Probabilités conditionnelles et indépendance.

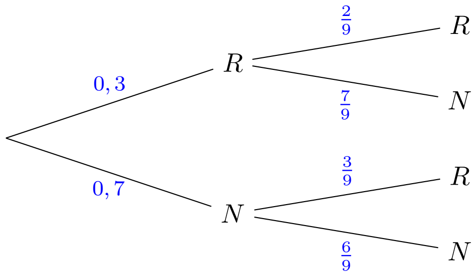
I Probabilité conditionnelle.

1 Exemples.

Dans certaines situations les notations que nous avons gardées de la classe de seconde vont se révéler insuffisantes pour d'écrire les situations.

Considérons par exemple le dispositif expérimental suivant : on considère une urne remplie de 3 boules rouges et 7 boules noires indiscernables. On effectue deux tirages successives d'une boule sans remise.

Représentons la situation par un arbre pondéré :



Il semble mal aisé de répondre à des questions comme :

— que vaut $\mathbb{P}(N)$? En effet trois probabilités sont associées à N. Nous devons introduire une notation pour les distinguer.

— quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au second tirage ? Nous devons introduire une notation pour distinguer le R du premier tirage du R du second.

Exercice 1.
On lance une fois un dé parfait. On sait que le résultat est un nombre inférieur ou égale à 5. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égale à 3 ?

Correction exercice 1

Puisque le résultat est inférieur à 5 nous pouvons considérer comme univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Le dé étant parfait il est raisonnable de modéliser la situation par l'équiprobabilité.

L'événement E : « obtenir un nombre supérieur ou égale à 3 » est réalisé par 3 issues donc

$\mathbb{P}(E) = \frac{3}{5}$.

Fin correction exercice 1.

L'exercice précédent nous montre que le fait que nous ayons une information supplémentaire sur le résultat de l'expérience aléatoire peut être vu comme un changement d'univers.

2 Définition.

Définition 1

Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$.

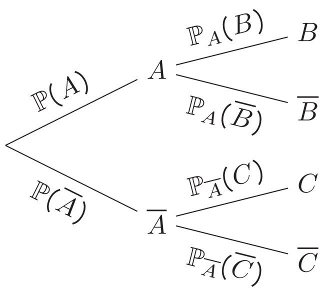
Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, nous appellerons *probabilité de B sachant A*, et nous noterons $\mathbb{P}(B|A)$ ou $\mathbb{P}_A(B)$, le réel :

$$\mathbb{P}_A(B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

L'application $\mathbb{P}_A : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;1]$ qui à tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ associe $\mathbb{P}_A(B)$ est une probabilité sur Ω.

Remarques.

1. Cette nouvelle probabilité peut être vue comme une probabilité sur l'univers A. La probabilité conditionnelle peut être vue comme un changement d'univers.
2. Puisque $\mathbb{P}_A$ est une probabilité à part entière les propriétés des probabilités s'appliquent.
3. Dans le cas de l'équiprobabilité ce résultat consiste à calculer une proportion, autrement dit à changer d'ensemble de référence dans le calcul de proportion.
4. Un petit schéma valant mieux qu'une longue explication, voici un arbre pondéré qui permet de comprendre et mémoriser cette situation :



Exercice 2.

Dans un établissement scolaire on choisit un élève au hasard (on admet qu'il y a équiprobabilité). on considère les événements suivants :

T : « L'élève a travaillé sérieusement et régulièrement toute l'année. »

R : « L'élève réussit son examen final. »

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves.

	T	$\overline{T}$	total
R	702	273	975
$\overline{R}$	78	247	325
total	780	520	1 300

1. Calculez la probabilité qu'un élève soit travailleur.
2. Calculez la probabilité qu'un élève soit travailleur et qu'il ait réussi son examen.
3. Calculez la probabilité qu'en choisissant parmi ceux qui travaillent nous obtenions un élève qui a réussi son examen.

Correction exercice 2

Il faut absolument savoir exprimer en français une probabilité conditionnelle.

Dans cet exemple il est possible de ne raisonner que sur les proportions sans même réfléchir en termes de probabilités.

1. Modélisons l'expérience aléatoire : notons Ω l'ensemble des élèves et munissons cet univers de la loi de probabilité de l'équiprobabilité.

   Calculons $\mathbb{P}(T)$.

   La loi de probabilité et l'équiprobabilité, l'événement T est réalisé par 780 issues et l'univers en comporte 1 300 donc

   $$\mathbb{P}(T) = \frac{780}{1300}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(T) = 0,6.}$$

2. Calculons $\mathbb{P}(T \cap R)$.

   La loi de probabilité et l'équiprobabilité, l'événement $T \cap R$ est réalisé par 702 issues et l'univers en comporte 1 300 donc

$$\mathbb{P}(T) = \frac{702}{1300}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T \cap R) = \tfrac{27}{50}.}$$

3. Calculons $\mathbb{P}T(R)$.

   Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_T(R) &= \frac{\mathbb{P}(T \cap R)}{\mathbb{T}} \\ &= \frac{\frac{27}{50}}{0,6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_T(R) = 0,9.}$$

Ici tout se passe comme si nous changions d'univers, Ω', en prenant l'ensemble des élèves qui travaillent.

La loi de probabilité et l'équiprobabilité, l'événement choisir un élève reçu parmi ceux qui ont travaillé est réalisé par 702 issues et l'univers en comporte 780 donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_T(R) &= \frac{702}{780} \\ &= 0,9\end{aligned}$$

Fin correction exercice 2.

Exercice 3.

Dans une classe de 36 élèves, il y a 15 garçons. 25 % des élèves sont des filles qui font de la musique. Parmi les garçons, 20 % font de la musique. On choisit un élève au hasard dans cette classe. M est l'événement « l'élève choisi fait de la musique » et G l'événement « l'élève choisi est un garçon ».

