Variable aléatoire.

I Définition et loi d'une variable aléatoire.

1 Définition.

Souvent lors d'une expérience aléatoire on ne s'intéresse pas au résultat (issue) de l'expérience mais à un nombre qui lui est associé. Ainsi ce n'est pas la combinaison de 6 nombres du résultat du tirage de loto qui nous intéresse mais la somme que l'on gagne et la probabilité de ce gain.

Définition 1

On appelle *variable aléatoire* une fonction qui à chaque issue de l'expérience associe un nombre (le gain).

Remarques.

1. Les variables aléatoires sont notées le plus souvent X.
2. Autrement dit une variable aléatoire est une fonction $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.
3. L'ensemble de toutes les valeurs possibles pour X est noté $X(\Omega)$. C'est l'ensemble des images de Ω par la fonction X.
4. Dans la pratique, cette année, la variable aléatoire X sera un compteur : compteur de succès, de somme gagnée, etc.
5. La notation X et l'appellation « variable » prendront pleinement leur sens lorsque vous découvrirez les probabilités continues.

Exemples.

1. En associant à chaque tirage du loto une somme gagnée (ou perdue) nous définissons une variable aléatoire.
2. Plus généralement en associant à un jeu de hasard une somme qui peut être une somme gagnée ou perdu (ce que nous appellerons un gain algébrique), nous définissons une variable aléatoire.
3. Le nombre de fois que « face » a été obtenu, dans une expérience consistant à lancer 10 fois une pièce de monnaie, est une variable aléatoire.
4. Notons X la somme obtenue lors du lancé de deux dés à 6 faces.
   Ω, l'univers de l'expérience aléatoire, est formé des couples d'entiers compris entre 1 et 6 : par exemple $(2;6)$.
   X est donc la fonction qui à chaque couple associe la somme des deux nombres : par exemple $X(2;6) = 2+6 = 8$.
   Pour décrire l'ensemble des valeurs prises par X nous écrirons :
   $X \in \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12\}$.

2 Noter un événement avec une variable aléatoire.

Soient X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω et $a \in \mathbb{R}$.

- $\{X = a\}$ est l'ensemble des issues ω de Ω pour lesquelles $X(\omega) = a$.
- $\{X \geqslant a\}$ est l'ensemble des issues ω de Ω pour lesquelles $X(\omega) \geqslant a$.
- De même pour $\{X \leqslant a\}$, $\{X > a\}$ ou $\{X < a\}$.

Exemples.

Notons X la somme obtenue lors du lancé de deux dés à 6 faces. $\{X = 2\}$ est l'événement « obtenir une somme égale à deux » et $\{X \geqslant 5\}$ est l'événement « obtenir une somme supérieure ou égale à 5 ».

Nous pourrions énumérer les issues qui réalisent de tels événements. Ainsi : $\{X = 3\} = \{(1; 2), (2; 1)\}$.

Exercice 1. Application.

Exercices 11 à 15 page 316 du manuel Indice.

Exercice 2. Application.

Exercices 28 à 31 page 318 du manuel Indice.

3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Rappelons qu'une loi de probabilité (ou distribution de probabilité) est la donnée de la probabilité de tous les événements. Dans le cas d'un univers fini il suffit de donner la probabilité de chaque issue.

Exemples.

1. Lorsqu'il y a équiprobabilité toutes les issues ont la même probabilité : l'inverse du cardinal de l'univers.
2. La probabilité d'obtenir $(1; 1)$ lors du lancé de deux dés est de $\frac{1}{36}$ car il y a équiprobabilité des couples (en distinguant les dés par de la couleur par exemple).
3. Lorsqu'on s'intéresse à la somme obtenu lors du lancé de deux dés il n' y a pas équiprobabilité entre les différentes sommes possibles. La probabilité des différentes sommes est alors présentée sous forme d'un tableau :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ce tableau défini une nouvelle loi de probabilité sur l'univers formé des sommes 2, 3, ..., 12. En notant X la somme des deux nombres obtenus nous dirons que nous avons donné la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Définition 2

Soient :

. $p \in \mathbb{N}^*$,

. $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$,

. X une variable aléatoire (sur un univers Ω) telle que $X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$.

Nous appellerons *loi de probabilité de la variable aléatoire* X la donnée des valeurs de $\mathbb{P}(X = x_1)$, $\mathbb{P}(X = x_2)$, ..., $\mathbb{P}(X = x_p)$.

Remarques.

1. La loi de probabilité d'une variable aléatoire est donnée sous forme d'un tableau :

Valeurs de la variable aléatoire	x	x_1	$\ldots$	x_p
Probabilité que la variable aléatoire égale cette valeur.	$\mathbb{P}(X = x)$	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\ldots$	$\mathbb{P}(X = x_p)$

2. La loi de probabilité de la variable aléatoire est réellement une loi de probabilité (ce qu'il faudrait démontrer) qui lors de la suite de vos étude sera souvent notée $\mathbb{P}_X$.
   Ce qui nous garanti que nous obtiendrons effectivement une loi de probabilité c'est le fait que $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ...,$\{X = x_p\}$ constituent un système complet d'événements.
3. Comme pour toutes les lois de probabilités nous retrouvons bien que la somme des probabilités doit être égale à 1 : $\mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_p) = 1$.
   Ce que nous noterons en utilisant le symbole sommatoire Σ

$$\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(X = x_i) = 1.$$

Exemples.

