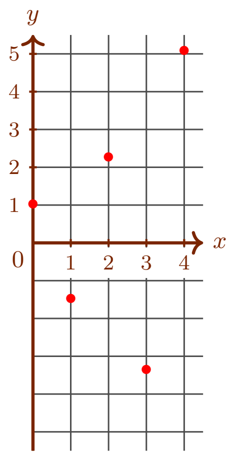
1.



2.



3.



Profiter de l'exercice précédent pour évoquer le problème de la limite d'une suite.

Les points ne sont pas alignés. Nous pourrions essayer de trouver des fonctions polynomiales qui correspondent mais nous verrons plus tard que cela serait voué à l'échec.

3 Formule explicite.

Proposition 4

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ (et de terme initial u_0).

Quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 q^n.$$

Démonstration 4

Voici deux façons de démontrer ce résultat.

* Par sommation des égalités successives puis simplification.
* Par induction.

Remarques.

1. La formule explicite pour une suite arithmétique fait naturellement apparaître une fonction affine. Pour le suites géométrique nous serions tentés de considérer une fonction "$x \mapsto u_0 \times q^x$" mais les exposants, sauf s'ils sont entiers n'ont pas de sens. Nous définirons bientôt une nouvelle fonction appelée exponentielle qui donnera du sens à ceci.

Exercice 19. ♥

À partir du contexte démontrer que la suite est géométrique et en déduire la formule explicite : sujet de bac. Puis question calcul de terme résoudre une équation (est-il possible d'avoir telle valeur ? de dépasser telle valeur ?)
Sujet 11

En 2002, Camille a acheté une voiture, son prix était alors de 10 500 €. La valeur de cette voiture a baissé de 14 % par an.
La valeur de cette voiture est modélisée par une suite. On note P_n la valeur de la voiture en l'année 2002+n. On a donc $P_0 = 10\,500$.

1. (a) Déterminer la nature de la suite (P_n).
   (b) Quelle était la valeur de cette voiture en 2010 ?
2. Camille aimerait savoir à partir de quelle année la valeur de sa voiture est inférieure à 1 500 €. Pour l'aider, on réalise le programme Python incomplet ci-dessous.
   (a) Recopier et compléter sur votre copie les deux parties en pointillé du programme ci-dessous :

```
def algo():
    P=10500
    n=2002
    while P .................. :
        P=.................
        n=n+1
    return(n)
```

   (b) Donner la valeur renvoyée par ce programme.

Faire des rappels sur les puissances. À faire en interrogation.

Exercice 20. ♥

Donner des formules explicites et vérifier si la suite est géométrique.

Les suites suivantes sont définies par des formules explicites. S'agit-il de suites géométriques ?

1. $u_n = (3 \times 4)^n \times 4$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = (-1)^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_n = \frac{n+2}{n+1}$ quelque soit l'entier naturel n.
4. $s_n = 7 \times 3^{n-1}$ pour tout entier n avec $n \geqslant 0$.

4 Monotonie.

Intuitivement, d'après les représentations graphiques nous voyons qu'un grand nombre de cas sont possibles.

Faire la démonstration pour l'un des cas au tableau.

Proposition 5

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}_+$ et de terme initial $u_0 > 0$.
- Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.
- Si $1 < q$ alors (u_n) est strictement croissante.

Démonstration 5

Toute la démonstration repose sur la comparaison de tous les termes consécutifs de la suite. Il faut donc comparer, de façon générale, u_{k+1} et u_k Puisqu'il s'agit de comparer « quelque soit » k, il s'agit d'une propriété universelle et notre rédaction commence par :

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= u_0 q^{k+1} - u_0 q^k \\ &= u_0 q^k \times q - u_0 q^k \times 1 \\ &= u_0 q^k (q-1) \end{aligned}$$

Puisque $u_0 q^k$ est un nombre positif $u_{k+1} - u_k$ est du signe de $q - 1$.

* Premier cas : si $0 \leqslant q < 1$ alors $q - 1 < 0$. Donc, quelque soit le nombre $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k < 0$.
  Autrement dit, quelque soit $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} < u_k$.
  Donc (u_n) est strictement décroissante.
* Deuxième cas : si $q = 1$ alors $q = 1$. Donc, quelque soit le nombre $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k = 0$.
  Autrement dit, quelque soit $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = u_k$.
  Donc (u_n) est constante.
* Troisième cas : si $q > 1$ alors $q - 1 > 0$. Donc, quelque soit le nombre $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k > 0$.
  Autrement dit, quelque soit $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} > u_k$.
  Donc (u_n) est strictement croissante.