1. Traduire avec les notations des probabilités et les événements M et G, les informations de cet énoncé.
2. On a choisi une fille qu'elle est la probabilité qu'elle fasse de la musique ?

Correction exercice 3

1. $\mathbb{P}(G) = \frac{15}{36}$,
   $\mathbb{P}(M \cap \overline{G}) = \frac{25}{100}$,
   $\mathbb{P}_G(M) = \frac{20}{100}$.
2. Calculons $\mathbb{P}_{\overline{G}}(M)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\overline{G}}(M) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{G} \cap M)}{\mathbb{P}(\overline{G})}\\ &= \frac{\mathbb{P}(\overline{G} \cap M)}{1 - \mathbb{P}(G)}\\ &= \frac{0,25}{1 - \frac{15}{36}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{\overline{G}}(M) = \frac{3}{7}.}$$

Fin correction exercice 3.

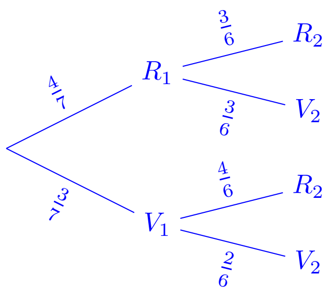
Exercice 4.

Une urne contient sept boules : quatre rouges numérotées 1, 2, 3, 4 et trois vertes numérotées 1, 2, 3.
On tire deux boules au hasard, successivement et sans remise.

1. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge sachant que la première boule tirée est rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient rouges ?

Correction exercice 4

1. Représentons l'expérience par un arbre pondéré.



D'après l'arbre pondéré :

$$\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{3}{6}.$$

2. Calculons $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$.

   En utilisant ce que nous appellerons toujours le principe multiplicatif, pour l'instant, nous avons :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}$$

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{7}.$$

Fin correction exercice 4.

Exercice 5.

Une boîte contient 30 caramels et 20 nougats. On choisit deux bonbons au hasard, successivement et sans remise.

1. Quelle est la probabilité que le deuxième bonbon choisi soit un caramel sachant que le premier était un nougat ?
2. Quelle est la probabilité que le deuxième bonbon choisi soit un nougat sachant que le premier était un nougat ?

3 Formule des probabilités composées.

Proposition 1 - formule des probabilités composées

Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A et B des événements avec $\mathbb{P}(A) > 0$.

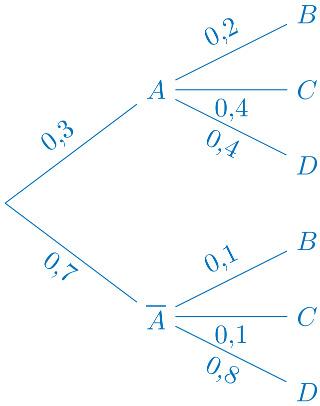
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(B)$$

Démonstration 1

Découle directement de la définition de probabilité conditionnelle. ■

Exemples.

1. Considérons une expérience schématisée par l'arbre suivant :



L'événement $A \cap B$ s'interprète comme le chemin passant par A et B. Comme $\mathbb{P}(A) \neq 0$, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) \\ &= 0,3 \times 0,2 \\ &= 0,6\end{aligned}$$

Remarques.

1. Du fait de la symétrie de l'intersection nous avons tout aussi bien : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ en supposant $\mathbb{P}(B) > 0$.
2. Dans la pratique cette formule est celle du principe multiplicatif : la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités qui apparaissent sur ce chemin. $A \cap B$ est le chemin passant par A et B, $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de A, $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de B sachant que nous sommes passé d'abord par B.

   L'apport de cette nouvelle façon de voir est que le principe multiplicatif ne tient que pour des probabilités rationnelles.
3. Le principe multiplicatif reste valable pour des chemins passant par plus de deux nœuds et il en est de même pour la formule des probabilités composées. Si un chemin passe par les nœuds A_1, A_2, ..., A_n (avec $n \in \mathbb{N}^*$), et si les probabilités sont non nulles, alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Par exemple pour $n = 3$ on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3).$$

En fait chaque facteur est la probabilité d'un nœud sachant qu'on est passé par tel chemin auparavant.

4 Formule des probabilités totales.

Définition 2

Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Nous appellerons *système complet d'événements* (ou partition) toute famille A_1, A_2, $\dots$, An d'événements tous non vides et deux à deux incompatibles (ou disjoints) et dont la réunion égale Ω : $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n = \Omega$.

Exemples.

1. Pour un lancé de dé à 6 faces, $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 5\}$ et $C = \{4, 6\}$ forment un système complet d'événements.
2. Si A est un événement alors A et son contraire $\overline{A}$ forment un système complet d'événements que nous retrouverons souvent dans les exercices.

Proposition 2 - formule des probabilités totales

Soient :

. $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,

. A_1, A_2, $\dots$, A_n un système complet d'événements,

. B un événement.

Alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B).$$

Remarques.

1. Dans la pratique nous utiliserons souvent un cas particulier. A et $\overline{A}$ constituent un système complet d'événements donc : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$.

2. Si pour tous les i $\mathbb{P}(A_i) > 0$ alors nous pouvons utiliser la formule des probabilités composées et obtenir

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_{A_1}(B) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{A_2}(B) \cdot \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}_{A_n}(B) \cdot \mathbb{P}(A_n).$$

Exercice 6.

Un test est mis en place pour évaluer l'efficacité d'un médicament sur un échantillon d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. 50 % des individus prennent le médicament, les autres reçoivent un placebo.
On constate une baisse significative du taux de glycémie pour 80 % des individus ayant pris le médicament et pour 10 % des individus ayant pris le placebo.
On tire au hasard la fiche d'une personne de cet échantillon. Calculez la probabilité que son taux de glycémie ait baissé de façon significative.

