Probabilités conditionnelles et indépendance.

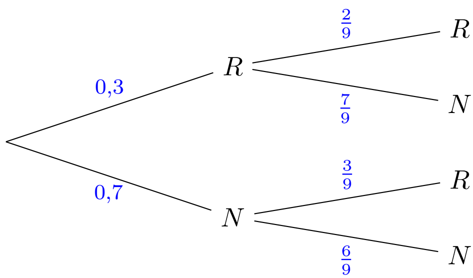
I Probabilité conditionnelle.

1 Exemples.

Dans certaines situations les notations que nous avons gardées de la classe de seconde vont se révéler insuffisantes pour d'écrire les situations.

Considérons par exemple le dispositif expérimental suivant : on considère une urne remplie de 3 boules rouges et 7 boules noires indiscernables. On effectue deux tirages successives d'une boule sans remise.

Représentons la situation par un arbre pondéré :



Il semble mal aisé de répondre à des questions comme :

— que vaut $\mathbb{P}(N)$? En effet trois probabilités sont associées à N. Nous devons introduire une notation pour les distinguer.

— quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au second tirage ? Nous devons introduire une notation pour distinguer le R du premier tirage du R du second.

Exercice 1.
On lance une fois un dé parfait. On sait que le résultat est un nombre inférieur ou égale à 5. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égale à 3 ?

L'exercice précédent nous montre que le fait que nous ayons une information supplémentaire sur le résultat de l'expérience aléatoire peut être comme un changement d'univers.

2 Définition.

Définition 1

Soient $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$.

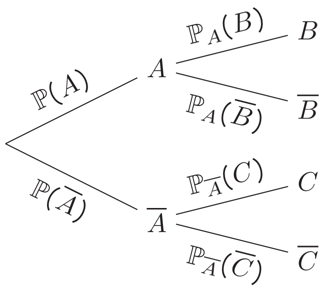
Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, nous appellerons *probabilité de B sachant A*, et nous noterons $\mathbb{P}(B|A)$ ou $\mathbb{P}_A(B)$, le réel :

$$\mathbb{P}_A(B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

L'application $\mathbb{P}_A : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;1]$ qui à tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ associe $\mathbb{P}_A(B)$ est une probabilité sur Ω.

Remarques.

1. Cette nouvelle probabilité peut être vue comme une probabilité sur l'univers A. La probabilité conditionnelle peut être vue comme un changement d'univers.
2. Puisque $\mathbb{P}_A$ est une probabilité à part entière les propriétés des probabilités s'appliquent.
3. Dans le cas de l'équiprobabilité ce résultat consiste à calculer une proportion, autrement dit à changer d'ensemble de référence dans le calcul de proportion.
4. Un petit schéma valant mieux qu'une longue explication, voici un arbre pondéré qui permet de comprendre et mémoriser cette situation :



Exercice 2.

Dans un établissement scolaire on choisit un élève au hasard (on admet qu'il y a équiprobabilité). on considère les événements suivants :
T : « L'élève a travaillé sérieusement et régulièrement toute l'année. »
R : « L'élève réussit son examen final. »
Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves.

	T	$\overline{T}$	total
R	702	273	975
$\overline{R}$	78	247	325
total	780	520	1 300

1. Calculez la probabilité qu'un élève soit travailleur.
2. Calculez la probabilité qu'un élève soit travailleur et qu'il ait réussi son examen.
3. Calculez la probabilité qu'en choisissant parmi ceux qui travaillent nous obtenions un élève qui a réussi son examen.

Exercice 3.

Dans une classe de 36 élèves, il y a 15 garçons. 25 % des élèves sont des filles qui font de la musique. Parmi les garçons, 20 % font de la musique. On choisit un élève au hasard dans cette classe. M est l'événement « l'élève choisi fait de la musique » et G l'événement « l'élève choisi est un garçon ».

1. Traduire avec les notations des probabilités et les événements M et G, les informations de cet énoncé.
2. On a choisi une fille qu'elle est la probabilité qu'elle fasse de la musique ?

Exercice 4.

Une urne contient sept boules : quatre rouges numérotées 1, 2, 3, 4 et trois vertes numérotées 1, 2, 3.
On tire deux boules au hasard, successivement et sans remise.

1. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge sachant que la première boule tirée est rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient rouges ?

Exercice 5.

Une boîte contient 30 caramels et 20 nougats. On choisit deux bonbons au hasard, successivement et sans remise.

1. Quelle est la probabilité que le deuxième bonbon choisi soit un caramel sachant que le premier était un nougat ?
2. Quelle est la probabilité que le deuxième bonbon choisi soit un nougat sachant que le premier était un nougat ?

