Suites arithmétiques et géométriques.

I Suites de trucs.

1 Suites logiques.

.

Exercice 1. Recherche.

Trouvez la logique des suites suivantes et complétez-les.

1. $-8\,;\,-5\,;\,-2\,;\,1\,;\,\dots$
2. $1\,;\,2\,;\,3\,;\,5\,;\,8\,;\,13\,;\,\dots$
3. $-2\,;\,6\,;\,-18\,;\,54\,;\,\dots$
4. $1\,;\,2\,;\,4\,;\,8\,;\,16\,;\,\dots$
5. $1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{9}\,;\,\frac{1}{27}\,;\,\dots$
6. $\frac{2}{5}\,;\,\frac{9}{35}\,;\,\frac{4}{35}\,;\,-\frac{1}{35}\,;\,\dots$

Exercice 2. Concours.

C.R.P.E. 2020.

Le mathématicien suédois von Koch a imaginé en 1904 une figure géométrique obtenue à partir d'un triangle équilatéral par réitération d'une transformation appliquée à chaque côté d'un triangle. Cette figure s'appelle *le flocon de von Koch.*

Pour passer d'une figure à la suivante, chaque côté est partagé en trois segments de même longueur. On remplace le tiers central de chaque segment par un triangle équilatéral sans base. On répète cette opération sur la figure obtenue.

On donne les trois premières étapes de construction :

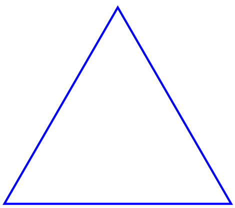


Figure 0.

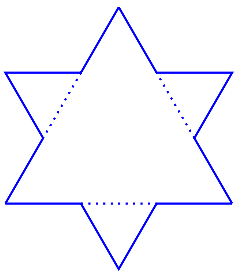


Figure 1.

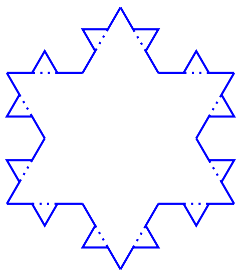


Figure 2.

Que pouvez-vous dire du périmètre des flocons ? de l'aire ?

Exercice 3. Recherche.

Voici un script rédigé en Python.

```python
def suite(n):
    k=0
    u=4
    while k<n:
        u=2*u-3
        k=k+1
    return(u)
```

Dressez le tableau d'état des variables lorsqu'un utilisateur tape dans une console l'instruction

```python
>>> suite(4)
```

2 Définition intuitive d'une suite numérique.

« Numérique » signifiant « de nombres » nous nous intéressons ici uniquement aux suites de nombres.

Vous verrez en terminale qu'une *liste de nombres* est une succession ordonnée de nombres. Par exemple $(1; 2; 4)$ est une liste. L'exemple typique de liste est celui des couples de coordonnées. Le fait que la liste est ordonnée implique en particulier que $(1; 2) \neq (2; 1)$.

Une *suite numérique* peut être comprise comme une liste infinie de nombres.

Exemples.

1. $(0; 1; 2; 3; 4; \dots)$: les entiers naturels forment une suite.
2. $(1; 1; 1; \dots)$ est une suite formée uniquement de 1. Nous dirons qu'il s'agit d'*une suite constante*.
3. $(3; 14; 15; 9; 9; 9; \dots)$ et $(3; 15; 14; 9; 9; 9; \dots)$ sont deux suites distinctes car l'ordre des termes compte.
4. $(1; 2; 4; 8; \dots)$ les nombres 1, 2, 4, 8, etc, qui apparaissent dans la suite sont appelés *les termes* de la suite.
5. Il existe des suites crées au hasard. C'est d'ailleurs un domaine important des probabilités.

3 Notations.

Nous aurons besoin pour établir les formules générales d'une notation générique (donc littérale) pour désigner une suite de nombres.

Les termes (nombres) de la suite sont numérotés dans l'ordre en commençant par 0. Le numéro d'un terme de la suite est appelé son *rang*.

Exemples.

1. Dans la suite $(17; 19; 21; 23; \dots)$, 17 est le terme de rang 0, 19 est le terme de rang 1, 21 est le terme de rang 2, etc.

Les suites seront le plus souvent notées u, v ou w mais sans exclusivisme. Les termes de la suite seront alors : u_0, u_1, u_2, etc. Pour un *terme général* nous écrirons u_n.

Exemples.

1. Pour la suite numérique $(17; 19; 21; 23; \dots)$: $u_0 = 17$, $u_1 = 19$, $u_2 = 21$, etc.

Pour indiquer qu'il s'agit de la suite (la liste infinie donc) et non pas d'un terme particulier de la suite nous écrirons avec des parenthèses : (u_n), (v_n) et (w_n) désignent les suites.

4 Construction par récurrence d'une suite.

Un procéder assez naturel pour créer une suite et d'expliquer le procéder qui permet de passer d'un terme de la suite au suivant. Cette façon de définir étape par étape en continuant indéfiniment est appelé une *construction par récurrence.*
La construction d'une suite par récurrence exige de connaître le point de départ : le *terme initial* de la suite.

II Suites arithmétiques.

1 Définition.

Définition 1

Soit (u_n) une suite de nombres.

Nous dirons que (u_n) est *arithmétique* si et seulement si il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + r = u_{n+1}.$$

Si (u_n) est arithmétique nous dirons que r est *la raison* de la suite.

Exemples.

1. $(-3,2;\ -1,2;\ 1,8;\ 3,8\ \dots)$ est une suite arithmétique de premier terme $-3,2$ et de raison 2.
2. $(u_n) = (-6;\ -9;\ -12; \dots)$ est une suite arithmétique de terme initial $u_0 = -6$ et de raison -3.

3. $(v_n) = (1; 1; 1; 1; \dots)$ est une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 1$ et de raison $r = 0$. Nous dirons qu'une telle suite est *constante*. Les suites constantes sont toutes des suites arithmétiques de raison 0.

Remarques.

1. Pour décrire une suite arithmétique nous indiquerons systématiquement son terme initial u_0 et sa raison r. Du moins quand ce sera possible.
2. Autrement dit la suite (u_n) est arithmétique si et seulement si il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ de sorte que chaque terme de la suite s'obtient à partir du précédent en lui ajoutant r.
3. Les égalités $u_n + r = u_{n+1}$ (pour $n \in \ltimes$) représente la relation de récurrence entre deux termes consécutifs de la suite.

   Ces égalités constituent la *formule de récurrence.*

   Le terme de rang $n + 1$ s'obtient à partir du terme précédent, celui de rang n en ajoutant r.