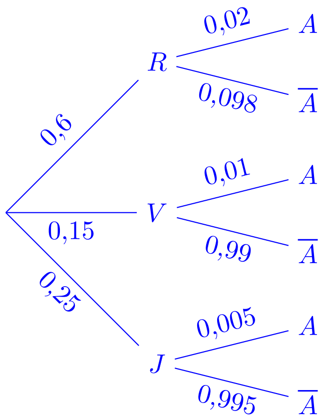
Exercice 7.

Un maraîcher propose trois sortes de poivrons à la vente : des rouges, des verts et des jaunes.
Les poivrons rouges forment 60 % de son stock, les poivrons verts 15 % et le reste est constitué de poivrons jaunes.
2 % des poivrons rouges sont abîmés ainsi que 1 % des poivrons verts et $0,5$ % de poivrons jaunes.
On tire au hasard un poivron dans le stock.

1. Quelle est, arrondie au millième, la probabilité que le poivron tiré au hasard soit abîmé ?
2. Le poivron choisi est abîmé. Calculez une valeur approchée de la probabilité qu'il soit rouge.

Correction exercice 7

1. Schématisons l'expérience par un arbre pondéré.



Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Sur notre arbre l'événement A apparaît déchiré sur trois chemins distincts : c'est un indice d'utilisation de la formule des probabilité totales. Il reste à trouver le système complet d'événements : ce sont les événements du niveau précédents.

$\{R, V, J\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(R \cap A) + \mathbb{P}(V \cap A) + \mathbb{P}(J \cap A)$$

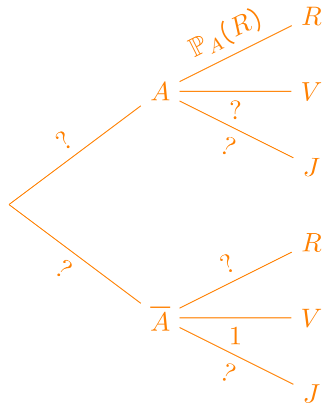
À ce stade nous sommes ramenés à calculer les probabilités sur les chemins de l'arbre. Nous allons donc utiliser la formule des probabilités composées. Il faut d'abord s'assurer que nous puissions les calculer : $\mathbb{P}(R) > 0$, $\mathbb{P}(V) > 0$ et $\mathbb{P}(J) > 0$ donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(A) + \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(A) + \mathbb{P}(J) \times \mathbb{P}_J(A) \\ &= 0,6 \times 0,02 + 0,15 \times 0,01 + 0,25 \times 0,005 \\ &= 0,01475\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx 0,015.}$$

2. Calculons $\mathbb{P}_A(R)$.

Nous voyons que c'est une probabilité conditionnelle « à l'envers » de celle sur l'arbre pondéré : $\mathbb{P}_R(A)$. On dit parfois qu'on cherche à inverser l'arbre. Il faudrait faire un arbre comme ceci :



Ce questionnement peut paraître artificiel mais il est très important dans la pratique dans de nombreuses sciences expérimentales basées sur les statistiques (médecine, sociologie, ...). On parle de probabilités bayésiennes (et la formule de Bayes qui peut se résumer ainsi : probabilités composées sur probabilités totales). Vous les retrouverez en enseignement scientifique ou en option maths complémentaires.

Par définition, et puisque $\mathbb{P}(A) > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(R) &= \frac{\mathbb{P}(R \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_A(R)}{0,015} \\ &= \frac{0,6 \times 0,2}{0,015} \\ &= 0,8\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_A(R) = 0,8.}$$

La tas de poivrons abîmés doit paraître rouge de loin.

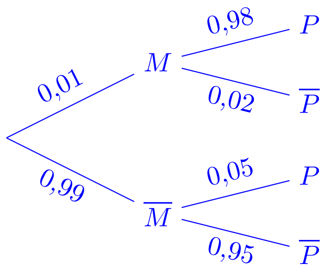
Fin correction exercice 7.

Exercice 8.

Dans une population donnée, une maladie touche 1 % de la population. Un test de dépistage est positif pour 98 % des personnes atteintes, et négatif pour 95 % des personnes saines. On désigne une personne au hasard dans la population et on lui applique le test.
Quelle est la probabilité que le résultat du test soit erroné ?

Correction exercice 8

Schématisons l'expérience aléatoire par un arbre pondéré.



Notons E l'événement « le résultat du test est erroné ».

Nous serions tentés d'utiliser la formule des probabilités totales, mais ce n'est pas un événement qui est déchirée entre deux chemins. Il faut que nous expliquions que notre événement se calcul en tenant compte de deux chemins. Voici une façon de faire un peu rigoureuse.

Le résultat est erroné si la personne est malade et (traduit par une intersection) le test est négatif, ou (traduit par une union), la personne est saine et (traduit par une intersection) le test est positif. Autrement dit :

$$E = (M \cap \overline{P}) \cup (\overline{M} \cap P)$$

Donc :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left[(M \cap \overline{P}) \cup (\overline{M} \cap P)\right]$$

Et puisque $(M \cap \overline{P})$ et $(\overline{M} \cap P)$ sont incompatibles (ou disjoints) :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(M \cap \overline{P}) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap P)$$

Puisque $0 < \mathbb{P}(M) < 1$, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(\overline{P}) + \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(P)\\ &= 0,01 \times 0,02 + 0,99 \times 0,05\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(E) = 0,0497.$$

Fin correction exercice 8.

Exercice 9.

Une usine fonctionne suivant les « trois-huit » : le matin (6h-14h), l'après-midi (14h-22h), la nuit (22h-6h). Le tableau ci-dessous indique, sur une journée t selon leur horaire de travail, le taux d'absentéisme et la répartition des employés.