Si X est la variable aléatoire qui a un lancé de deux dés associe la somme des nombre obtenus alors la loi de probabilité de X est

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exercice 3.

Précisez si les tableaux ci-dessous peuvent définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire. Si c'est le cas précisez les valeurs prises par X.

1.

x_i	0,2	0,3	0,5
p_i	0,2	0,6	0,3

2.

x_i	-2	-1	3
p_i	0,25	0,15	0,6

3.

x_i	Vert	Rouge	Bleu
p_i	0,4	0,3	0,3

Correction de l'exercice 3

Il y a deux façons de présenter l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire $X(\omega)$ ou $X \in \{\ldots\}$.

1. La somme des probabilité serait égle à 1,1 ce qui est impossible ce n'est pas une loi de probabilité.
2. Ce peut être la loi de probabilité d'une variable aléatoire : $X \in \{-2;\ -1;\ 3\}$.
3. Si la somme des probabilités est bien égale à 1 cela ne peut pas correspondre à une variable aléatoire car une variable aléatoire associe à un un réel à chaque issue pas une couleur.

Exercice 4. Application.

Exercices 16 page 316 à 21 page 317 du manuel Indice.

Exercice 5. Application.

Exercices 32 page 318 à 41 page 319 du manuel Indice.

4 Exercices.

Exercice 6.

Une entreprise fabrique des laves-linges. Son service qualité note, sur un échantillon de 112 lave-linges prélevés au hasard, au bout de combien de temps la première panne survient.

Date de première panne (en années)	4	5	7	8	10
Nombre d'appareils	6	11	37	45	13

Ainsi lorsque la panne arrive au bout de 4 ans et 3 mois, soit au cours de 5ᵉ année, on note « 5 ans » comme date de la première panne.
On suppose que l'échantillon est représentatif de la production de l'entreprise. On note X la variable aléatoire donnant la date, en années, de la première panne d'un lave-linge pris au hasard.

1. (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Précisez la loi de probabilité de X.
2. Chaque lave-linge bénéfice d'une garantie de 5 ans. Quelle est la probabilité qu'un lave-linge tombe en panne pendant la période garantie ?
3. Un client acquiert une extension de garantie de 2 ans lors de l'achat de son lave-linge.
   Y a-t-il plus d'une chance sur deux que son lave-linge tombe en panne pendant la période garantie ?

Correction de l'exercice 6

1. (a) $$\boxed{X \in \{4; 5; 7; 8; 10\}.}$$
   (b) Déterminons la loi de probabilité de X.

   Commençons par calculer $\mathbb{P}(X = 4)$.
   L'échantillon étant supposé représentatif de la production de l'entreprise la fréquence des lave-linges en panne au cours de la quatrième année peut être confondu avec la probabilité qu'n lave-linge choisi au hasard tombe en panne la quatrième année : $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{6}{112}$.
   En procédant de même pour les autres valeurs de la variable aléatoire :

x	4	5	7	8	10
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{6}{112}$	$\frac{11}{112}$	$\frac{37}{112}$	$\frac{45}{112}$	$\frac{13}{112}$

2. Interprétons l'énoncé avec la variable aléatoire.

   Calculons $\mathbb{P}(X \leqslant 5)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant 5) &= \mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=5)\\ &= \frac{6}{112}+\frac{11}{112}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(X \leqslant 5) = \frac{17}{112}$.

3. Calculons $\mathbb{P}(X \leqslant 7)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant 7) &= \mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=5)+\mathbb{P}(X=7)\\ &= \frac{6}{112}+\frac{11}{112}+\frac{37}{112}\\ &= \frac{27}{56}\\ &\approx 0{,}4821\end{aligned}$$

Il y a moins d'une chance sur deux que le lave-linge tombe en panne pendant la période de garantie.

Exercice 7. Application.

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré. Si on obtient 6 on gagne 3 € ; sinon on ne gagne rien.
La participation au jeu coûte 1 €.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur en euros.

1. Donnez les valeurs prises par X.
2. Déterminez la loi de probabilité de X.

Correction de l'exercice 7

x	2	-1
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Exercice 8. Application.

On lance deux fois une pièce équilibrée. Chaque apparition de Pile rapporte 1 € au joueur, chaque apparition de Face lui fait perdre 2 €.
On appelle G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur en euros.
Déterminez la loi de probabilité de G.

Correction de l'exercice 8

x	-4	-1	2
$\mathbb{P}(G=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Exercice 9. Application.

Une association organise une tombola et met en vente 200 tickets, chacun au prix de 5 €. Parmi eux, 30 font gagner 10 €, 5 font gagner 20 € et 2 font gagner 40 €. Les autres tickets sont perdants.
Une personne achète au hasard un ticket.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du ticket en euros.
Déterminez la loi de probabilité de X.

Correction de l'exercice 9

x	-5	5	15	35
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{163}{200}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{100}$

Exercice 10.

Chaque valeur prise par une variable aléatoire X a une probabilité d'apparition de 0,125.
Combien de valeurs cette variable aléatoire prend-elle ?

Correction de l'exercice 10

La somme des probabilité devant être égale à 1 nécessairement X prend $\frac{1}{0{,}125} = 8$ valeurs distinctes.

Exercice 11.

Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, 3 et 6. La probabilité d'apparition de chacune des trois valeurs est proportionnelle à cette valeur (avec le même rapport de proportionnalité).
Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Correction de l'exercice 11

$1 \times p + 3 \times p + 6 \times p = 1$ donc $p = 0{,}1$.