   Ce sont ces égalités qui justifieront dans les exercices que la suite est arithmétique.
4. La formule de récurrence est le plus souvent écrite dans l'autre sens :$u_{n+1} = u_n + r$. Ce qui n'est pas sans rappeler la commande d'affectation en Python ; la nouvelle valeur de la variable u s'obtient à partir de la précédente.
5. Le terme initial est absolument indispensable pour définir une suite par récurrence : il faut connaître le point de départ. La raison de suffit pas. Pour décrire une suite arithmétique nous préciserons toujours, si possible, son terme initial et sa raison.

Exercice 4.

Sont donnés à chaque fois les premiers termes d'une suite dites s'il peut s'agir d'une suite arithmétique.

1. $(u_n) = (12;\ 15;\ 17; \dots)$.
2. $(v_n) = (\pi;\ 2\pi;\ 4\pi; \dots)$.
3. $(w_n) = (4;\ 3,3;\ 2,6; \dots)$.
4. $(u_n) = (-1;\ 1;\ -1; \dots)$.
5. $(v_n) = (0;\ 2\pi;\ 4\pi; \dots)$.
6. $(w_n) = (4;\ -3;\ -10; \dots)$.

Correction exercice 4

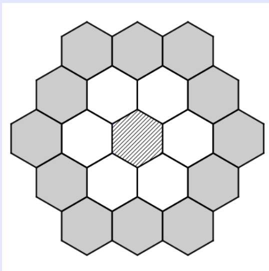
Nous ne démontrons pas que la suite est arithmétique nous conjecturons ce que ce pourrait être d'après les premiers termes. Nous faisons une modélisation, à la façon des sciences expérimentales : nous essayons de trouver un objet mathématique qui correspondent aux données expérimentales.

Si la suite n'est pas arithmétique il suffit par contre de trois termes pour démontrer qu'elle n'est pas arithmétique.

Exercice 5.

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce.
Le carrelage choisi a une forme hexagonale.
L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :

- à l'étape 0, il entoure le carreau central, à l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
- à l'étape 1 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.



On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la n-ième étape ($n \geqslant 0$).
Déterminez les trois premiers termes de la suite (u_n) et sa nature.

Correction exercice 5

* En comptant sur la figure les hexagones blancs : $u_0 = 6$.
* En comptant sur la figure : $u_1 = 12$.
* Avec un peu d'imagination ou en crayonnant à la main la rangée suivante on obtient : $u_2 = 18$.

La question de la nature d'un objet mathématique est une question récurrente en mathématiques mais dont les réponses peuvent être très variées. Pour nous cette année, cette question appellera trois réponses possibles : la suite est arithmétique ou la suite est géométrique ou la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

Nous pouvons conjecturer que

la site est arithmétique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $r = 6$.

Exercice 6.

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6 000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par u_n le nombre d'abonnés en $2019+n$ pour tout entier naturel n.
Déterminez les trois premiers termes de la suite (u_n) et sa nature.

Exercice 7.

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 26$ et $u_9 = 8$. La raison de (u_n) vaut : -18 ? $\dfrac{8}{26}$? $4,5$? $-4,5$?

Exercice 8.

On définit ci-dessous la fonction Python truc.

```
def truc(n):
    k=0
    u=4
    while k<n:
        u=2*u-3
        k=k+1
    return(u)
```

On définie une suite (u_n) en posant : $u_0 = \text{truc}(0)$, $u_1 = \text{truc}(1)$, $u_2 = \text{truc}(2)$, ...

1. Donnez les trois premiers termes de (u_n).
2. D'après les trois premiers termes, (u_n) peut-elle être arithmétique ?
3. Donnez la valeur de u_{1000}.

2 Représentation graphique.

Exercice 9.

Depuis l'an 2000 date à laquelle il recensait 3 650 clients, un site de commerce en ligne voit le nombre de ses clients augmenter chaque année de 2 500.
On désigne par u_n le nombre de clients en 2000+n pour tout entier naturel n.

1. Déterminez la nature de (u_n).
2. Recopiez et complétez le tableau ci-dessous.

Rang n	0	1	2	3	4	5
Valeur de u_n						

3. Parmi les représentations graphiques statistiques suivantes, indiquez lesquels seraient ici pertinentes en justifiant : diagramme circulaire, nuage de point, diagramme en bâton,diagramme en barres, histogramme, ligne polygonale, polygone des fréquences cumulées croissantes, ligne "courbe".
4. Représentez la série statistique obtenue à la question 1. par un nuage de point.
5. Que remarquez-vous sur le précédent graphique ? Par quelle fonction serait-on tenter de modéliser la suite (u_n) ?

Le plus souvent nous représenterons graphiquement une suite (u_n) par des nuages de points en indiquant en abscisse le rang du terme, n, et en ordonnée la valeur du terme de la suite, u_n.

Proposition 1

Soit (u_n) une suite arithmétique.

Les points de coordonnées $(n; u_n)$, pour tout entier naturel n, qui forment le nuage de point représentant la suite, sont alignés.

Démonstration 1

La démonstration de ce résultat découle de la formule explicite des suites arithmétiques vue juste après.

Remarques.

1. Qui dit alignement, dit droite. Qui dit droite, dit fonction affine. Nous sommes donc tenter de trouver un lien entre les suites arithmétiques et les fonctions affines.

3 Formule explicite.

Proposition 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ (et de terme initial u_0).

Quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = r \times n + u_0.$$

Démonstration 2

Voici deux façons de démontrer ce résultat.

* Par sommation des égalités successives puis simplification.

Nous ne devons pas montrer une égalité mais une infinité d'égalités : pour chaque valeur de n il faut montrer une égalité. Il s'agit d'une propriété universelle et notre rédaction commence donc par choisir, par fixer, un n quelconque.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour obtenir le terme u_n nous avons utilisé la relation de récurrence n fois :

$$\begin{aligned} u_0 + r &= u_1 \\ u_1 + r &= u_2 \\ u_2 + r &= u_3 \\ u_3 + r &= \dots \\ \dots &= u_{n-1} \\ u_{n-1} + r &= u_n \end{aligned}$$

Si nous additionnons ces n égalités nous obtenons

$$u_0 + r + u_1 + r + u_2 + r + u_3 + r + \dots u_{n-1} + r = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n.$$

En soustrayant u_1, u_2, u_3, ..., u_{n-1} de chaque membre de cette égalité nous obtenons l'égalité équivalente :

$$u_0 + r + r + r + \dots + r = u_n$$

où r apparaît n fois (autant de fois qu'il y avait d'égalité sommées).

Finalement : $u_0 + n \times r = u_n$.

Nous avons démontré que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \times r + u_0$.

* Par induction (récurrence intuitive).

Remarques.