	Matin	Après-midi	Nuit
Taux d'absentéisme	4 %	8 %	14 %
Répartition	40 %	40 %	20 %

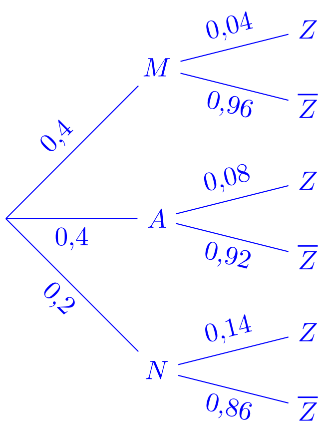
Le lendemain le contremaître contacte au hasard un employé qui aurait dû travailler la veille.

1. Représentez cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que cet employé ait été du matin et absent la veille ?
3. Quelle est la probabilité que cet employé ait été absent la veille ?
4. L'employé contacté était présent la veille. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé le matin ?

Correction exercice 9

1. Représentons la situation par un arbre pondéré.

   Il y a deux niveaux : absentéisme et moment de la journée. Le taux d'absentéisme dépendant de la répartition, l'ordre des niveaux est imposé.



2. Calculons $\mathbb{P}(M \cap Z)$.

   $\mathbb{P}(M) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M \cap Z) &= \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(Z) \\ &= 0,4 \times 0,04\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(M \cap Z) = 0,016.}$$

3. Calculons $\mathbb{P}(Z)$.

   $\{M, A, N\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(M \cap Z) + \mathbb{P}(A \cap Z) + \mathbb{P}(N \cap Z)$$

   D'après la formule des probabilités composées je ne précise pas que les conditions d'utilisation de cette formule sont rassemblées car j'ai déjà indiqué à la question précédente que je sais qu'il faut les vérifier, cependant je m'assure rapidement que les probabilités sont non nulles) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z) &= \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(Z) + \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(Z) + \mathbb{P}(N) \times \mathbb{P}_N(Z) \\ &= 0,4 \times 0,04 + 0,4 \times 0,08 + 0,2 \times 0,14\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(Z) = 0,076.}$$

Fin correction exercice 9.

II Indépendance.

1 Événements indépendants.

Définition 3

Soient :
. $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. A et B deux événements.

Nous dirons que *A et B sont indépendants* si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Remarques.

1. Il ne s'agit pas d'une proposition. L'égalité n'est en général pas vrai. Simplement ici nous nous intéressons à un cas particulier.
2. Cette définition est assez obscure. Si A et B sont indépendants et si $\mathbb{P}(A) > 0$ alors avec la formule des probabilités composées nous obtenons : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$. Autrement dit la probabilité de A est la même que B ait été réalisé ou pas. D'où l'idée que dans ce cas la réalisation de l'événement A est indépendante de la réalisation de l'événement B.

Exercice 10.

On tire au hasard une carte parmi 52 et on considère les événements A : « la carte tirée est un as » et T : « la carte tirée est un trèfle ».
A et T sont-ils indépendants ?

Correction exercice 10

Modélisation : Ω est l'ensemble des 52 cartes et nous le munissons de la loi d'équiprobabilité.

* Il y a équiprobabilité, A est réalisé par 4 issues et Ω contient 52 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{4}{52}\\ &= \frac{1}{13}\end{aligned}$$

* Il y a équiprobabilité, T est réalisé par 13 issues et Ω contient 52 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T) &= \frac{13}{52}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

* Il y a équiprobabilité, $A \cap T$ est réalisé par 1 issues et Ω contient 52 issues donc

$$\mathbb{P}(A \cap T) = \frac{1}{52}$$

* D'une part

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(T) &= \frac{1}{13} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{52}\end{aligned}$$

donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(T)$.
Autrement dit

A et T sont indépendants.

Fin correction exercice 10.

Exercice 11.

Soient A et B deux événements d'un même univers Ω.

1. Si A et B sont indépendants, A et B sont-ils incompatibles ?
2. Si A et B sont incompatibles, sont-ils indépendants ?

Correction exercice 11

1. L'exercice précédent fourni un contre-exemple : les événements A et T ne sont pas incompatibles (l'as de trêfle est une issue commune aux deux événements) et pourtant ils sont indépendants.
2. Soient A et B deux événements incompatibles : $A \cap B = \varnothing$.
   Un peu de recherche. Essayons de vérifier s'ils sont indépendants.
   D'une part : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et d'autre part : $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = ?$.
   Si A et B étaient indépendants nous devrions donc avoir : $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$. Or ce n'est pas forcément le cas des événements non impossibles peuvent être incompatibles.
   Considérons le contre-exemple suivant : un lancer de pièce, on considère les P et F. P et F sont incompatibles : $P \cap F = \varnothing$. Et pourtant, d'une part, $\mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}(F) = \frac{1}{4}$ et, d'autre part, $\mathscr{P}(P \cap F) = 0$, c'est-à-dire P et F sont incompatibles.

Fin correction exercice 11.

Exercice 12.

On considère deux événements A et B tels que :

$$\mathbb{P}(A) = 0,4 \text{ et } \mathbb{P}(B) = 0,3.$$

1. Calculez les probabilités de $A \cap B$ et de $A \cup B$ si A et B sont incompatibles.
2. Calculez les probabilités de $A \cup B$ et de $A \cup B$ si A et B sont indépendants.

Correction exercice 12

1. Si A et B sont incompatibles alors $A \cap B = \varnothing$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
   Puisque A et B sont incompatibles : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0,4 + 0,3 = 0,7$.
2. Si A et B sont indépendants alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$.
   Puis $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,12 = 0,58$.

Fin correction exercice 12.

Exercice 13.

On interroge 2500 personnes sur leur activité principale les dimanches après-midi. Le tableau ci-dessous récapitule les réponses obtenues en fonction du sexe des personnes et de deux types d'activités : sportive ou culturelle.

	Femme	Homme	Total
Activité sportive	272	378	650
Activité culturelle	58	42	100
Aucune des deux activités	1120	630	1750
Total	1450	1050	2500

On choisit une des personnes interrogées au hasard.