Remarques.

1. Attention si $u_0 < 0$ le sens de variation est inversé.
2. Ce résultat est assez naturel pour peu que nous soyons familiarisé avec les coefficients multiplicateurs. En effet si q est vu comme un coefficient multiplicateur, lorsque $q < 1$ cela correspond à une diminution et lorsque $q > 1$ cela correspond à une augmentation.
3. Sur le long terme il vaut mieux se souvenir de la méthode de la démonstration que du résultat lui-même.
4. Il est par contre intéressant de se souvenir de ce résultat particulier pour la suite (q^n).

Exercice 21.

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 960$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Calculez v_1, v_2, v_3 et v_4.
2. Pour tout entier naturel n donnez l'expression de v_n en fonction de n.
3. Étudiez le sens de variation de (v_n).

5 Série géométrique : somme des termes d'une suite géométrique.

Proposition 6 - Somme des termes d'une suite géométrique

Soient :

. (u_n) une suite géométrique de terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

. $k \in \mathbb{N}$.

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_k = u_0 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Démonstration 6

Remarques.

1.

Exercice 22. ♥

Somme des termes d'une suite géométrique.
Sujet 2

Partie A.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 de premier terme $u_0 = 0{,}2$.

1. Calculer u_{18} puis u_{50}.
2. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{18}$, c'est-à-dire la somme des 19 premiers termes de la suite (u_n).
3. Recopier et compléter les trois parties en pointillé de l'algorithme suivant permettant de déterminer le plus petit entier n tel que la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) dépasse 100 000.

```
def seuil():
    u=0.2
    s=0.2
    n=0
    while ..........:
        u=..........
        s=..........
        n=n+1
    return n
```

Partie B.

Claude a donné 20 centimes d'euros (soit 0,20 €) à son petit-enfant Camille pour sa naissance. Ensuite, Claude a doublé le montant offert d'une année sur l'autre pour chaque anniversaire jusqu'aux 18 ans de Camille.
La somme totale versée par Claude à Camille permet-elle de payer un appartement à Angers d'une valeur de 100 000 € ?

Exercice 23. Application.

Somme des termes d'une suite géométrique.
Sujet 10

Un service de vidéos à la demande réfléchit au lancement d'une nouvelle série mise en ligne chaque semaine et qui aurait comme sujet le quotidien de jeunes gens favorisés.
Le nombre de visionnages estimé la première semaine est de 120 000. Ce nombre augmenterait ensuite de 2 % chaque semaine.
Les dirigeants souhaiteraient obtenir au moins 400 000 visionnages par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de visionnages n semaines après le début de la diffusion. On a donc $u_0 = 120\,000$.

1. Calculer le nombre u_1 de visionnages une semaine après le début de la diffusion.
2. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 120\,000 \times 1{,}02^n$.
3. À partir de combien de semaines le nombre de visionnages hebdomadaire sera-t-il supérieur à 150 000 ?
4. Voici un algorithme écrit en langage Python :

```python
def seuil():
    u=120000
    n=0
    while u<400000:
        n=n+1
        u=1.02*u
    return n
```

   Déterminer la valeur affichée par cet algorithme et interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.
5. On pose pour tout entier naturel n : $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Montrer que l'on a :

$$S_n = 6\,000\,000 \times (1{,}02^{n+1} - 1).$$

   Puis en déduire le nombre total de visionnages au bout de 52 semaines (arrondir à l'unité).

Correction exercice 23

1. Calculons u_1.

   Le nombre de visionnage en une semaine à augmenté de 2 % donc le coefficient multiplicateur correspondant est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{2}{100} \\ &= 1{,}02 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times CM \\ &= 120000 \times 1{,}02 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 122\,400.}$$

2. Déterminons une formule explicite de (u_n).

   D'après la question précédente, quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_{n+1} = 1{,}02 \times u_n.$$

   Autrement dit (u_n) est géométrique de terme initial $u_0 = 120000$ et de raison $q = 1{,}02$.
   Nous en déduisons que : $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Finalement :

   $$\boxed{\text{quelque soit } n \in \mathbb{N},\ u_n = 120\,000 \times 1{,}02^n.}$$

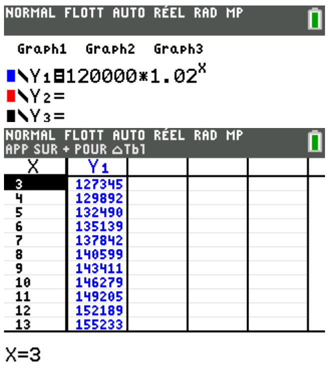
3. Déterminons le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 150\,000$.