1. Nous dirons que nous avons une *formule explicite* des terme de la suite, par opposition à la formule de récurrence. Nous pouvons trouver directement les valeurs des termes de la suite sans avoir besoin de recalculer tous les termes successifs.
2. Réciproquement toute suite définie par une formule explicite de la forme : $u_n = an + b$ est une suite arithmétique (cf exercice 12).

Exercice 10. ♥

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6 000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par u_n le nombre d'abonnés en $2019+n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2020 et 2021.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. En quelle année le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019 ?

Exercice 11. Application.

Fanny est inscrite dans un club d'athlétisme. Elle pratique le penta bond (le penta bond est un enchaînement de cinq bonds après une course d'élan).
La première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m.
Chaque semaine, la longueur de son saut augmente de $0,1$ m.
Pour n entier naturel non nul, on note s_n la longueur, en mètres, de son saut la n-ième semaine d'entraînement.
Puisque lors de la première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m, on a $s_0 = 8$.

1. Pour $n \geqslant 2$, on considère la fonction Python suivante.

```python
def saut(n):
    s=8
    for k in range(2,n+1):
        s=s+0.1
    return s
```

   (a) Quelle valeur `s` est-elle renvoyée par la commande `saut`(4) ?
   (b) Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

2. Exprimer avec justification s_n en fonction de n pour n entier naturel non nul.
3. Pour être qualifiée à une compétition, Fanny doit faire un saut d'au moins 12 mètres.

   (a) À partir de quelle semaine, Fanny réalisera-t-elle un tel saut ?
   (b) Justifier votre réponse.

Correction exercice 11

1. (a) Dans ce genre de question il n'y a pas vraiment de justification attendue. Nous allons quand même donné un tableau d'état des variables qui accompagne la lecture et le déchiffrage du programme.

Instruction	n	s	k	$k < n+1$
saut(4)	4			
s=8	4	8		
for ...	4	8	2	vrai
s=s+0.1	4	$8,1$	2	vrai
for ...	4	$8,1$	3	vrai
s=s+0.1	4	$8,2$	3	vrai
for ...	4	$8,2$	4	vrai
s=s+0.1	4	$8,3$	4	vrai
for ...	4	$8,3$	5	faux

La commande `saut`(4) renvoie $8,3$.

`saut`(4) renvoie $8,3$ cependant la présentation de Python est un peu différente.

`saut`(4) renvoie 8.299999999999999.

(b) `saut`(4) est la valeur de s_3.

Au bout de quatre semaines son saut atteindra 4 m.

2. Puisque le premier saut mesurait 8 m et que chaque semaine cette performance est augmentée de $0,1$ m nous pouvons affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{n+1} = s_n + 0,1.$$

Autrement dit :

(s_n) est une suite arithmétique de terme initial $s_0 = 8$ et de raison $r = 0,1$.

3. Déterminons la plus petite valeur de n de sorte que $s_n \geqslant 12$.

D'après la question précédente (u_n) est arithmétique et donc sa formule explicite est, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = r \times n + u_0$$

Donc :

$$u_n = 0,1n + 8$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_k \geqslant 12 &\iff 0,1k + 8 \geqslant 12 \\ &\iff 0,1k \geqslant 12 - 8 \\ &\iff 0,1k \geqslant 4 \\ &\iff k \geqslant \frac{4}{0,1} \quad \text{car } 0,1 > 0 \\ &\iff k \geqslant 40 \end{aligned}$$

À partir de la quarante-et-unième semaine le saut est supérieur ou égale à 12 m.

Exercice 12.

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

1. (u_n) définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n+2)^2 - n^2$.
2. (v_n) telle que, quelque soit n entier positif, $v_n = n^2 + 1$.
3. (w_n) avec, pour tout entier naturel n, $w_n = -3n + 2$.

Correction exercice 12

1. Si la suite n'est pas arithmétique il suffira peut être des trois premiers termes pour s'en rendre compte. Commençons donc par cela.

$$\begin{aligned} u_0 &= (0+2)^2 - 0^2 \\ &= 4 \\ u_1 &= (1+2)^2 - 1^2 \\ &= 8 \\ u_3 &= (2+2)^2 - 2^2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = 4$. Nous ne pouvons pas affirmer que la suite n'est pas arithmétique.

Démontrons que (u_n) est arithmétique.

Nous devons démontrer que l'écart entre deux termes consécutifs de la suite est toujours le même.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= ((n+1)+2)^2 - (n+1)^2 - \left[(n+1)^2 - n^2\right] \\ &= (n+3)^2 - (n+1)^2 - (n+1)^2 + n^2 \\ &= n^2 + 6n + 9 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 2n - 1 + n^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Nous avons démontré que

$$\boxed{(u_n) \text{ est arithmétique de terme initial } u_0 = 4 \text{ et de raison } 4.}$$

2. $v_0 = 1$, $v_1 = 2$ et $v_3 = 5$. Donc $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$. Par conséquent

$$\boxed{(v_n) \text{ n'est pas arithmétique.}}$$

3. Démontrons que (w_n) est arithmétiques.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= -3(n+1) + 2 - [-3n + 2] \\ &= -3n - 3 + 2 + 3n - 2 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\boxed{(w_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = -3.}$$

4 Monotonie.

Intuitivement nous dirons qu'une suite est croissante si lorsqu'on passe d'un terme de la suite au suivant il y a une augmentation.

Corollaire 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $r \in \mathbb{R}$.
- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante (égale à u_0).

Démonstration 3

Dans la mesure où nous n'avons pas de définition (pour l'instant) de la monotonie d'une suite nous ne pouvons pas démontrer ce résultat très intuitif.

5 Série arithmétique : somme des termes d'une suite arithmétique.

Exemples.

1. Somme des entiers naturels de 1 à 100.
2. Suite arithmétique de terme initial $u_0 = 5$ et de raison 10.

Proposition 3 - Somme des termes d'une suite arithmétique

Soient :

. (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $r \in \mathbb{R}$,

. $k \in \mathbb{N}$.

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_k = (k+1)\frac{u_0 + u_k}{2}.$$

Démonstration 4

Remarques.

1. Autrement dit : c'est le produit du nombre de termes par la moyenne du premier et du dernier.
2. Nous noterons aussi avec le symbole sommatoire évoqué à propos des polynômes :
$$\sum_{m=0}^{k} u_m = (k+1)\frac{u_0 + u_k}{2}.$$

Exercice 13.

En reprenant la situation de l'exercice 5 répondez aux questions suivantes.

1. Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5 ? Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?
2. On pose, pour $k \geqslant 1$, $S_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{k-1}$. Montrer que $S_k = 6(1+2+3+\cdots+k)$ puis que $S_k = 3k^2 + 3k$.
3. Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la $(n-1)$-ième étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$. À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2 977^e carreau. Combien a-t-il fait d'étapes ?