1. On note respectivement F et C les événements « la personne est une femme » et « la personne pratique une activité culturelle ».
   (a) Calculez les probabilités de F, C et $F \cap C$.
   (b) Les événement F et C sont-ils indépendants ?
2. (a) Calculez la probabilité que la personne soit un homme sachant qu'il ne pratique aucune des activités.
   (b) Les événements « la personne est un homme » et « la personne ne pratique aucune des deux activités » sont-ils indépendants ?

Correction exercice 13

1. (a) L'univers est formé des 2 500 personnes, il y a équiprobabilité dans le choix d'une personne parmi les 2 500, et l'événement F est réalisé par 1 450 personnes donc : $\mathbb{P}(F) = \frac{1450}{2500}$.
   De même : $\mathbb{P}(C) = \frac{100}{2500}$, $\mathbb{P}(F \cap C) = \frac{58}{2500}$.

(b) $\mathbb{P}(F) \cdot \mathbb{P}(C) = 0,0232$ et $\mathbb{P}(F \cap C) = 0,232$. Donc F et C sont indépendants.

2. (a) Notons A l'événement la personne ne pratique aucune activité.

Calculons $\mathbb{P}_A\left(\overline{F}\right)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A\left(\overline{F}\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(A \cap \overline{F}\right)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{630}{1750} \\ &= 0,36\end{aligned}$$

(b) $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{F}\right) = 0,294$.
$\mathbb{P}\left(A \cap \overline{F}\right) = 0,252$.
Donc : $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{F}\right) \neq \mathbb{P}\left(A \cap \overline{F}\right)$.
Autrement dit :

$$\boxed{A \text{ et } \overline{F} \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

Fin correction exercice 13.

2 Épreuves indépendantes.

Une *épreuve* désigne une expérience aléatoire qui est combinée à d'autres pour former une unique expérience aléatoire. Ainsi lancer deux fois une pièce de monnaie est une expérience aléatoire composée de deux épreuves.

Nous dirons que *deux épreuves sont indépendantes* lorsque les résultats d'une épreuve n'ont pas d'influence sur l'autre. Typiquement il s'agit de situation assimilables à des tirages avec remise.

Exercice 14.

Un circuit électronique intègre deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'événement « le composant 1 est défaillant avant 1 an » et on note D_2 l'événement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés : en série (circuit A) et en parallèle (circuit B).

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit B est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculez la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit A est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculez la probabilité que le circuit A soir défaillant avant un an.

Exercice 15.

Le tableau ci-dessous indique les différentes catégories de places vendues pour assister à un concert.

Catégorie A	Catégorie B	Catégorie C
3 000 places assises proches de la scène	4 200 places assises éloignées de la scènes	4 800 places dans la fosse debout

1. On choisit au hasard un spectateur.
   Calculez les probabilités que le spectateur soit en catégorie A, B puis en catégorie C.
2. On choisit au hasard deux spectateurs. On assimile ces choix à deux tirages successifs avec remise.
   Construisez un arbre pondéré traduisant la situation.
3. Calculez la probabilité que :
   (a) les deux spectateurs soient dans la fosse,
   (b) un seul des deux spectateurs soit dans la fosse.

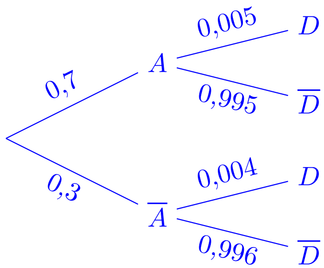
III Exercices.

Exercice 16.

Dans une usine, deux lignes de montage fabriquent des composants électroniques. La ligne A fabrique 70 % des composants. Le reste est fabriqué par la ligne B. La ligne A a un taux de composants défectueux en sortie de $0,5$ %. Pour la ligne B, ce taux est de $0,4$ %. On choisit au hasard un composant à la sortie de l'usine.

1. Quelle est la probabilité que ce composant ait été fabriqué par la ligne A et présente un défaut ?
2. Calculez la probabilité que ce composant présente un défaut.
3. En déduire, le composant présentant un défaut, la probabilité que ce composant ait été fabriqué sur la ligne A.

Correction exercice 16



1. Calculons $\mathbb{P}(A \cap D)$.

   $\mathbb{P}(A) > 0$, donc d'après la formule des probabilités composées

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap D) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(D)\\ &= 0,7 \times 0,005\end{aligned}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(C \cap R) = 0,0035.}$$

   Calculons $\mathbb{P}(D)$.

   $\{A; \overline{A}\}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(D \cap \overline{A})$$

Comme $\mathbb{P}(\overline{A}) > 0$, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= 0,0035 + \mathbb{P}(\overline{A}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{A}}(D)\\ &= 0,0035 + 0,30 \times 0,004\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = 0,0047.}$$

2. Calculons $\mathbb{P}_D(A)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(D) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{0,0035}{0,0047}\\ &\approx 0,74468\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_D(A) \approx 0,7447.}$$

Fin correction exercice 16.

Exercice 17.

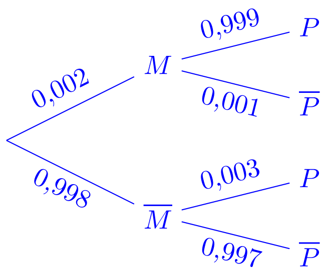
Dans une population 0,2 % des individus sont atteint d'une certaine maladie, n'ayant pas encore déclaré de symptômes. Un test de dépistage de cette maladie donne les résultats suivants :

— sur un individu malade le test est positif dans 99,9 % des cas,

— sur un individu non-malade le test est négatif dans 99,7 % des cas.

Quelle est la probabilité qu'un individu testé positivement soit malade ?

Correction exercice 17



$$\mathbb{P}_P(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\mathbb{P}(M) \cdot \mathbb{P}_M(P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{0{,}002 \times 0{,}999}{0{,}002 \times 0{,}999 + 0{,}998 \times 0{,}997} \approx 0,002.$$

Fin correction exercice 17.