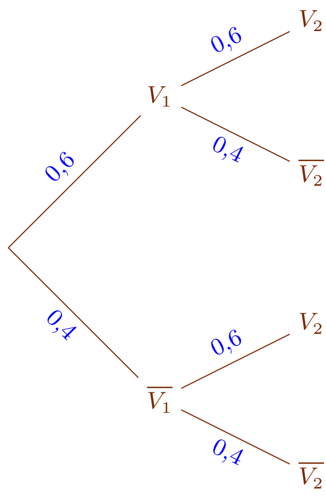
Exercice 12. Application.

Sur le trajet quotidien de Morgane, il y a deux feux tricolores.
Si les deux feux sont au vert le trajet dure 20 minutes. Pour chaque feux rencontré à l'orange ou au rouge, le temps de trajet est augmenté de 2 minutes.
La probabilité pour chaque feu d'être au vert lorsque Morgane s'y présente est égale à 0,6 et ce indépendamment l'un de l'autre.
On appelle D la durée du trajet de Morgane en minutes.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. (a) Quelles sont les valeurs prises par D ?
   (b) Déterminez la loi de probabilité de D. *Vous détaillerez au moins le calcul d'une probabilité.*
   (c) Quelle est la probabilité que le trajet de Morgane dure 22 minutes ou plus ? au plus 22 minutes ?

Correction de l'exercice 12

1.



2. (a) $D \in \{20;\ 22;\ 24\}$.
   (b) Calculons $\mathbb{P}(D = 20)$.

   $D = \{V_1 \cap \overline{V_2};\ V_2 \cap \overline{V_1}\}$ donc :

$$\mathbb{P}(D = 22) = \mathbb{P}(V_1 \cap \overline{V_2}) + \mathbb{P}(V_2 \cap \overline{V_1})$$

Et puisque les feux sont indépendants :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D=22) &= \mathbb{P}(V_1)\times\mathbb{P}(\overline{V_2})+\mathbb{P}(V_2)\times\mathbb{P}(\overline{V_1})\\ &= 0{,}6\times 0{,}4+0{,}4\times 0{,}6\\ &= 0{,}48\end{aligned}$$

En raisonnant de même pour les autres valeurs de la variable aléatoire nous obtenons :

d	20	22	24
$\mathbb{P}(D=d)$	0,36	0,48	0,16

(c) Calculons $\mathbb{P}(D \geqslant 22)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D\geqslant 22) &= \mathbb{P}(D=22)+\mathbb{P}(D=24)\\ &= 0{,}48+0{,}16\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(D \geqslant 22) = 0{,}64.$$

Calculons $\mathbb{P}(D \leqslant 22)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D\leqslant 22) &= \mathbb{P}(D=20)+\mathbb{P}(D=22)\\ &= 0{,}36+0{,}48\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(D \geqslant 22) = 0{,}84.$$

Exercice 13. Application.

Considérons une variable aléatoire X dont le loi de probabilité est résumée dans le tableau ci-dessous.

x	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x)$	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Calculez la probabilité de l'événement $\{X \leqslant 2\}$ et $\{X \geqslant 3\}$.
3. Calculez les deux façons différentes la probabilité de l'événement $\{X > 0\}$.

Correction de l'exercice 13

1. $X \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
2. Calculons $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant 2) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)\\ &= 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leqslant 2) = 0{,}6.}$$

Calculons $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 3) &= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4)\\ &= 0{,}3 + 0{,}1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant 3) = 0{,}4.}$$

3. Calculons $\mathbb{P}(X > 0)$.

Nous pourrions procéder comme ci-dessus, cependant nous allons voir une autre façon de procéder que nous retrouverons régulièrement dans les calculs de probabilités en utilisant l'événement contraire.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 0) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{X > 0})\\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 0)\\ &= 1 - 0{,}2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X > 0) = 0{,}8.}$$

II Espérance, variance et écart type.

1 Espérance.

Définition 3

Soient :

. $p \in \mathbb{N}^*$,

. $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$,

. X une variable aléatoire (sur un univers Ω) telle que $X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$.

Nous appellerons *espérance* de la variable aléatoire X le nombre :

$$\mathbb{E}(X) = P(X = x_1) \times x_1 + \cdots + P(X = x_p) \times x_p.$$

.

Remarques.

1. *L'espérance représente la valeur obtenue en moyenne pour la variable aléatoire si on répète infiniment l'expérience.* C'est ainsi que vous interpréterez l'espérance lorsque nécessaire.
2. La formule de l'espérance est celle d'une moyenne :
$$\mathbb{E}(X) = \frac{\mathbb{P}(X = x_1) \times x_1 + \cdots + \mathbb{P}(X = x_p) \times x_p}{\mathbb{P}(X = x_1) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_p)}$$
mais avec $\mathbb{P}(X = x_1) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_p) = 1$.
3. Nous pourrons utiliser les outils statistiques de calcul de la moyenne de la calculatrice pour calculer l'espérance.
4. Bien souvent dans les exercices la méthode consistera à
   (a) Identifier l'expérience.
   (b) Identifier la variable aléatoire.
   (c) Trouver les valeurs $x_1, \ldots, x_p$ que peut prendre la variable.
   (d) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire sous forme d'un tableau.
   (e) Calculer diverses probabilités liées à la variable aléatoire.
   (f) Calculer l'espérance, la variance, l'écart type grâce à la loi de probabilité.
5. L'espérance nous permet de dire si un jeu d'argent est avantageux (espérance positive) ou pas (espérance négative).