3 Formule des probabilités composées.

Proposition 1 - formule des probabilités composées

Soient $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A et B des événements avec $\mathbb{P}(A) > 0$.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(B)$$

Remarques.

1. Du fait de la symétrie de l'intersection nous avons tout aussi bien : $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}_B(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ en supposant $\mathbb{P}(B) > 0$.
2. Dans la pratique cette formule est celle du principe multiplicatif : la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités qui apparaissent sur ce chemin. $A \cap B$ est le chemin passant par A et B, $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de A, $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de B sachant que nous sommes passé d'abord par B.

   L'apport de cette nouvelle façon de voir est que le principe multiplicatif ne tient que pour des probabilités rationnelles.
3. Le principe multiplicatif reste valable pour des chemins passant par plus de deux nœuds et il en est de même pour la formule des probabilités composées. Si un chemin passe par les nœuds A_1, A_2, ..., A_n (avec $n \in \mathbb{N}^*$), et si les probabilités sont non nulles, alors

   $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

   Par exemple pour $n = 3$ on a

   $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3).$$

   En fait chaque facteur est la probabilité d'un nœud sachant qu'on est passé par tel chemin auparavant.

4 Formule des probabilités totales.

Définition 2

Soient $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Nous appellerons *système complet d'événements* (ou partition) toute famille A_1, A_2, ..., An d'événements tous non vides et deux à deux incompatibles (ou disjoints) et dont la réunion égale Ω : $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n = \Omega$.

Proposition 2 - formule des probabilités totales

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,

. A_1, A_2, ..., A_n un système complet d'événements,

. B un événement.

Alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B).$$

Remarques.

1. Dans la pratique nous utiliserons souvent un cas particulier. Si tous les $\mathbb{P}(A_i) > 0$ alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_{A_1}(B) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{A_2}(B) \cdot \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}_{A_n}(B) \cdot \mathbb{P}(A_n).$$

Exercice 6.

Un test est mis en place pour évaluer l'efficacité d'un médicament sur un échantillon d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. 50 % des individus prennent le médicament, les autres reçoivent un placebo.
On constate une baisse significative du taux de glycémie pour 80 % des individus ayant pris le médicament et pour 10 % des individus ayant pris le placebo.
On tire au hasard la fiche d'une personne de cet échantillon. Calculez la probabilité que son taux de glycémie ait baissé de façon significative.

Exercice 7.

Un maraîcher propose trois sortes de poivrons à la vente : des rouges, des verts et des jaunes.
Les poivrons rouges forment 60 % de son stock, les poivrons verts 15 % et le reste est constitué de poivrons jaunes.
2 % des poivrons rouges sont abîmés ainsi que 1 % des poivrons verts et 0,5 % de poivrons jaunes.
On tire au hasard un poivron dans le stock.

1. Quelle est, arrondie au millième, la probabilité que le poivron tiré au hasard soit abîmé ?
2. Le poivron choisi est abîmé. Calculez une valeur approchée de la probabilité qu'il soit rouge.

Exercice 8.

Dans une population donnée, une maladie touche 1 % de la population. Un test de dépistage est positif pour 98 % des personnes atteintes, et négatif pour 95 % des personnes saines. On désigne une personne au hasard dans la population et on lui applique le test.
Quelle est la probabilité que le résultat du test soit erroné ?

Exercice 9.

Une usine fonctionne suivant les « trois-huit » : le matin (6h-14h), l'après-midi (14h-22h), la nuit (22h-6h). Le tableau ci-dessous indique, sur une journée t selon leur horaire de travail, le taux d'absentéisme et la répartition des employés.

	Matin	Après-midi	Nuit
Taux d'absentéisme	4 %	8 %	14 %
Répartition	40 %	40 %	20 %

Le lendemain le contremaître contacte au hasard un employé qui aurait dû travailler la veille.

1. Représentez cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que cet employé ait été du matin et absent la veille ?
3. Quelle est la probabilité que cet employé ait été absent la veille ?
4. L'employé contacté était présent la veille. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé le matin ?

II Indépendance.

1 Événements indépendants.

Définition 3

Soient :
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. A et B deux événements.

Nous dirons que *A et B sont indépendants* si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Remarques.

1. Il ne s'agit pas d'une proposition. L'égalité n'est en général pas vrai. Simplement ici nous nous intéressons à un cas particulier.
2. Cette définition est assez obscure. Si A et B sont indépendants et si $\mathbb{P}(A) > 0$ alors avec la formule des probabilités composées nous obtenons : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$. Autrement dit la probabilité de A est la même que B ait été réalisé ou pas. D'où l'idée que dans ce cas la réalisation de l'événement A est indépendante de la réalisation de l'événement B.