Exercice 18.

Dans un élevage de chats, 40 % des chats sont gris et tous les autres chats sont noirs. 89 % des chats ont les yeux verts et 80 % des chats gris ont les yeux verts. On attrape un chat au hasard. On note G l'événement « le chat est gris » et V l'événement « le chat a les yeux verts ».

1. Déterminez la probabilité que le chat soit noir et qu'il ait les yeux verts.
2. Le chat attrapé a les yeux verts. Quelle est la probabilité qu'il soit gris ?

Exercice 19.

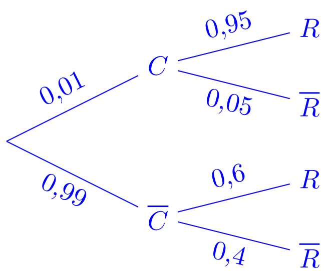
Lors d'un examen un exercice de probabilité est posé. On considère qu'un candidat a 60 % de chances de résoudre l'exercice s'il n'a pas eu connaissance du sujet avant l'épreuve. S'il a eu connaissance du sujet avant l'épreuve, il a alors 95 % de chances de résoudre l'exercice. On estime qu'un candidat sur cent a eu connaissance du sujet.

On note :

— C l'événement « le candidat a eu connaissance du sujet ».
— R l'événement le candidat a réussi a résoudre l'exercice.

1. Donnez les probabilités $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}_C(R)$ et $\mathbb{P}_{\overline{C}}(R)$.
2. Calculez $\mathbb{P}(C \cap R)$ puis $\mathbb{P}(R)$.
3. Un candidat se présente et il réussi à résoudre l'exercice. Déduisez de ce qui précède la probabilité (à $0,1$ % près) que ce candidat ait eu connaissance du sujet avant l'épreuve.

Correction exercice 19



1. $\mathbb{P}(C) = 0,01$, $\mathbb{P}_C(R) = 0,95$, $\mathbb{P}_{\overline{C}}(R) = 0,6$.

2. Calculons $\mathbb{P}(C \cap R)$.

   $\mathbb{P}(C) > 0$, donc d'après la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \cap R) &= \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}_C(R)\\ &= 0,01 \times 0,95\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C \cap R) = 0,0095.}$$

   Calculons $\mathbb{P}(R)$.

   $\{C; \overline{C}\}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \cap C) + \mathbb{P}(R \cap \overline{C})$$

   Comme $\mathbb{P}(\overline{C}) > 0$, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= 0,0095 + \mathbb{P}(\overline{C}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{C}}(R)\\ &= 0,0095 + 0,99 \times 0,6\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(R) = 0,6035.}$$

3. Calculons $\mathbb{P}_R(C)$.

   Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_R(C) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap R)}{\mathbb{P}(R)}\\ &= \frac{0,0095}{0,6035}\\ &\approx 0,0157415\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_R(C) \approx 0,016.}$$

Fin correction exercice 19.

Exercice 20.

On veut dépister une maladie m dont la fréquence (ou prévalence) dans la population P est notée p avec $0 < p < 1$. On met en place un test diagnostique qui est indépendant de la valeur de p.
On prélève au hasard dans la population P un individu ayant été soumis au test diagnostique.
On définit les événements suivants :

$$T : \text{« le test est positif » et } M : \text{« l'individu est malade »}.$$

Pour ce test diagnostique le fabriquant a indiqué :

- la probabilité $P_M(T)$ qu'un individu ait un test positif sachant qu'il est malade, est appelée sensibilité du test et est notée S_e.
- la probabilité $P_{\overline{M}}(\overline{T})$ qu'un individu ait un test négatif sachant qu'il n'est pas malade est appelée spécificité du test et est notée S_p.

1. Illustrer la situation par un arbre pondéré en complétant toutes les branches à l'aide de p, S_e et S_p.
2. (a) Exprimer $P(M \cap T)$, $P(M \cap \overline{T})$, $P(\overline{M} \cap T)$, $P(\overline{M} \cap \overline{T})$ à l'aide de p, S_e et S_p.
   (b) Montrer que la probabilité que le test délivre une juste conclusion est : $p(S_e - S_p) + S_p$.
3. On appelle
   - valeur prédictive positive du test (VPP), la probabilité $P_T(M)$ d'être malade, sachant que le test est positif.
   - valeur prédictive négative du test (VPN), la probabilité $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$ d'être non malade, sachant que le test est négatif.

   (a) Calculer $P(T)$ à l'aide de p, S_e et S_p.
   (b) Exprimer VPP et VPN en fonction de p, S_e et S_p.
   (c) Le test est considéré comme intéressant si VPP $> p$. Montrer alors que : $S_e + S_p > 1$.

Exercice 20. Suite.

4. La prévalence p du paludisme est de 90 % en Tanzanie et de $0,001$ en France. Le test biologique utilisé a pour sensibilité $S_e = 0,9$ et pour spécificité $S_p = 0,8$. Cela est valable pour toute la question 4.

   (a) Calculer la VPP en Tanzanie arrondie à 10^{-2} près.

   On admet que $\text{VPP}_{France} = 0$; $\text{VPN}_{Tanzanie} = 0,47$; $\text{VPN}_{France} = 1$.

   (b) En déduire ce que l'on peut dire en terme de probabilité à un patient de Tanzanie et à un patient français selon que le test est positif ou négatif.

   (c) On considère la fonction v définie par $v(p) = P_T(M)$.

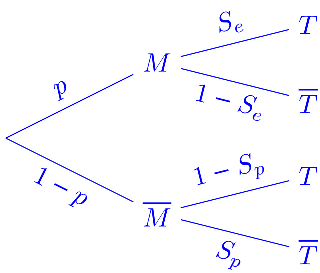
      i. Donner l'expression de $v(p)$ en fonction de p.

      ii. Donner le sens de variation de la fonction v.

      iii. Lorsque p est supérieur à $0,8$, en quoi la positivité du test est-elle un élément important du diagnostique ?