Exercice 14. ♥

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 2$ et de raison 3.
Calculez la somme S définie par $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{12}$.

Exercice 15. Recherche.

Exprimez, pour $k \in \mathbb{N}$, la somme des k premiers termes d'une suite arithmétique en fonction du terme initial et de la raison de cette dernière.

III Suites géométriques.

1 Définition.

Définition 2

Soit (u_n) une suite de nombres.

Nous dirons que (u_n) est *géométrique* si et seulement si il existe un nombre $q \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$u_n \times q = u_{n+1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Si (u_n) est géométrique nous dirons que q est *la raison* de la suite.

Exemples.

1. $(1;\ -2;\ 4;\ -8\ \dots)$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison -2.
2. $(u_n) = \left(4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \dots\right)$ est une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Remarques.

1. Ainsi (u_n) est géométrique si et seulement si il existe un nombre $q \in \mathbb{R}$ de sorte que chaque terme de la suite s'obtient à partir du précédent en le multipliant par q.
2. La formule de récurrence ne suffit pas à définir le suite. Il faut aussi indiquer le terme initial.
3. Si une suite géométrique admet un terme nul alors tous les termes qui suivent sont forcément nuls.

Exercice 16. ♥

Sont donnés à chaque fois les premiers termes d'une suite. Dites à chaque fois s'il peut s'agir d'une suite géométrique.

1. $(u_n) = (8;\ 24;\ 64; \dots)$.
2. $(v_n) = (\pi;\ 2\pi;\ 4\pi; \dots)$.
3. $(w_n) = (1;\ -1;\ 1; \dots)$.

Correction exercice 16

L'idée est ici de comparer la progression entre les deux premiers termes et les deux suivants.

1. Les termes de la suite sont non nuls et

$$\begin{aligned}\frac{u_1}{u_0} &= \frac{24}{8}\\ &= 3\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{u_2}{u_1} &= \frac{64}{24}\\ &= \frac{2^3}{3}\\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Comme $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ nous pouvons affirmer :

(u_n) n'est pas géométrique.

2. Les termes de la suite sont non nuls et

$$\begin{aligned}\frac{v_1}{v_0} &= \frac{2\pi}{\pi}\\ &= 2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{v_2}{v_1} &= \frac{4\pi}{2\pi}\\ &= 2\end{aligned}$$

Comme $\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = 2$ nous pouvons affirmer :

(v_n) pourrait être une suite géométrique de raison $q = 2$.

3. Les termes de la suite sont non nuls et

$$\begin{aligned}\frac{w_1}{w_0} &= \frac{1}{-1} \\ &= -1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{w_2}{w_1} &= \frac{-1}{1} \\ &= 2\end{aligned}$$

Comme $\frac{w_1}{w_0} = \frac{w_2}{w_1} = -1$ nous pouvons affirmer :

(w_n) pourrait être une suite géométrique de raison $q = -1$.

Exercice 17. ♥

À la naissance de Lisa, sa grand-mère a placé la somme de 5 000 euros sur un compte et cet argent est resté bloqué pendant 18 ans.
Lisa retrouve dans les papiers de sa grand-mère l'offre de la banque :

> Offre.
> Intérêts composés au taux annuel constant de 3 %.
> *À la fin de chaque année le capital produit 3 % d'intérêts qui sont intégrés au capital.*

On considère que l'évolution du capital acquis, en euro, peut être modélisée par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le capital acquis, en euro, n années après la naissance de Lisa.
On a ainsi $u_0 = 5\,000$.

1. Montrer que $u_1 = 5\,150$ et $u_2 = 5\,304{,}5$.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) en précisant sa raison et son premier terme.
3. Rédigez une fonction python `suite(n)` qui calcule u_n.
4. Calculez le capital acquis par Lisa à l'âge de 18 ans. Arrondir au centième.

Correction exercice 17

1. Calculons u_1.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 3 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{3}{100} \\ &= 1,03 \end{aligned}$$

Donc le capital acquis au bout d'un an est :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times 1,03 \\ &= 5000 \times 1,03 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 5150.}$$

2. Calculons u_2.

   De même que précédemment :

$$u_2 = u_1 \times 1,03 \qquad = 5150 \times 1,03$$

$$\boxed{u_2 = 5304,5.}$$

3. Déterminons la nature de (u_n).

   Nous avons vu à la question précédente que d'une année sur l'autre le capital est multiplié par $1,03$. Autrement dit :

   quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \times 1,03 = u_{n+1}$.

   Nous déduisons de cette formule de récurrence que

   (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,03$ et de terme initial $u_0 = 5000$.

4.

```
def suite(n):
    k=0
    u=5000
    while k<n:
        u=1.03*u
        k=k+1
    return(u)
```

5. Utilisons la fonction définie dans le script précédent en lançant `suite`(18).
   Nous obtenons

   le capital acquis à 18 ans s'élève à $8512,17$ €.

2 Représentation graphique.

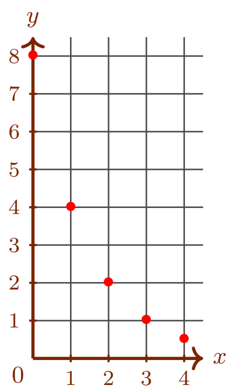
Exercice 18.

Représentez graphiquement les 5 premiers termes de la suite géométrique (u_n) si :

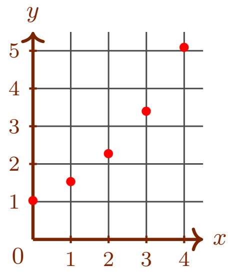
1. $u_0 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$,
2. $u_0 = 1$ et $q = 1,5$,
3. $u_0 = 1$ et $q = -1,5$,
4. $u_0 = 1$ et $q = 1$,
5. $u_0 = 1$ et $q = -1$.

Correction exercice 18

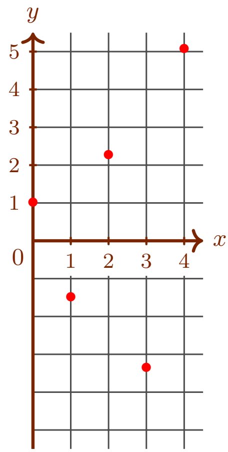
1.



2.



3.



Les points ne sont pas alignés. Nous pourrions essayer de trouver des fonctions polynomiales qui correspondent mais nous verrons plus tard que cela serait voué à l'échec.

3 Formule explicite.

Proposition 4

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ (et de terme initial u_0).

Quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 q^n.$$

Démonstration 5

Voici deux façons de démontrer ce résultat.

* Par sommation des égalités successives puis simplification.
* Par induction.

Remarques.

1. La formule explicite pour une suite arithmétique fait naturellement apparaître une fonction affine. Pour le suites géométrique nous serions tentés de considérer une fonction "$x \mapsto u_0 \times q^x$" mais les exposants, sauf s'ils sont entiers n'ont pas de sens. Nous définirons bientôt une nouvelle fonction appelée exponentielle qui donnera du sens à ceci.

Exercice 19. ♥

En 2002, Camille a acheté une voiture, son prix était alors de 10 500 €. La valeur de cette voiture a baissé de 14 % par an.
La valeur de cette voiture est modélisée par une suite. On note P_n la valeur de la voiture en l'année $2002+n$. On a donc $P_0 = 10\,500$.

1. (a) Déterminer la nature de la suite (P_n).
   (b) Quelle était la valeur de cette voiture en 2010 ?
2. Camille aimerait savoir à partir de quelle année la valeur de sa voiture est inférieure à 1 500 €. Pour l'aider, on réalise le programme Python incomplet ci-dessous.
   (a) Recopier et compléter sur votre copie les deux parties en pointillé du programme ci-dessous :

```
def algo():
    P=10500
    n=2002
    while P ..................  :
       P=.................
       n=n+1
    return(n)
```

   (b) Donner la valeur renvoyée par ce programme.

Exercice 20. ♥

Les suites suivantes sont définies par des formules explicites. S'agit-il de suites géométriques ?

1. $u_n = (3 \times 4)^n \times 4$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = (-1)^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_n = \frac{n+2}{n+1}$ quelque soit l'entier naturel n.
4. $s_n = 7 \times 3^{n-1}$ pour tout entier n avec $n \geqslant 0$.

4 Monotonie.

Proposition 5

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}_+$ et de terme initial $u_0 > 0$.
- Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.
- Si $1 < q$ alors (u_n) est strictement croissante.

Démonstration 6

Toute la démonstration repose sur la comparaison de tous les termes consécutifs de la suite. Il faut donc comparer, de façon générale, u_{k+1} et u_k Puisqu'il s'agit de comparer « quelque soit » k, il s'agit d'une propriété universelle et notre rédaction commence par :

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= u_0 q^{k+1} - u_0 q^k \\ &= u_0 q^k \times q - u_0 q^k \times 1 \\ &= u_0 q^k (q-1) \end{aligned}$$

Puisque $u_0 q^k$ est un nombre positif $u_{k+1} - u_k$ est du signe de $q - 1$.

* Premier cas : si $0 \leqslant q < 1$ alors $q - 1 < 0$. Donc, quelque soit le nombre $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k < 0$.
  Autrement dit, quelque soit $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} < u_k$.
  Donc (u_n) est strictement décroissante.
* Deuxième cas : si $q = 1$ alors $q = 1$. Donc, quelque soit le nombre $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k = 0$.
  Autrement dit, quelque soit $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = u_k$.
  Donc (u_n) est constante.
* Troisième cas : si $q > 1$ alors $q - 1 > 0$. Donc, quelque soit le nombre $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k > 0$.
  Autrement dit, quelque soit $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} > u_k$.
  Donc (u_n) est strictement croissante.

Remarques.

1. Attention si $u_0 < 0$ le sens de variation est inversé.

2. Ce résultat est assez naturel pour peu que nous soyons familiarisé avec les coefficients multiplicateurs. En effet si q est vu comme un coefficient multiplicateur, lorsque $q < 1$ cela correspond à une diminution et lorsque $q > 1$ cela correspond à une augmentation.
3. Sur le long terme il vaut mieux se souvenir de la méthode de la démonstration que du résultat lui-même.
4. Il est par contre intéressant de se souvenir de ce résultat particulier pour la suite (q^n).

Exercice 21.

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 960$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Calculez v_1, v_2, v_3 et v_4.
2. Pour tout entier naturel n donnez l'expression de v_n en fonction de n.
3. Étudiez le sens de variation de (v_n).

5 Série géométrique : somme des termes d'une suite géométrique.

Proposition 6 - Somme des termes d'une suite géométrique

Soient :

. (u_n) une suite géométrique de terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

. $k \in \mathbb{N}$.

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_k = u_0 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Démonstration 7

Un résultat préalable (que nous pourrions donc appeler un lemme).

En distribuant on remarque des simplifications (télescopage) :

$$(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k) = x^{k+1} - 1$$

Donc si $x \neq 1$ (*i.e.* $x - 1 \neq 0$) :

$$\frac{(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k)}{x-1} = \frac{x^{k+1} - 1}{x-1}$$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x-1}$$

Commençons la démonstration à proprement parler.
En utilisant la formule explicite de la suite géométrique :

$$\begin{aligned}
&u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1} + u_k \\
&= u_0 \times 1 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \cdots + u_0 \times q^{k-1} + u_0 \times q^k \\
&= u_0 \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} + q^k\right) \\
&= u_0 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}
\end{aligned}$$

Exemples.

1. Pour l'exemple des grains de riz du sage Sissa et du damier d'échec :

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} + 2^{64} \\
&= 1 \times \frac{2^{64+1} - 1}{2 - 1} \\
&= 2^{65} - 1 \\
&\approx 1,844 \times 10^{19}
\end{aligned}$$

Remarques.

1. Avec le symbole sommatoire Σ :

$$\sum_{i=0}^{k} u_i = u_0 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

2. Évidemment $q \neq 1$ puisque c'est une valeur interdite pour la formule du membre de droite.
   De plus si $q = 1$ la suite est constante et : $\sum_{i=0}^{k} = (k+1)u_0$.

Exercice 22. ♥

Partie A.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 de premier terme $u_0 = 0,2$.

1. Calculer u_{18} puis u_{50}.
2. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{18}$, c'est-à-dire la somme des 19 premiers termes de la suite (u_n).
3. Recopier et compléter les trois parties en pointillé de l'algorithme suivant permettant de déterminer le plus petit entier n tel que la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) dépasse 100 000.

```
def seuil():
    u=0.2
    s=0.2
    n=0
    while ..........:
        u=..........
        s=..........
        n=n+1
    return n
```

Partie B.

Claude a donné 20 centimes d'euros (soit 0,20 €) à son petit-enfant Camille pour sa naissance. Ensuite, Claude a doublé le montant offert d'une année sur l'autre pour chaque anniversaire jusqu'aux 18 ans de Camille.
La somme totale versée par Claude à Camille permet-elle de payer un appartement à Angers d'une valeur de 100 000 € ?

Exercice 23. Application.