   Nous n'avons pas, pour l'instant de méthode algébrique de résolution d'un inéquation dont l'inconnue est en exposant. Nous devons donc procéder par tâtonnement.

   * En utilisant la formule de récurrence :

$$\begin{aligned}
u_2 &= 124\,848\\
u_3 &= 127\,344{,}96\\
u_4 &\approx 129\,891{,}859\,2\\
u_5 &\approx 132\,489{,}696\,4\\
u_6 &\approx 135\,139{,}490\,3\\
u_7 &\approx 137\,842{,}280\,1\\
u_8 &\approx 140\,599{,}125\,7\\
u_9 &\approx 143\,411{,}108\,2\\
u_{10} &\approx 146\,279{,}330\,4\\
u_{11} &\approx 149\,204{,}917\\
u_{12} &\approx 152\,189{,}015\,3
\end{aligned}$$

* En utilisant la formule explicite comme si elle définissait une fonction : "$x \mapsto 120000 \times 1{,}02^x$".



Il faudra attendre 12 semaines pour que le nombre de visionnages hebdomadaire dépasse 150 000.

4.

Double conclusion car erreur d'énoncé reprendre cette correction en répondant simplement à la question.

En lançant le script avec Python nous obtenons 401 598,168 495 926 83 et cela pour $n = 62$.

La première fois que le nombre de visionnage dépassera 400 000 il sera de 401 598 et cela arrivera au bout de 61 semaines.

5. Exprimons S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.
(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 120\,000$ et de raison $q = 1{,}02$ donc la somme des $k+1$ premiers termes de cette suite est

$$S_k = u_0 \times \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Autrement dit : $S_k = 120\,000 \times \frac{1{,}02^{k+1}-1}{1{,}02-1}$.
Comme $\frac{120\,000}{1{,}02-1} = 6\,000\,000$ nous pouvons conclure que

quelque soit $k \in \mathbb{N}$, $S_k = 6\,000\,000 \times \left(1{,}02^{k+1} - 1\right)$.

En particulier au bout de 52 semaines le total des visionnages est de

$$\begin{aligned} S_{52} &= 6\,000\,000 \times \left(1{,}02^{52+1} - 1\right) \\ &\approx 11\,138\,008{,}49 \end{aligned}$$

Au bout de 52 semaines il y aura eut 11 138 008 visionnages.

IV Comparaison de suites.

Exercice 24. ♥

Sujet 43

Camille et Dominique ont été embauchés au même moment dans une entreprise et ont négocié leur contrat à des conditions différentes :

- Camille a commencé en 2010 avec un salaire annuel de 14 400 €, alors que le salaire de Dominique était, cette même année, de 13 200 €.
- Le salaire de Camille augmente de 600 € par an alors que celui de Dominique augmente de 4 % par an.

1. Quels étaient les salaires annuels de Camille et de Dominique en 2012 ?
2. On modélise les salaires de Camille et de Dominique à l'aide de suites.
   (a) On note u_n le salaire de Camille en l'année 2010+n. On a donc $u_0 = 14\,400$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) Déterminer en quelle année le salaire de Camille dépassera 20 000 €.
   (c) On note v_n le salaire de Dominique en l'année 2010+n.
   Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (d) Calculer le salaire de Dominique en 2020. On arrondira le résultat à l'euro.
3. On veut déterminer à partir de quelle année le salaire de Dominique dépassera celui de Camille. Pour cela, on dispose du programme incomplet ci-dessous écrit en langage Python.
   Recopier et compléter les quatre parties en pointillé du programme ci-dessous :

```
def algo():
    A=14400
    B=13200
    n=0
    while ..................  :
        A=......................
        B=......................
        n=......................
    return(n)
```

Exercice 25. Application.

Sujet 46

Une personne souhaite louer une maison à partir du 1er janvier 2020 et a le choix entre deux formules de contrat :

- Contrat n°1 : le loyer augmente chaque année de 200 €.
- Contrat n°2 : le loyer augmente chaque année de 5 %.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n le loyer annuel de l'année 2020+n pour le contrat n°1.
- v_n le loyer annuel de l'année 2020+n pour le contrat n°2.

Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 3 600 €. On a donc $u_0 = v_0 = 3\,600$.