<u>Correction exercice 20</u>

1.



2. (a) Déterminons les probabilités en fonction de p, S_e et S_p.

   Puisque $\mathbb{P}(M) > 0$ nous pouvons utiliser la formule des probabilité composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M \cap T) &= \mathbb{P}(M) \cdot \mathbb{P}_M(T) \\ &= p \cdot S_e\end{aligned}$$

   Concrètement il suffit de regarder le chemin MT sur l'arbre pondéré et d'utiliser le principe multiplicatif.

En procédant de même pour les autres cas :

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbb{P}(M\cap T)=p\cdot S_e,\\ \mathbb{P}(M\cap \overline{T})=p(1-S_e),\\ \mathbb{P}(\overline{M}\cap T)=(1-p)(1-S_p),\\ \mathbb{P}(\overline{M}\cap \overline{T})=(1-p)S_p.\end{array}}$$

(b) Notons A l'événement « le test délivre une juste conclusion ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Dire que la conclusion du test est juste signifie soit que le test est positif et l'individu est malade $(M\cap T)$, soit le test est négatif est l'individu n'est pas malade $(\overline{M}\cap\overline{T})$. Autrement dit

$$A=(M\cap T)\cup\left(\overline{M}\cap\overline{T}\right).$$

Puisque M et $\overline{M}$ sont incompatibles, les événements $M\cap T$ et $\overline{M}\cap\overline{T}$ le sont aussi et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)&=\mathbb{P}\left[(M\cap T)\cup\left(\overline{M}\cap\overline{T}\right)\right]\\&=\mathbb{P}\left(M\cap T\right)+\mathbb{P}\left(\overline{M}\cap\overline{T}\right)\end{aligned}$$

Et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)&=p\cdot S_e+(1-p)S_p\\&=p\cdot S_e+S_p-p\cdot S_p\\&=p(S_e-S_p)+S_p\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A)=p(S_e-S_p)+S_p.}$$

3. (a) En regardant l'arbre nous voyons que T correspond à deux chemins dont nous additionnerons les probabilités.

Calculons $\mathbb{P}(T)$.

M et $\overline{M}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilité totales :

$$\mathbb{P}(T)=\mathbb{P}(M\cap T)+\mathbb{P}(\overline{M}\cap T)$$

D'après la formule des probabilités composées (car $\mathbb{P}(M) > 0$ et $\mathbb{P}(\overline{M}) > 0$) :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M) \cdot \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)$$

Enfin

$$\boxed{\mathbb{P}(T) = p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p).}$$

(b) Déterminons VPP.

$$\text{VPP} = \mathbb{P}_T(M)$$

Puisque $\mathbb{P}(T) > 0$:

$$\text{VPP} = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)}$$

D'après les questions précédentes :

$$\boxed{\text{VPP} = \frac{p \cdot S_e}{p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)}.}$$

Déterminons VPN.

De même

$$\begin{aligned}\text{VPN} &= \mathbb{P}_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)\\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)}\\ &= \frac{(1-p)S_p}{1-\mathbb{P}(T)}\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\text{VPN} = \frac{(1-p)S_p}{1-\left[p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)\right]}.}$$

(c) Supposons que VPP $> p$ et démontrons qu'alors $S_e + S_p > 1$.

Nous déduisons successivement :

$$\begin{aligned} \text{VPP} &> p \\ \frac{p \cdot S_e}{p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)} &> p \end{aligned}$$

Comme les nombres considérés sont tous positifs (ce sont des sommes de probabilités) :

$$\begin{aligned} p \cdot S_e &> p\left[p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)\right] \\ S_e &> p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p) \\ S_e - p \cdot S_e &> (1-p)(1-S_p) \\ (1-p)S_e &> (1-p)(1-S_p) \\ S_e &> 1 - S_p \\ S_e + S_p &> 1 \end{aligned}$$

Nous avons démontré que

$$\boxed{\text{si VPP} > 1, \text{ alors } S - e + S_p > 1.}$$

4. (a) D'après la question 3.(b)

$$\begin{aligned} \text{VPP}_{Tanzanie} &= \frac{p \cdot S_e}{p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)} \\ &= \frac{0,9 \times 0,9}{0,9 \times 0,9 + (1-0,9)(1-0,8)} \\ &= \frac{0,81}{0,81 + 0,1 \times 0,2} \\ &= \frac{0,81}{0,83} \\ &= \frac{81}{83} \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{r|l}
81 & 83 \\
\underline{-\ 0} & 0,975 \\
810 & \\
\underline{-\ 747} & \\
630 & \\
\underline{-\ 581} & \\
490 & \\
\underline{-\ 415} & \\
75 &
\end{array}
$$

Donc :

$$\boxed{\text{VPP} \approx 0,97 \text{ en arrondissant au centième.}}$$

(b) * En Tanzanie.

— Si le test est positif et puisque $\text{VPP}_{Tanzanie} \approx 0,97$ est très élevée, alors il faut dire au malade qu'il est vraisemblablement malade.

— Si le test est négatif et puisque $\text{VPN}_{Tanzanie} = 0,47$ est plutôt faible, alors il faut dire au patient que nous n'avons pas pu vérifier s'il est malade (ce qui ne signifie pas qu'il ne l'est pas).

* En France.

— Si le test est positif et puisque $\text{VPP}_{France} = 0$ alors il faut dire au malade qu'il est vraisemblablement victime d'un faux positif.

— Si le test est négatif et puisque $\text{VPN}_{France} = 0,47$, alors il faut dire au patient qu'il n'est pas malade.

(c) i. Déterminons l'expression de v en fonction de p.