Un service de vidéos à la demande réfléchit au lancement d'une nouvelle série mise en ligne chaque semaine et qui aurait comme sujet le quotidien de jeunes gens favorisés. Le nombre de visionnages estimé la première semaine est de 120 000. Ce nombre augmenterait ensuite de 2 % chaque semaine.
Les dirigeants souhaiteraient obtenir au moins 400 000 visionnages par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de visionnages n semaines après le début de la diffusion. On a donc $u_0 = 120\,000$.

1. Calculer le nombre u_1 de visionnages une semaine après le début de la diffusion.
2. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 120\,000 \times 1,02^n$.
3. À partir de combien de semaines le nombre de visionnages hebdomadaire sera-t-il supérieur à 150 000 ?
4. Voici un algorithme écrit en langage Python :

```python
def seuil():
    u=120000
    n=0
    while u<400000:
        n=n+1
        u=1.02*u
    return n
```

   Déterminer la valeur affichée par cet algorithme et interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.
5. On pose pour tout entier naturel n : $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Montrer que l'on a :

$$S_n = 6\,000\,000 \times (1,02^{n+1} - 1).$$

   Puis en déduire le nombre total de visionnages au bout de 52 semaines (arrondir à l'unité).

Correction exercice 23

1. Calculons u_1.

   Le nombre de visionnage en une semaine à augmenté de 2 % donc le coefficient multiplicateur correspondant est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{2}{100} \\ &= 1,02 \end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times CM \\ &= 120000 \times 1,02 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 122\,400.}$$

2. Déterminons une formule explicite de (u_n).

D'après la question précédente, quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 1,02 \times u_n.$$

Autrement dit (u_n) est géométrique de terme initial $u_0 = 120000$ et de raison $q = 1,02$.
Nous en déduisons que : $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Finalement :

$$\boxed{\text{quelque soit } n \in \mathbb{N},\ u_n = 120\,000 \times 1,02^n.}$$

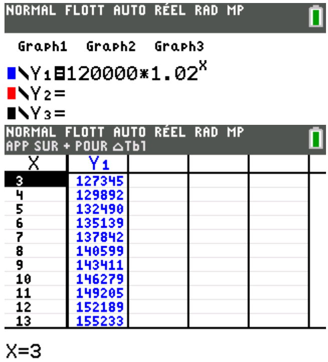
3. Déterminons le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 150\,000$.

Nous n'avons pas, pour l'instant de méthode algébrique de résolution d'un inéquation dont l'inconnue est en exposant. Nous devons donc procéder par tâtonnement.

* En utilisant la formule de récurrence :

$$\begin{aligned} u_2 &= 124\,848 \\ u_3 &= 127\,344{,}96 \\ u_4 &\approx 129\,891{,}859\,2 \\ u_5 &\approx 132\,489{,}696\,4 \\ u_6 &\approx 135\,139{,}490\,3 \\ u_7 &\approx 137\,842{,}280\,1 \\ u_8 &\approx 140\,599{,}125\,7 \\ u_9 &\approx 143\,411{,}108\,2 \\ u_{10} &\approx 146\,279{,}330\,4 \\ u_{11} &\approx 149\,204{,}917 \\ u_{12} &\approx 152\,189{,}015\,3 \end{aligned}$$

* En utilisant la formule explicite comme si elle définissait une fonction : "$x \mapsto 120000 \times 1,02^x$".



Il faudra attendre 12 semaines pour que le nombre de visionnages hebdomadaire dépasse 150 000.

4. En lançant le script avec Python nous obtenons 401 598,168 495 926 83 et cela pour $n = 62$.

La première fois que le nombre de visionnage dépassera 400 000 il sera de 401 598 et cela arrivera au bout de 61 semaines.

5. Exprimons S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Soit $k \in \mathbb{N}$.
   (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 120\,000$ et de raison $q = 1,02$ donc la somme des $k+1$ premiers termes de cette suite est

$$S_k = u_0 \times \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

   Autrement dit : $S_k = 120\,000 \times \frac{1,02^{k+1}-1}{1,02-1}$.
   Comme $\frac{120\,000}{1,02-1} = 6\,000\,000$ nous pouvons conclure que

quelque soit $k \in \mathbb{N}$, $S_k = 6\,000\,000 \times \left(1,02^{k+1} - 1\right)$.

   En particulier au bout de 52 semaines le total des visionnages est de

$$\begin{aligned} S_{52} &= 6\,000\,000 \times \left(1,02^{52+1} - 1\right) \\ &\approx 11\,138\,008,49 \end{aligned}$$

Au bout de 52 semaines il y aura eut 11 138 008 visionnages.

IV Comparaison de suites.

Exercice 24. ♥

Camille et Dominique ont été embauchés au même moment dans une entreprise et ont négocié leur contrat à des conditions différentes :

— Camille a commencé en 2010 avec un salaire annuel de 14 400 €, alors que le salaire de Dominique était, cette même année, de 13 200 €.

— Le salaire de Camille augmente de 600 € par an alors que celui de Dominique augmente de 4 % par an.

1. Quels étaient les salaires annuels de Camille et de Dominique en 2012 ?
2. On modélise les salaires de Camille et de Dominique à l'aide de suites.
   (a) On note u_n le salaire de Camille en l'année $2010+n$. On a donc $u_0 = 14\,400$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) Déterminer en quelle année le salaire de Camille dépassera 20 000 €.
   (c) On note v_n le salaire de Dominique en l'année $2010+n$.
   Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (d) Calculer le salaire de Dominique en 2020. On arrondira le résultat à l'euro.
3. On veut déterminer à partir de quelle année le salaire de Dominique dépassera celui de Camille. Pour cela, on dispose du programme incomplet ci-dessous écrit en langage Python.
   Recopier et compléter les quatre parties en pointillé du programme ci-dessous :

```
def algo():
    A=14400
    B=13200
    n=0
    while .................. :
        A=.....................
        B=.....................
        n=.....................
    return(n)
```

Exercice 25. Application.

Une personne souhaite louer une maison à partir du 1er janvier 2020 et a le choix entre deux formules de contrat :

- Contrat n°1 : le loyer augmente chaque année de 200 €.
- Contrat n°2 : le loyer augmente chaque année de 5 %.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n le loyer annuel de l'année 2020+n pour le contrat n°1.
- v_n le loyer annuel de l'année 2020+n pour le contrat n°2.

Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 3 600 €. On a donc $u_0 = v_0 = 3\,600$.