Exercice 10.

On tire au hasard une carte parmi 52 et on considère les événements A : « la carte tirée est un as » et T : « la carte tirée est un trèfle ».
A et T sont-ils indépendants ?

Exercice 11.

Soient A et B deux événements d'un même univers Ω.

1. Si A et B sont indépendants, A et B sont-ils incompatibles ?
2. Si A et B sont incompatibles, sont-ils indépendants ?

Exercice 12.

On considère deux événements A et B tels que :

$$\mathbb{P}(A) = 0{,}4 \text{ et } \mathbb{P}(B) = 0{,}3.$$

1. Calculez les probabilités de $A \cap B$ et de $A \cup B$ si A et B sont incompatibles.
2. Calculez les probabilités de $A \cap B$ et de $A \cup B$ si A et B sont indépendants.

Exercice 13.

On interroge 2500 personnes sur leur activité principale les dimanches après-midi. Le tableau ci-dessous récapitule les réponses obtenues en fonction du sexe des personnes et de deux types d'activités : sportive ou culturelle.

	Femme	Homme	Total
Activité sportive	272	378	650
Activité culturelle	58	42	100
Aucune des deux activités	1120	630	1750
Total	1450	1050	2500

On choisit une des personnes interrogées au hasard.

1. On note respectivement F et C les événements « la personne est une femme » et « la personne pratique une activité culturelle ».
   (a) Calculez les probabilités de F, C et $F \cap C$.
   (b) Les événement F et C sont-ils indépendants ?
2. (a) Calculez la probabilité que la personne soit un homme sachant qu'il ne pratique aucune des activités.
   (b) Les événements « la personne est un homme » et « la personne ne pratique aucune des deux activités » sont-ils indépendants ?

2 Épreuves indépendantes.

Une *épreuve* désigne une expérience aléatoire qui est combinée à d'autres pour former une unique expérience aléatoire. Ainsi lancer deux fois une pièce de monnaie est une expérience aléatoire composée de deux épreuves.

Nous dirons que *deux épreuves sont indépendantes* lorsque les résultats d'une épreuve n'ont pas d'influence sur l'autre. Typiquement il s'agit de situation assimilables à des tirages avec remise.

Exercice 14.

Un circuit électronique intègre deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'événement « le composant 1 est défaillant avant 1 an » et on note D_2 l'événement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = 0{,}39$.
Deux montages possibles sont envisagés : en série (circuit A) et en parallèle (circuit B).

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit B est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculez la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit A est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculez la probabilité que le circuit A soir défaillant avant un an.

Exercice 15.

Le tableau ci-dessous indique les différentes catégories de places vendues pour assister à un concert.

Catégorie A	Catégorie B	Catégorie C
3 000 places assises proches de la scène	4 200 places assises éloignées de la scènes	4 800 places dans la fosse debout

1. On choisit au hasard un spectateur.
   Calculez les probabilités que le spectateur soit en catégorie A, B puis en catégorie C.
2. On choisit au hasard deux spectateurs. On assimile ces choix à deux tirages successifs avec remise.
   Construisez un arbre pondéré traduisant la situation.
3. Calculez la probabilité que :
   (a) les deux spectateurs soient dans la fosse,
   (b) un seul des deux spectateurs soit dans la fosse.

III Exercices.

Exercice 16.

Dans une usine, deux lignes de montage fabriquent des composants électroniques. La ligne A fabrique 70 % des composants. Le reste est fabriqué par la ligne B. La ligne A a un taux de composants défectueux en sortie de 0,5 %. Pour la ligne B, ce taux est de 0,4 %. On choisit au hasard un composant à la sortie de l'usine.

1. Quelle est la probabilité que ce composant ait été fabriqué par la ligne A et présente un défaut ?
2. Calculez la probabilité que ce composant présente un défaut.
3. En déduire, le composant présentant un défaut, la probabilité que ce composant ait été fabriqué sur la ligne A.

Exercice 17.

Dans une population 0,2 % des individus sont atteint d'une certaine maladie, n'ayant pas encore déclaré de symptômes. Un test de dépistage de cette maladie donne les résultats suivants :

— sur un individu malade le test est positif dans 99,9 % des cas,

— sur un individu non-malade le test est négatif dans 99,7 % des cas.

Quelle est la probabilité qu'un individu testé positivement soit malade ?

Exercice 18.

Dans un élevage de chats, 40 % des chats sont gris et tous les autres chats sont noirs. 89 % des chats ont les yeux verts et 80 % des chats gris ont les yeux verts. On attrape un chat au hasard. On note G l'événement « le chat est gris » et V l'événement « le chat a les yeux verts ».