6. Avec le symbole sommatoire Σ nous pouvons écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i.$$

Exemples.

1. Si l'on recommençait indéfiniment un lancé de deux dés, quelle serait en moyenne la somme obtenue ? En notant X la variable aléatoire qui à chaque lancé associe la somme obtenue, nous savons que sa la loi de probabilité est

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Nous en déduisons son espérance

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i \\
&= P(X = x_1) \times x_1 + P(X = x_2) \times x_2 + \cdots + P(X = x_p) \times x_p \\
&= \frac{1}{36} \times 2 + \frac{2}{36} \times 3 + \cdots + \frac{1}{36} \times 12 \\
&= 7
\end{aligned}$$

Ce résultat s'interprète en disant que si l'on recommence indéfiniment le jeu en moyenne la somme sur les deux dés est de 7.

Ce résultat était prévisible au vu de la symétrie de la distribution de probabilité.

2.

Exercice 14.

On lance un dé cubique bien équilibré.
Si on obtient un multiple de 3 on gagne 5 €, sinon on perd 2 €.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu, en euros.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminez la loi de probabilité de X.
3. Calculez l'espérance de X puis interprétez le résultat obtenu. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Correction de l'exercice 14

1. $$\boxed{X \in \{-2;\ 5\}.}$$

2. Déterminons la loi de probabilité de X.

   Calculons par exemple $\mathbb{P}(X = 5)$.
   $\{X = 5\} = \{3;\ 6\}$.
   Il y a équiprobabilité entre les différentes faces du dé, $\{X = 5\}$ est réalisé par 2 issues et l'univers comporte 6 issues donc

   $$\mathbb{P}(X = 5) = \frac{2}{6}.$$

   En procédant de même pour $\{X = -2\}$:

x	-2	5
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

3. Calculons $\mathbb{E}(X)$.

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i \\ &= \frac{2}{3} \times (-2) + \frac{1}{3} \times 5\end{aligned}$$

   $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}$.

   Si le jeu était recommencé indéfiniment, en moyenne, je joueur gagnerait $\frac{1}{3}$ €.

   Puisque $\mathbb{E}(X) > 0$

   le jeu est favorable au joueur.

Exercice 15. Application.

On considère une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité.

x	5	1	10
$\mathbb{P}(X = x)$	0,1	0,6	0,3

Calculez l'espérance de X.

Correction de l'exercice 15

Calculons $\mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X=x_1)\times x_1 + \mathbb{P}(X=x_2)\times x_2 + \cdots + \mathbb{P}(X=x_p)\times x_p \\ &= 0{,}1\times 5 + 0{,}6\times 1 + 0{,}3\times 10\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 4{,}1.}$$

Exercice 16. Application.

Une station de lavage automobile a constaté que parmi ses clients :

- 90 % lavent la carrosserie de leur voiture,
- 30 % nettoient l'intérieur de leur voiture,
- 20 % lavent la carrosserie et nettoient l'intérieur de leur voiture.

Le coût de lavage de la carrosserie est de 5 €, celui du nettoyage de l'intérieur est 2 €. Notons X la variable aléatoire modélisant la dépense en euro, d'un client de la station choisi au hasard.

1. Déterminez la loi de probabilité de X.
2. Calculez $\mathbb{E}(X)$. Interprétez le résultat obtenu.

Correction de l'exercice 16

1. Déterminons la loi de probabilité de X.

   * $X \in \{2;\ 5;\ 7\}$.
   * Notons C l'événement « nettoyer la carrosserie » et I l'événement « nettoyer l'intérieur ». Nous pouvons représenter l situation par un tableau de données croisées :

	C	$\overline{C}$	Total
I	20	10	30
$\overline{I}$	70	0	70
Total	90	10	100

En rouge sont écrites les données trouvées directement dans l'énoncé.

Finalement

x	2	5	7
$\mathbb{P}(X=x)$	0,1	0,7	0,2

2. Calculons $\mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X = x_1) \times x_1 + \mathbb{P}(X = x_2) \times x_2 + \cdots + \mathbb{P}(X = x_p) \times x_p \\ &= 0{,}1 \times 2 + 0{,}7 \times 5 + 0{,}2 \times 7\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbb{E}(X) = 5{,}1.}$

En moyenne un client dépense 5,1 €.

Exercice 17. Application.

Une entreprise est chargée d'entretenir une machine à café de la salle d'attente d'une gare. La machine est utilisée en moyenne 2 500 fois par mois.
40 % des boissons distribuées sont des cafés courts, 45 % des cafés longs et le reste est du chocolat.
Le prix de vente d'un café court est de 0,40 €, celui d'un café long 0,50 € et celui d'un chocolat 0,60 €.
La variable aléatoire X modélise le bénéfice réalisé par l'entreprise pour une boisson vendue, en euro.

1. Établissez la loi de probabilité de X.
2. Calculez l'espérance de X. Interprétez le résultat.
3. Quel est le bénéfice moyen réalisé par l'entreprise en un mois sur la vente des boissons ?