1. Étude de (u_n).
   (a) Déterminer le loyer annuel de l'année 2021 pour le contrat n°1.
   (b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis en déduire le loyer annuel de l'année 2030.
2. Étude de (v_n).
   (a) Déterminer le loyer annuel de l'année 2021 pour le contrat n°2.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis en déduire le loyer annuel de l'année 2030.
3. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
u=3600
v=3600
n=0
while u>=v:
    u=u+200
    v=1.05*v
    n=n+1
```

   Après exécution, la variable n contient la valeur 6.
   Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Correction exercice 25

1. (a) Calculons u_1.

   Le loyer augmentant annuellement de 200 € :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + 200 \\ &= 3600 + 200 \end{aligned}$$

$$u_1 = 3\,800.$$

(b) Calculons u_{30}.

En raisonnant comme à la question précédente nous voyons que, quelque soit $k \in \mathbb{N}$: $u_{k+1} = u_k + 200$.
Autrement dit (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3600$ et de raison $r = 200$.
Nous en déduisons la formule explicite de (u_n) : $u_k = u_0 + kr$ quelque soit $k \in \mathbb{N}$.
Ainsi

quelque soit $k \in \mathbb{N}$, $u_k = 200k + 3600$.

Nous en déduisons en particulier

$$\begin{aligned} u_{30} &= 200 \times 30 + 3600 \\ &= 9600 \end{aligned}$$

Avec le contrat n°1 le loyer sera de 9 600 € en 2030.

2. (a) Calculons v_1.

Le loyer augmentant annuellement de 5 %, le coefficient multiplicateur correspondant est :

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{5}{100} \\ &= 1,05 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \times CM \\ &= 3600 \times 1,05 \end{aligned}$$

$$v_1 = 3\,780.$$

(b) Calculons v_{30}.

En raisonnant comme à la question précédente nous voyons que, quelque soit $k \in \mathbb{N}$: $v_{k+1} = v_k \times CM$.
Autrement dit (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3600$ et de raison $q = 1,05$.
Nous en déduisons la formule explicite de (v_n) : $v_k = v_0 \times q^k$ quelque soit $k \in \mathbb{N}$.
Ainsi

$$\boxed{\text{quelque soit } k \in \mathbb{N},\ v_k = 3600 \times 1,05^k.}$$

Nous en déduisons en particulier

$$\begin{aligned} v_{30} &= 3600 \times 1,05^{30} \\ &\approx 15558,99255 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Avec le contrat } n°2 \text{ le loyer sera de } 15\,559 \text{ € en } 2030.}$$

Exercice 26. Application.

Un propriétaire propose à un commerçant deux types de contrat pour la location d'un local pendant 3 ans.
1er contrat : un loyer initial de 200 € puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail.
2^{e} contrat : un loyer initial de 200 € puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.
On modélise ces deux contrats par des suites (u_n) et (v_n), de sorte que pour tout entier $n \geqslant 1$, le prix du loyer après n mois d'augmentations avec le 1er contrat est représenté par u_n et le prix du loyer après n mois d'augmentations avec le 2^{e} contrat est représenté par v_n.
On a ainsi $u_0 = v_0 = 200$.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer après un mois puis le loyer après deux mois.
2. Le commerçant a écrit un programme en langage Python qui lui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur donnée de n.

```
67 u=200
68 v=200
69 n=int(input("Saisir une valeur de n:"))
70 for i in range(1,n+1):
71     u= ....
72     v= ....
73 print("Pour n=",n,"on a","u=",u," et v=",v)
```

   (a) Recopier et compléter les lignes 64 et 65 de ce programme.
   (b) Quels nombres obtiendra-t-on avec $n = 4$?
3. Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.
4. Quel contrat coûtera le moins cher au total pour l'ensemble d'un bail de 3 ans ?

Correction exercice 26

1. $u_1 = 205$ et $u_2 = 210$.
   $v_1 = 204$ et $v_2 = 208,08$.
2. (a)

```
74 u=200
75 v=200
76 n=int(input("Saisir une valeur de n:"))
77 for i in range(1,n+1):
78     u=u+5
79     v=v*1.02
80 print("Pour n=",n,"on a","u=",u," et v=",v)
```

   (b) $u_4 = 220$ et $v_4 = 216,486432$.

3. $u_n = 5n + 200$ et $v_n = 200 \times 1,02^n$.
4. $S_{35} = 36 \times \frac{200+(5\times 35+200)}{2} = 10350$ et $S'_{35} = 200 \times \frac{1,02^{36}-1}{1,02-1} \approx 10398,87$.

V Racine n-ième. ◊

Exercice 27. Recherche.

1. La valeur en dollar d'un token de cryptomonnaie a augmenté de 500 % en 10 ans. Nous souhaiterions trouver le taux d'évolution annuel (moyen) qui a permis d'atteindre 500 % en 10 ans.
   (a) Peut-on dire que le taux d'évolution annuel est de 50 %.
   Indication : Vous pourrez calculer le taux d'évolution global correspondant à 10 évolutions de 50 %.
   (b) Notons t le taux d'évolution annuel, exprimé en pourcentage, qui, au bout de 10 ans produit un taux d'évolution global de 500 %.
   Justifiez que
   $$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{10} = 6 \quad (E).$$
   (c) Lorsque, pour x un nombre positif, nous avons $x^2 = 3$ alors $x = \sqrt{3}$. Il existe une autre notation : $x = \sqrt[2]{3}$.
   Lorsque, pour x un nombre positif, nous avons $x^5 = 3$ alors $x = \sqrt[5]{3}$. Nous dirons alors qu'il s'agit de *la racine cinquième de trois.*
   En utilisant cette nouvelle notation trouvez une expression de t en l'isolant dans l'équation (E).
   (d) Pour calculer $\sqrt[5]{3}$ avec votre calculatrice il faut taper : $3^{1/5}$.
   Donnez une valeur approchée au centième du taux annuel t.
2. On considère une suite géométrique (u_n) telle que $u_4 = 256$ et $u_9 = 262\,144$.
   Déterminez la raison de cette suite.
   Indication : Vous devrez utiliser les racines n-ièmes introduites précédemment.

VI Limites de suites. ◊

Exercice 28. Recherche.

1. Programmez l'algorithme suivant en Python :