1. Déterminez la probabilité que le chat soit noir et qu'il ait les yeux verts.
2. Le chat attrapé a les yeux verts. Quelle est la probabilité qu'il soit gris ?

Exercice 19.

Lors d'un examen un exercice de probabilité est posé. On considère qu'un candidat a 60 % de chances de résoudre l'exercice s'il n'a pas eu connaissance du sujet avant l'épreuve. S'il a eu connaissance du sujet avant l'épreuve, il a alors 95 % de chances de résoudre l'exercice. On estime qu'un candidat sur cent a eu connaissance du sujet.

On note :
- C l'événement « le candidat a eu connaissance du sujet ».
- R l'événement le candidat a réussi a résoudre l'exercice.

1. Donnez les probabilités $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}_C(R)$ et $\mathbb{P}_{\overline{C}}(R)$.
2. Calculez $\mathbb{P}(C \cap R)$ puis $\mathbb{P}(R)$.
3. Un candidat se présente et il réussi à résoudre l'exercice. Déduisez de ce qui précède la probabilité (à 0,1 % près) que ce candidat ait eu connaissance du sujet avant l'épreuve.

Exercice 20.

On veut dépister une maladie m dont la fréquence (ou prévalence) dans la population P est notée p avec $0 < p < 1$. On met en place un test diagnostique qui est indépendant de la valeur de p.
On prélève au hasard dans la population P un individu ayant été soumis au test diagnostique.
On définit les événements suivants :

$$T : \text{« le test est positif » et } M : \text{« l'individu est malade »}.$$

Pour ce test diagnostique le fabriquant a indiqué :

- la probabilité $P_M(T)$ qu'un individu ait un test positif sachant qu'il est malade, est appelée sensibilité du test et est notée S_e.
- la probabilité $P_{\overline{M}}(\overline{T})$ qu'un individu ait un test négatif sachant qu'il n'est pas malade est appelée spécificité du test et est notée S_p.

1. Illustrer la situation par un arbre pondéré en complétant toutes les branches à l'aide de p, S_e et S_p.
2. (a) Exprimer $P(M \cap T)$, $P(M \cap \overline{T})$, $P(\overline{M} \cap T)$, $P(\overline{M} \cap \overline{T})$ à l'aide de p, S_e et S_p.
   (b) Montrer que la probabilité que le test délivre une juste conclusion est : $p(S_e - S_p) + S_p$.
3. On appelle
   - valeur prédictive positive du test (VPP), la probabilité $P_T(M)$ d'être malade, sachant que le test est positif.
   - valeur prédictive négative du test (VPN), la probabilité $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$ d'être non malade, sachant que le test est négatif.

   (a) Calculer $P(T)$ à l'aide de p, S_e et S_p.
   (b) Exprimer VPP et VPN en fonction de p, S_e et S_p.
   (c) Le test est considéré comme intéressant si VPP $> p$. Montrer alors que : $S_e + S_p > 1$.

Exercice 20. Suite.

4. La prévalence p du paludisme est de 90 % en Tanzanie et de 0,001 en France. Le test biologique utilisé a pour sensibilité $S_e = 0{,}9$ et pour spécificité $S_p = 0{,}8$. Cela est valable pour toute la question 4.

   (a) Calculer la VPP en Tanzanie arrondie à 10^{-2} près.

   On admet que $\text{VPP}_{France} = 0$; $\text{VPN}_{Tanzanie} = 0{,}47$; $\text{VPN}_{France} = 1$.

   (b) En déduire ce que l'on peut dire en terme de probabilité à un patient de Tanzanie et à un patient français selon que le test est positif ou négatif.

   (c) On considère la fonction v définie par $v(p) = P_T(M)$.

      i. Donner l'expression de $v(p)$ en fonction de p.

      ii. Donner le sens de variation de la fonction v.

      iii. Lorsque p est supérieur à 0,8, en quoi la positivité du test est-elle un élément important du diagnostique ?

IV Exercices de démonstrations.

Exercice 21.

Démontrez, à partir de la définition d'une probabilité (confer ici), les propriétés suivantes d'une probabilité où A et B désignent deux événements quelconques.
Indication. Il faut raisonner sur les ensembles (schématisés par des diagrammes de Venn ou diagrammes patates).

1. Ensemble vide. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
2. Complémentaire. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. Différence. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. Croissance. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
5. Réunion (formule du crible). $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 22.

Démontrez qu'une probabilité conditionnelle est effectivement une probabilité (confer ici).

Exercice 23.

Soient :

. $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,

. A et B deux événements.

Démontrez que si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.