Correction de l'exercice 17

1. Déterminons la loi de X.

$X \in \{0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6\}$.
En confondant les proportion avec les probabilités :

x	0,4	0,5	0,6
$\mathbb{P}(X = x)$	0,4	0,45	0,15

2. Calculons $\mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X = x_1) \times x_1 + \mathbb{P}(X = x_2) \times x_2 + \cdots + \mathbb{P}(X = x_p) \times x_p \\ &= 0{,}4 \times 2 + 0{,}4 \times 0{,}5 + 0{,}15 \times 0{,}6\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X) = 0{,}45.$$

En moyenne chaque client dépense 0,45 euro.

3. Déterminons le bénéfice moyen b.

   Puisque 2 500 boissons sont consommées chaque mois et qu'en moyenne chaque consommateur dépense 0,45 € :

$$\begin{aligned} b &= 2\,500 \times 0{,}45 \\ &= 1125 \end{aligned}$$

Le bénéfice mensuel moyen est de 1 125 €.

Exercice 18.

Un commerçant vend entre 0 et 3 poêles à bois par jour. Soit X la variable aléatoire qui modélise le nombre de poêle vendus quotidiennement. On suppose que X suit la li de probabilité ci-dessous.

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	0,45	0,4	0,1	0,05

1. Calculez et interprétez $\mathbb{E}(X)$.
2. Le vendeur perçoit une commission de 100 € par poêle vendu. Néanmoins, il a des frais qui s'élèvent à 20 € par jour. Déterminez le salaire qu'il peut espérer sur un mois où il travaille 24 jours ouvrés.

2 Variance et écart type.

Définition 4

Soient :

. $p \in \mathbb{N}^*$,

. $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}$,

. X une variable aléatoire (sur un univers Ω) telle que $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.

Nous appellerons *variance* de la variable aléatoire X le nombre :

$$\mathbb{V}(X) = P(X = x_1) \times (x_1 - \mathbb{E}(X))^2 + \cdots + P(X = x_p) \times \left(x_p - \mathbb{E}(X)\right)^2 .$$

.

Remarques.

1. La variance, comme en statistique s'interprète comme une moyenne de carrés des distances entre les valeurs de la variable aléatoire et l'espérance.
2. Elle peut être notée :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(X = x_i) \times (x_i - \mathbb{E}(X))^2 .$$

3. Si la variable aléatoire X représente un gain en euros, la variance s'exprime en « euro au carré » ce qui n'a pas de sens. Pour obtenir une grandeur dans la bonne unité plutôt que d'utiliser la variance nous utiliserons l'*écart type* :

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

4. La variance et l'écart type représentent les écarts de fluctuation autour de la valeur de l'espérance lorsque l'expérience est renouvelée. Pour un jeu d'argent elles indiquent si les écarts entre gains et pertes sont importants (mais en tenant compte de la probabilité que cela se réalise).

Exercice 19.

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

x	5	9	10	12
$\mathbb{P}(X = x)$	0,1	0,45	0,32	0,13

1. Calculez en détaillant $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Vérifiez les résultats avec la calculatrice.

Correction de l'exercice 19

1. * Calculons $\mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X = x_1) \times x_1 + \mathbb{P}(X = x_2) \times x_2 + \dots + \mathbb{P}(X = x_p) \times x_p \\ &= 0{,}1 \times 5 + 0{,}45 \times 9 + 0{,}32 \times 10 + 0{,}13 \times 12\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 9{,}31.}$$

   * Calculons $\mathbb{V}(X)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{P}(X = x_1) \times (x_1 - \mathbb{E}(X))^2 + \mathbb{P}(X = x_2) \times (x_2 - \mathbb{E}(X))^2 + \dots \\ &\quad + \mathbb{P}(X = x_p) \times \left(x_p - \mathbb{E}(X)\right)^2 \\ &= 0{,}1 \times (5 - 9{,}31)^2 + 0{,}45 \times (9 - 9{,}31)^2 + 0{,}32 \times (10 - 9{,}31)^2 \\ &\quad + 0{,}13 \times (12 - 9{,}31)^2\end{aligned}$$

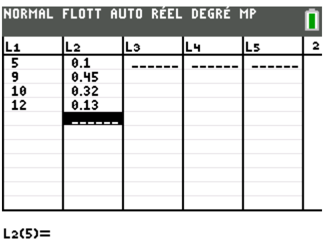
$$\boxed{\mathbb{V}(X) = 2{,}9939.}$$

   * Calculons $\sigma(X)$.

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= \sqrt{\mathbb{V}(X)} \\ &= \sqrt{2{,}9939}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma(X) \approx 1{,}73029.}$$

2. Avec la calculatrice il faut entrer les deux séries dans deux listes.



3 Exercices.

Exercice 20. Application.

Exercices 22 à 27 page 317 du manuel Indice.

Exercice 21. Application.

Exercices 42 à 51 page 319 du manuel Indice.

Exercice 22.

Exercices 52 à 59 page 321 du manuel Indice.

III Exercices.

Exercice 23.

Un restaurateur propose deux formules au déjeuner : le menu A coûte 12 € et le menu B coûte 15 €. Le verre de vin est en supplément et coûte 2 €.
On suppose que 60 % des clients choisissent le menu A, et parmi eux 70 % prennent un verre de vin.
De plus, 40 % des clients choisissant le menu B prennent un verre de vin.

1. Recopiez et complétez ce tableau des fréquences (en pourcentages) par rapport à l'ensemble des clients.

	Vin	Pas de Vin	Total
Menu A	42	...	60
Menu B	...	...	
Total	...	...	100

2. On choisit au hasard un client du restaurant et on note D la variable aléatoire représentant sa dépense en euros. Après avoir précisé les valeurs prises par D, déterminez sa loi de probabilité.
3. Quelle est la probabilité qu'un client dépense plus de 14 € ? qu'il dépense 14 € au plus ?