1. Étude de (u_n).
   (a) Déterminer le loyer annuel de l'année 2021 pour le contrat n°1.
   (b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis en déduire le loyer annuel de l'année 2030.
2. Étude de (v_n).
   (a) Déterminer le loyer annuel de l'année 2021 pour le contrat n°2.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis en déduire le loyer annuel de l'année 2030.
3. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```python
u=3600
v=3600
n=0
while u>=v:
    u=u+200
    v=1.05*v
    n=n+1
```

   Après exécution, la variable n contient la valeur 6.
   Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Correction exercice 25

1. (a) Calculons u_1.

   Le loyer augmentant annuellement de 200 € :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + 200 \\ &= 3600 + 200 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 3\,800.}$$

(b) Calculons u_{30}.

En raisonnant comme à la question précédente nous voyons que, quelque soit $k \in \mathbb{N}$: $u_{k+1} = u_k + 200$.
Autrement dit (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3600$ et de raison $r = 200$.
Nous en déduisons la formule explicite de (u_n) : $u_k = u_0 + kr$ quelque soit $k \in \mathbb{N}$.
Ainsi

$$\boxed{\text{quelque soit } k \in \mathbb{N},\ u_k = 200k + 3600.}$$

Nous en déduisons en particulier

$$\begin{aligned} u_{30} &= 200 \times 30 + 3600 \\ &= 9600 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Avec le contrat } n°1 \text{ le loyer sera de } 9\,600\ € \text{ en } 2030.}$$

2. (a) Calculons v_1.

Le loyer augmentant annuellement de 5 %, le coefficient multiplicateur correspondant est :

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{5}{100} \\ &= 1{,}05 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \times CM \\ &= 3600 \times 1{,}05 \end{aligned}$$

$$v_1 = 3\,780.$$

(b) Calculons v_{30}.

En raisonnant comme à la question précédente nous voyons que, quelque soit $k \in \mathbb{N}$: $v_{k+1} = v_k \times CM$.
Autrement dit (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3600$ et de raison $q = 1{,}05$.
Nous en déduisons la formule explicite de (v_n) : $v_k = v_0 \times q^k$ quelque soit $k \in \mathbb{N}$.
Ainsi

quelque soit $k \in \mathbb{N}$, $v_k = 3600 \times 1{,}05^k$.

Nous en déduisons en particulier

$$\begin{aligned} v_{30} &= 3600 \times 1{,}05^{30} \\ &\approx 15558{,}99255 \end{aligned}$$

Avec le contrat n°2 le loyer sera de 15 559 € en 2030.

Exercice 26. Application.

Sujet 49

Un propriétaire propose à un commerçant deux types de contrat pour la location d'un local pendant 3 ans.
1^{er} contrat : un loyer initial de 200 € puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail.
2^{e} contrat : un loyer initial de 200 € puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.
On modélise ces deux contrats par des suites (u_n) et (v_n), de sorte que pour tout entier $n \geqslant 1$, le prix du loyer après n mois d'augmentations avec le 1^{er} contrat est représenté par u_n et le prix du loyer après n mois d'augmentations avec le 2^{e} contrat est représenté par v_n.
On a ainsi $u_0 = v_0 = 200$.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer après un mois puis le loyer après deux mois.
2. Le commerçant a écrit un programme en langage Python qui lui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur donnée de n.

```
67 u=200
68 v=200
69 n=int(input("Saisir une valeur de n:"))
70 for i in range(1,n+1):
71     u= ....
72     v= ....
73 print("Pour n=",n,"on a","u=",u," et v=",v)
```

   (a) Recopier et compléter les lignes 64 et 65 de ce programme.
   (b) Quels nombres obtiendra-t-on avec $n = 4$?

3. Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.
4. Quel contrat coûtera le moins cher au total pour l'ensemble d'un bail de 3 ans ?

Correction exercice 26

1. $u_1 = 205$ et $u_2 = 210$.
   $v_1 = 204$ et $v_2 = 208{,}08$.

2. (a)