```
def suitgeo(ni,ui,q,nf):
    "ni rang initial, ui terme initial, q
   raison, nf rang souhaite"
    u=ui
    for k in range(ni,nf):
        u=u*q
    return(u)
```

Les commentaires (en vert) ne sont pas indispensables au fonction de l'algorithme et ne servent qu'à expliquer l'algorithme.

2. Quel est le rôle du précédent algorithme ?
3. Parfois lorsque le rang n est très grand la valeur de u_n semble se rapprocher d'une valeur constante que nous appellerons la *limite de la suite*. Dans ce cas nous dirons que la suite est *convergente*. Dans le cas contraire nous dirons que la suite est *divergente*.
   Utilisez le précédent algorithme pour conjecturer la limite des suites géométriques dans les cas présentés dans le tableau. Vous indiquerez si la suite est divergente ou sa limite si elle est convergente.

u_0 \ q	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2
2							
-2							

   Les entêtes de lignes correspondent au terme initial et les entêtes de colonnes correspondent à la raison.

VII Du rab.

Exercice 29.

Exercices 24 à 31 page 85 du manuel Indice.

Correction exercice 29

Exercice 24 page 85.
$u_1 = 7$.

Exercice 25 page 85.
a.

Exercice 26 page 85.
$10 \times \frac{1+10}{2} = 55$.

Exercice 27 page 85.

(a) $u_1 = 8$, $u_2 = 11$, $u_2 = 14$.
(b) Car arithmétique ...
$u_7 = 5 + 3 \times 7 = 26$.

Exercice 28 page 85.

(a) $v_2 = 0$, $v_3 = -2$, $v_4 = -4$.

(b) On peut deviner $v_0 = 4$ et comme arithmétique : $v_n = 4 - 2n$.
$v_8 = 4 - 2 \times 8 = -12$.

Exercice 29 page 85.
Oui car formule de récurrence de la définition d'une suite arithmétique.
$r = -3$.

Exercice 30 page 85.

(a) $w_4 = r + w_3 \Leftrightarrow r = w_4 - w_3 = 8 - 5 = 3$.

(b) $w_3 = w_2 + r \Leftrightarrow w_2 = w_3 - r$. Donc $w_2 = 5 - 3 = 2$. De même : $w_1 = -1$ et $w_0 = -4$.

Exercice 31 page 85.
$S = 99 \times \frac{1+99}{2} = 4950$.

Exercice 30.
Exercices 74 page 88 à 88 page 90 du manuel Indice.

Correction exercice 30

Exercice 74 page 88.

(a) $u_n = 3 + 2n$. $u_7 = 17$.

(b) $r > 0$ donc strictement croissante.

(c) $S = (10 + 1)\frac{3+3+3\times 10}{2} = 191$.

Exercice 75 page 88.

(a) $u_n = 13 - 5n$. $u_{14} = -57$.

(b) $r < 0$ donc strictement décroissante.

(c) $S = (12 + 1)\frac{13+13-5\times 12}{2} = -221$.

Exercice 76 page 88.

(a) $w_n = 5 - 2(n - 1)$. $w_9 = 5 - 2(9 - 1) = -11$.

(b) $r < 0$ donc strictement décroissante.

(c) $S = 13\frac{5+5-2(13-1)}{2} = -91$.

Exercice 77 page 89.

(a) Arithmétique $r = -5$.

(b) Pas arithmétique.

(c) Arithmétique $r = -5$.
(d) Pas arithmétique.

Exercice 78 page 89.
$1C$, $2A$, $3B$, $4B$.

Exercice 79 page 89.

(a) $= B2 + 7$.
(b) $= C2 + B3$.

Exercice 80 page 89.
Si u_0 est le premier terme impair.
$u_0 + (u_0 + 2) + (u_0 + 4) + ... = 153$
$9u_0 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 16 = 153$
$9u_0 + 8 \times \frac{2+16}{2} = 153$
$u_0 = 9$.

Exercice 81 page 89.
$1 + 2 + \cdots + 15 = 15 \times \frac{1+15}{2} = 120$.

Exercice 82 page 89.
$u_n \geqslant 100 \iff 3 + 0,6n \geqslant 1000 \iff n \geqslant \frac{9970}{6}$ et $\frac{9970}{6} \approx 1661,66$.

Exercice 83 page 89.

(a) $u_{12} = -2 + (5 - (-2)) \times 12 = 82$
(b) $u_n = -2 + 7n$.
(c) $u_n \geqslant 1000 \iff n \geqslant \frac{1000+2}{7}$. Donc $n \geqslant 144$.
(d) $500 \leqslant u_n \iff \frac{500+2}{7} \leqslant n$. Or $\frac{502}{7} \approx 71,71$ donc il faut que $72 \leqslant n \leqslant 143$.

Exercice 84 page 89.
Pour que ça commence au rang 0 : $u_0 = 80$.

(a) Arithmétique, $u_0 = 80$ et $r = 20$.
(b)
   i. $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{30} = (30+1)\frac{80+80+30\times 20}{2} = 11780$. Donc $u_1 + u_2 + \cdots + u_{30} = 11780 - 80 = 11700$.
   ii. 11700.
   iii. $(n+1)\frac{80+80+n\times 20}{2} - 80 \leqslant 33000$. La résolution conduit à une inéquation polynomiale de degré deux. Pour simplifier on peut faire en tâtonnant ou avec le tableau de valeur de la calculatrice pour $x \mapsto (x+1)(80+10x)$ et on trouve 14.

Exercice 85 page 89.

(a) $u_0 = 24$. $u_1 = 26$, $u_2 = 28$, $u_3 = 30$.
(b) $u_{n+1} = u_n + 2$. $u_n = 24 + 2n$.
(c) $u_n \geqslant 50 \iff 24 + 2n \geqslant 50 \iff n \geqslant 13$.

Exercice 86 page 89.

(a) $T_5 = 15$, $T_6 = 21$.

i.

ii. En complétant le triangle comportant 20 points sur un côté de l'angle droit en un carré par symétrie et comme les points de la diagonale ont été comptés deux fois : $2T_{20} - 20 = 20^2$.

iii. De même : $2T_n - n = n^2 \Leftrightarrow T_= \frac{n^2+n}{2} \Leftrightarrow T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) i. $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$.

ii. $u_{n+1} = u_n + 1$.

iii. Arithmétique. $u_0 = 0$ et $r = 1$.

iv. $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. $T_n = (n+1)\frac{0+n}{2}$.

(c) $T_n = 2019 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n(n+1) = 2019$. Avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x(x+1)$ on peut voir que ça ne fonctionne pas. Sinon $4018 = 2 \times 3 \times 673$ est la décomposition en facteurs premiers donc ce n'est pas le produit de deux entiers consécutifs.

Exercice 87 page 90.

(a) Vrai.

(b) Faux.

(c) Vrai.

Exercice 88 page 90.

```
def liste(N):
u=u0
L=[u]
for i in range(1,N+1):
    u=u+r
    L=L+[u]
```

Exercice 31.
Exercices 32 à 39 page 85 du manuel Indice.

Correction exercice 31

Exercice 32 page 85.
$v_1 = 4$.

Exercice 33 page 85.
$v_n = 3 \times 5^n$.

Exercice 32.

Exercices 89 page 90 à 103 page 92 du manuel Indice.