Exercice 24.

D'après l'INSEE, en 2010, parmi les personnes ayant utilisé Internet au cours des trois derniers mois, 70 % avaient reçu au moins un mail non sollicité (spam).
On suppose que ce résultat est toujours vrai.
On interroge au hasard deux personnes utilisant Internet et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes ayant reçu au moins un spam au cours des trois derniers mois parmi ces deux personnes.

1. Construisez un arbre pondéré représentant la situation. On notera S l'événement « la personne interrogée a reçu un spam au cours des trois derniers mois ».
2. (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   (b) Déterminez la loi de probabilité de X.
3. Quelle est la probabilité d'interroger

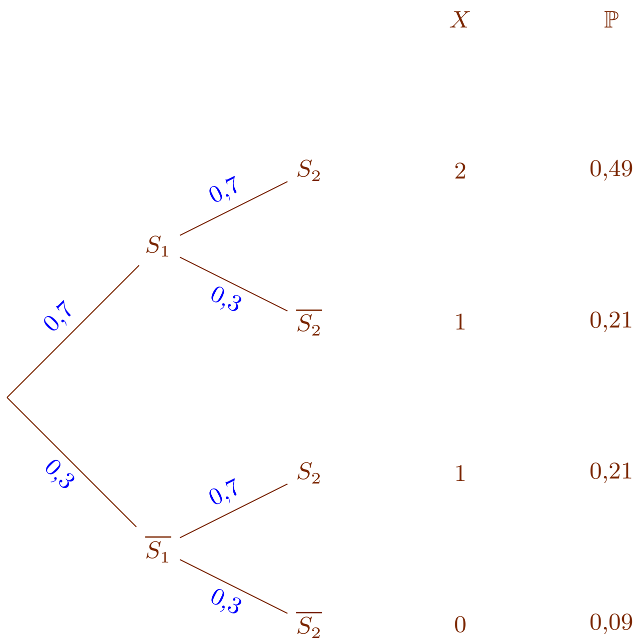
   (a) exactement une personne ayant reçu un spam ?

   (b) au moins une personne ayant reçu un spam ?

   (c) au plus une personne ayant reçu un spam ?

Correction de l'exercice 24

1. Interroger deux personnes sont des événements indépendants donc



2. (a)

$$X \in \{0;\ 1;\ 2\}.$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(X = 1)$.

S_1 et $\overline{S_1}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(S_1 \cap S_2) + \mathbb{P}(\overline{S_1} \cap \overline{S_2})$$

Puisque $\mathbb{P}(S_1) > 0$ et $\mathbb{P}(\overline{S_1}) > 0$, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(S_1) \times \mathbb{P}_{S_1}(S_2) + \mathbb{P}(\overline{S_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{S_1}}(\overline{S_2})\\ &= 0{,}7 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 7\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0{,}42.$$

En procédant de même pour les autres valeurs de X :

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X)$	0,49	0,42	0,09

3. (a) Calculons $\mathbb{P}(X = 1)$.

D'après ce qui précède

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0{,}42.$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)\\ &= 0{,}42 + 0{,}09\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 0{,}51.$$

(c) Calculons $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant 1) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)\\ &= 0{,}49 + 0{,}42\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X \leqslant 1) = 0{,}91.$$

Exercice 25.

Un jeu consiste à lancer trois pièces de monnaie bien équilibrées. À chaque résultat Face obtenu, on gagne 1 €. Le résultat Pile ne rapporte rien.
La participation au jeu coûte 2 €.
On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique d'un joueur en euros.

1. Construisez un arbre pondéré illustrant la situation.
2. (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Déterminez la loi de probabilité de X.
3. Est-il plus probable que le gain du joueur soit strictement positif ou strictement négatif ?

Correction de l'exercice 25

1.
2. (a) $X \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$.
   (b)

x	-2	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. Comparons $\mathbb{P}(X > 0)$ et $\mathbb{P}(X < 0)$.

   D'une part :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 0) &= \mathbb{P}(X = 1)\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

   d'autre part :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 0) &= \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = -1)\\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\\ &= \frac{4}{8}\end{aligned}$$

Il est plus probable que le gain soit strictement négatif.

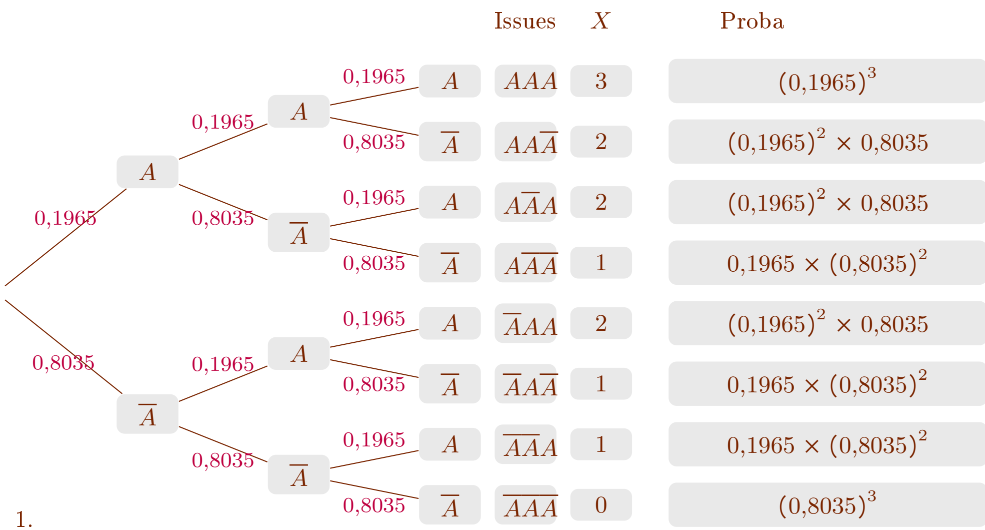
Exercice 26.