```
u=200
v=200
n=int(input("Saisir une valeur de n:"))
for i in range(1,n+1):
    u=u+5
    v=v*1.02
print("Pour n=",n,"on a","u=",u," et v=",v)
```

(b) $u_4 = 220$ et $v_4 = 216{,}486432$.

3. $u_n = 5n + 200$ et $v_n = 200 \times 1{,}02^n$.

4. $S_{35} = 36 \times \frac{200+(5\times35+200)}{2} = 10350$ et $S'_{35} = 200 \times \frac{1{,}02^{36}-1}{1{,}02-1} \approx 10398{,}87$.

V Racine n-ième. ◊

Exercice 27. Recherche.

Retrouver la raison d'une géométrique à partir de deux termes, taux d'accroissement moyen.

1. La valeur en dollar d'un token de cryptomonnaie a augmenté de 500 % en 10 ans. Nous souhaiterions trouver le taux d'évolution annuel (moyen) qui a permis d'atteindre 500 % en 10 ans.

   (a) Peut-on dire que le taux d'évolution annuel est de 50 %.
   Indication : Vous pourrez calculer le taux d'évolution global correspondant à 10 évolutions de 50 %.

   (b) Notons t le taux d'évolution annuel, exprimé en pourcentage, qui, au bout de 10 ans produit un taux d'évolution global de 500 %.
   Justifiez que
   $$\left(1+\frac{t}{100}\right)^{10} = 6 \quad (E).$$

   (c) Lorsque, pour x un nombre positif, nous avons $x^2 = 3$ alors $x = \sqrt{3}$. Il existe une autre notation : $x = \sqrt[2]{3}$.
   Lorsque, pour x un nombre positif, nous avons $x^5 = 3$ alors $x = \sqrt[5]{3}$. Nous dirons alors qu'il s'agit de *la racine cinquième de trois*.
   En utilisant cette nouvelle notation trouvez une expression de t en l'isolant dans l'équation (E).

(d) Pour calculer $\sqrt[5]{3}$ avec votre calculatrice il faut taper : $3^{1/5}$.
Donnez une valeur approchée au centième du taux annuel t.

2. On considère une suite géométrique (u_n) telle que $u_4 = 256$ et $u_9 = 262\,144$.
Déterminez la raison de cette suite.
Indication : Vous devrez utiliser les racines n-ièmes introduites précédemment.

Correction exercice 27

1.

$$CM_1 = 1{,}5$$

Donc :

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_1^{10} \\ &= 1{,}5^{10} \\ &\approx 57{,}6650 \end{aligned}$$

Ce qui correspond à un taux d'évolution de :

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &\approx 100 \times (57{,}6650 - 1) \\ &\approx 5666{,}5 \end{aligned}$$

Le taux d'évolution global correspondant à 10 augmentation de 50 % est de 5 666,5 %.

2. En notant CM_a le coefficient multiplicateur correspondant au taux d'évolution t nous avons d'une part

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_a^{10} \\ &= \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{10} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} CM_g &= 1 + \frac{t_g}{100} \\ &= 1 + \frac{500}{100} \\ &= 6 \end{aligned}$$

donc, par transitivité

$$\boxed{\left(1+\frac{t}{100}\right)^{10}=6.}$$

3. Puisque t est positif :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow 1+\frac{t}{100} = \sqrt[10]{6}\\ &\Leftrightarrow \frac{t}{100} = -1+\sqrt[10]{6}\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{t = 100\left(-1+\sqrt[10]{6}\right).}$$

4. La notation utilisée par la calculatrice prendra du sens une fois que vous aurez étudié la fonction exponentielle.

Avec la calculatrice

$$\boxed{t \approx 19{,}62\ \%.}$$

5. $9-4=5$ donc $u_9 = q^5 \times u_4$. D'où : $q = \sqrt[5]{\frac{u_9}{u_4}} = 4$.

$$\boxed{\text{La suite géométrique } (u_n) \text{ a pour raison } a.}$$

VI Limites de suites. ◊

Exercice 28. Recherche.

Limites avec les programmes Python. Pour les suites géométriques.

Faire un algorithme de calcul tous simples avec raison et terme initial en paramètre puis faire tester toutes les valeurs.

1. Programmez l'algorithme suivant en Python :

```python
def suitgeo(ni,ui,q,nf):
    "ni rang initial, ui terme initial, q
    raison, nf rang souhaite"
    u=ui
    for k in range(ni,nf):
        u=u*q
    return(u)
```

Les commentaires (en vert) ne sont pas indispensables au fonction de l'algorithme et ne servent qu'à expliquer l'algorithme.

2. Quel est le rôle du précédent algorithme ?
3. Parfois lorsque le rang n est très grand la valeur de u_n semble se rapprocher d'une valeur constante que nous appellerons la *limite de la suite*. Dans ce cas nous dirons que la suite est *convergente*. Dans le cas contraire nous dirons que la suite est *divergente*.
   Utilisez le précédent algorithme pour conjecturer la limite des suites géométriques dans les cas présentés dans le tableau. Vous indiquerez si la suite est divergente ou sa limite si elle est convergente.

u_0 \ q	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2
2							
-2							

   Les entêtes de lignes correspondent au terme initial et les entêtes de colonnes correspondent à la raison.

Correction exercice 28

u_0 \ q	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2
2	d	d	0	0	0	2	d
-2	d	d	0	0	0	-2	d