Aux élections présidentielles françaises de 2012, il y a eu 19,65 % d'abstentionnistes. On interroge au hasard trois personnes inscrites sur les listes électorales de 2012, et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes parmi les trois interrogées qui se sont abstenues lors de l'élection présidentielle.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré. On notera A l'événement « la personne s'est abstenue ».
2. (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Déterminez la loi de probabilité de X.
   Arrondir les résultats à 10^{-4} près.
3. (a) Quelle est la probabilité d'interroger au plus une personne qui s'est abstenue ?
   (b) Quelle est la probabilité d'interroger plus d'une personne qui s'est abstenue ?

Correction de l'exercice 26

1.



2. (a) $\boxed{X \in \{3; 2; 1; 0\}.}$

   (b) i. $P(X = 0) = (0{,}8035)^3 \approx 0{,}5187$
   ii. $P(X = 1) = 3 \times [(0{,}8035)^2 \times 0{,}1965] \approx 0{,}3806$
   iii. $P(X = 2) = 3 \times [0{,}8035 \times (0{,}1965)^2] \approx 0{,}0931$
   iv. $P(X = 3) = (0{,}1965)^3 \approx 0{,}0076$

   Loi de probabilité avec les résultats arrondis à 10^{-4} près.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,5187	0,3806	0,0931	0,0076

3. (a) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0{,}8993$
   (b) $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \approx 0{,}4813$
4. $E(X) = x_1 P(X = x_1) + \cdots + x_r P(X = x_r) \approx 0{,}5896$
   Si on recommence un grand nombre de fois le sondage des trois personnes en moyenne on peut espérer obtenir $0{,}589\,6$ abstentionnistes parmi les trois.

Exercice 27.

Une urne contient dix boules, dont deux exactement sont rouges.
Un jeu consiste à tirer successivement avec remise deux boules dans l'urne : à chaque boule rouge tirée, le joueur gagne 3 €. Les autres boules ne procurent aucun gain. La mise de départ est de 1 €.
On note X le gain algébrique d'un joueur en euros.

1. Construisez un arbre pondéré illustrant la situation.
2. (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Déterminez la loi de probabilité de X.
3. (a) Est-il plus probable que le gain du joueur soit positif ou négatif ?
   (b) Après avoir calculé l'espérance $\mathbb{E}(X)$, précisez si le jeu est en moyenne à l'avantage du joueur ou non.

Correction de l'exercice 27

1.
2. (a) $X \in \{-1;\ 2;\ 5\}$.
   (b)

x	-1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	0,64	0,32	0,04

3. (a) $\mathbb{P}(X > 0) = 0{,}36$ et $\mathbb{P}(X < 0) = 0{,}64$ donc

   Il est plus probable que le gain soit négatif.

   (b) $\mathbb{E}(X) = 0{,}12 > 0$ donc

   le jeu est favorable au joueur.

Exercice 28.

Une entreprise produit en série des objets quelle destine à la vente. Ces objets peuvent présenter deux types de défauts :

- le défaut S de nature esthétique ;
- le défaut F de fonctionnement.

Un objet est déclaré parfait s'il ne présente aucun des deux défauts.

1. On prélève un lot de 200 objets sur la production et on constate que
   - le défaut S est observé sur 16 objets ;
   - le défaut F est observé sur 12 objets ;
   - 180 objets sont déclarés parfaits.

   Recopiez et complétez le tableau suivant :

	Avec le défaut F	Sans le défaut F	Total
Avec le défaut S			16
Sans le défaut S			
Total			200

2. On admet que la répartition des deux types de défauts, observée dans le lot de 200 objets prélevés, reflète celle de l'ensemble de la production.

   On admet également que tout objet produit est vendu. On sait que le coût de fabrication d'un objet est de 200 € et que le prix de vente de l'objet est fixé à 250 €.

   Si l'objet présente le seul défaut S, l'entreprise accorde au client une réduction de 15 % du prix.

   Si l'objet présente le seul défaut F, l'entreprise réalise les réparations à ses frais pour un coût de 45 €.

   Si l'objet présente les deux défauts, l'entreprise réalise les réparations à ses frais pour un coût de 58 €.

   On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe le bénéfice algébrique, en euro, réalisé par l'entreprise à la vente de cet objet.

   (a) Déterminez la loi de probabilité de X.

   (b) Calculez $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$. Interprétez.

Exercice 29.

Une usine fabrique des vis. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de vis défectueuses sortant par jour de la chaîne de production. On donne la loi de probabilité de X dans le tableau ci-dessous.

x	0	25	50	75	100	125
$\mathbb{P}(X = x)$	0,02	0,09	0,18	0,22	0,17	0,12

x	150	175	200	225	250
$\mathbb{P}(X = x)$	0,07	0,06	0,04	0,02	0,01

1. Déterminez l'espérance $m = \mathbb{E}(X)$ et l'écart type $\sigma = \sigma(X)$. Vérifiez en utilisant les outils statistiques de la calculatrice.
2. Calculez les probabilités $\mathbb{P}(X \geqslant m + \sigma)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant m + 2\sigma)$. Comparer les résultats obtenus.
3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(m - \sigma \leqslant X \leqslant m + \sigma)$ et $\mathbb{P}(m - 2\sigma \leqslant X \leqslant m + 2\sigma)$. Les comparer.

Exercice 30.

Romain se dit « champion » en lacer de boules de papier dans un poubelle. À trois mètres, il réussit son tir 8 fois sur 10. Romain tente trois lancers.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis sur ses trois tirs.

1. Représentez la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminez la loi de probabilité de X.
3. Quelle est la probabilité que Romain réussisse au moins deux lancers sur les trois qu'il tente ?
4. Calculez l'espérance $\mathbb{E}(X)$. Interprétez.

Exercice 31.

Une urne contient dix boules, dont deux exactement sont rouges.
Un jeu consiste à tirer successivement avec remise deux boules dans l'urne : à chaque boule rouge tirée, le joueur gagne 3 €. Les autres boules ne procurent aucun gain. La mise de départ est de 1 euro.
On note X le gain algébrique d'un joueur en euros.

1. Construisez un arbre pondéré illustrant la situation.
2. (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Déterminez la loi de probabilité de X.
3. (a) Est-il plus probable que le gain du joueur soit positif ou négatif ?
   (b) Après avoir calculé l'espérance $\mathbb{E}(X)$, précisez si le jeu est en moyenne à l'avantage du joueur ou non.

Exercice 32.

Un homme de 30 ans veut contracter une police d'assurance de 100 000 € valable un an. En se basant sur les tables de mortalité, la compagnie a déterminé que la probabilité qu'un homme de 30 ans meure dans l'année qui suit était de 0,001 77.
Quelle somme doit-elle demander au client pour sa police d'assurance, si la compagnie veut espérer faire un bénéfice de 50 €.

Exercice 33.

Lors d'un jeu télévisé, le candidat finaliste doit choisir entre trois portes à ouvrir. S'il ouvre la première porte, il remporte un chèque de 50 000 euros. S'il ouvre la deuxième porte, il a 10 % de chances de remporter 200 000 euros, 88 % de chances de remporter 35 000 euros et 2 % de risques de repartir les mains vides. S'il ouvre la troisième porte, il a 1 % de chance de gagner 3 000 000 euros, 94 % de chances de gagner 20 000 euros et 5 % de risque de ne rien gagner.
Quelle porte doit-il choisir pour avoir la plus grande espérance de gain ?

IV Échantillonnage.

Exercice 34.

D'après un sondage BVA datant de 2018, 76 % des jeunes gens âgés de 18 à 24 ans pratiquent une activité sportive toutes les semaines. On suppose que cette proportion se maintient ensuite.

1. On choisit au hasard une personne âgée de 18 à 24 ans et on s'intéresse à sa pratique sportive hebdomadaire.

   On considère la fonction `simult(p)` ci-dessous.

```python
from random import*
def simul(p):
  if random()<p:
    return 1
  else:
    return 0
```

   Justifiez que `simul(0.76)` permet de simuler l'expérience. Préciser le résultat renvoyé lorsque la personne pratique un sport de façon hebdomadaire.

2. On choisit maintenant au hasard deux personnes âgées de 18 à 24 ans. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant une pratique sportive hebdomadaire parmi les deux choisies.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   (b) Expliquez pourquoi la fonction `simul2(0.76)` donnée ci-dessous permet de simuler cette expérience.

```python
def simul2(p):
compt=0
  for i in range(2):
    compt=compt+simul(p)
  return compt
```

   (c) On simule 10 000 fois cette expérience à l'aide du programme ci-dessous.

```python
p=0.76
L=[0,0,0]
for i in range(10000):
  j=simul2(p)
  L[j]=L[j]+1
print(L)
```

   On a obtenu l'affichage suivant : `L=[556,3695,5749]`.

   Conjecturez la loi de probabilité de X.

3. En représentant la situation à l'aide d'un arbre pondéré déterminez la loi de probabilité de X.

   Comparez avec le résultat de la question 2.(c).

Exercice 35.

Une urne contient dix boules dont deux sont rouges. Un jeu, dont la mise de départ est 3 €, consiste à tirer successivement avec remise deux boules. Chaque boule rouge tirée rapporte 4 €.
On note X le gain algébrique d'un joueur, en euro.
On considère les fonctions `simul` et `echantillon` ci-dessous

```python
from random import*
def simul():
  x=-3
  if random()<0.2:
    x=x+4
  return x

def echantillon(N):
  L=[]
  for i in range(N):
    L.append(simul())
  return L
```

1. Soit N dans $\mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que la fonction `simul()` renvoie la valeur prise par la variable X sur une simulation d'une partie.
   (b) Que permet de faire la fonction echantillon(N) ?
   (c) Créez une fonction `moyenne(N)` qui renvoie la moyenne observée du gain sur une simulation de N parties. Exécutez-le pour $N = 100$, puis $N = 1\,000$.
2. Ce jeu est-il favorable au joueur ? Justifiez en déterminant la loi de probabilité de X à l'aide d'un arbre.