D'après la question 3.(b)

$$
\begin{aligned}
v(p) &= \mathbb{P}_T(M) \\
&= \text{VPP} \\
&= \frac{p \cdot S_e}{p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)} \\
&= \frac{0,9p}{0,9p + (1-p)(1-0,8)} \\
&= \frac{0,9p}{0,9p + 0,2 - 0,2p} \\
&= \frac{0,9p}{0,7p + 0,2}
\end{aligned}
$$

Enfin

$$\boxed{v(p) = \frac{9p}{7p+2} \text{ quelque soit } p \in]0;1[.}$$

ii. Étudions le variations de v sur $]0;1[$.

Si nous notons $f(x) = 9x$ et $g(x) = 7x+2$, alors nous pouvons écrire v comme un quotient de fonctions dérivables et ne s'annulant pas sur $]0;1[$: $v = \frac{f}{g}$.
Par conséquent v est dérivables sur $]0;1[$ et

$$v' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Ainsi pour tout x réel :

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{9 \times (7x+2) - 9x \times 7}{(7x+2)^2} \\ &= \frac{18}{(7x+2)^2} \end{aligned}$$

Par conséquent $v' > 0$ sur $]0;1[$ et

$$\boxed{v \text{ est strictement croissante sur }]0;1[.}$$

iii. Si $p \geqslant 0,8$ alors, puisque v est strictement croissante sur $]0;1[$

$$v(p) \geqslant v(0,8).$$

On en déduit successivement

$$\begin{aligned} v(p) &\geqslant \frac{9 \times 0,8}{7 \times 0,8 + 2} \\ &\geqslant \frac{7,2}{7,6} \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
- & 7 & 2 & & & 7\ 6 \\
\cline{6-6}
 & & 0 & & & 0,9\ 4\ 7 \\
\cline{2-3}
- & 7 & 2 & 0 & & \\
 & 6 & 8 & 4 & & \\
\cline{2-4}
 & - & 3 & 6 & 0 & \\
 & & 3 & 0 & 4 & \\
\cline{3-5}
 & & - & 5 & 6\ 0 & \\
 & & & 5 & 3\ 2 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 2\ 8 &
\end{array}
$$

Et donc $v(p) \geqslant 0,94$.

Si $p \geqslant 0,8$, alors la positivité indique avec ne forte probabilité que la personne est effectivement malade.

Fin correction exercice 20.

IV Des démonstrations.

Exercice 21.

Démontrez, à partir de la définition d'une probabilité (confer ici), les propriétés suivantes d'une probabilité où A et B désignent deux événements quelconques.

Indication. Il faut raisonner sur les ensembles (schématisés par des diagrammes de Venn ou diagrammes patates).

1. Ensemble vide. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
2. Complémentaire. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. Différence. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. Croissance. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
5. Réunion (formule du crible). $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Correction exercice 21

1. Démontrons que $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

$$\Omega \cup \varnothing = \Omega$$

Donc :

$$\mathbb{P}(\Omega \cup \varnothing) = \mathbb{P}(\Omega)$$

Or Ω et $\varnothing$ sont incompatibles, donc, d'après la propriété (ii) de la définition d'une probabilité :

$$\mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\Omega)$$

Or $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ d'après la propriété (i) de la définition d'une probabilité, donc :

$$1 + \mathbb{P}(\varnothing) = 1$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

2. Démontrons que $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

$$\Omega = A \cup \overline{A}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(A \cup \overline{A}\right)$$

A et $\overline{A}$ sont incompatibles, donc, d'après la propriété (ii) de la définition d'une probabilité :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$$

D'aaprès la propriété (i) de la définition :

$$1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A).}$$

3. Démontrons que $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$$

Donc :

$$\mathbb{P}[(A \setminus B) \cup (A \cap B)] = \mathbb{P}(A)$$

Or $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont incompatibles, donc, d'après la propriété (ii) de la définition d'une probabilité :

$$\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B).}$$

4. Démontrons que si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Si $A \subset B$ alors

$$B = A \cup (B \setminus B)$$

Or A et $B \setminus A$ sont incompatibles donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

$\mathbb{P}$ est une fonction à valeurs positive donc $\mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant 0$. D'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \geqslant \mathbb{P}(A).}$$

5. On remarque que $A \cup B$ est une réunion disjointe $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Puis on utilise la propriété démontrée à la question 3.

Fin correction exercice 21.

Exercice 22.
Démontrez qu'une probabilité conditionnelle est effectivement une probabilité (confer ici).

Correction exercice 22

Soient :

. $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,

. A un événement avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

Pour démontrer que $\mathbb{P}_A$ est une probabilité il faut s'assurer que c'est une fonction telle que décrite dans la définition d'une probabilité.

* Vérifions que $\mathbb{P}_A$ est bien une fonction définie sur Ω.
Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ a du sens puisque $\mathbb{P}$ est bien définie et $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
Donc la fonction $\mathbb{P}_A$ est bien définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

* Vérifions que l'ensemble d'arrivée de la fonction $\mathbb{P}_A$ est bien $[0;1]$.
Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$.
Puisque

$$(A \cap B) \subset A,$$

on a

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A).$$

Donc en divisant tous les membres par $\mathbb{P}(A)$ qui est strictement positifs :

$$0 \leqslant \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Autrement dit : $\forall B \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}_A(B) \in [0;1]$.
Autrement dit $\mathbb{P}_A : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;1]$.

* Propriété (i).
$\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A\cap\Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1.$

* Propriété (ii).
Soient B et C des événements incompatibles.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(B\cup C) &= \frac{\mathbb{P}\left[(B\cup C)\cap A\right]}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{\mathbb{P}\left[(B\cap A)\cup(C\cap A)\right]}{\mathbb{P}(A)}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}$ est une probabilité et $B\cap A$ et $C\cap A$ sont incompatibles donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(B\cup C) &= \frac{\mathbb{P}\left(B\cap A\right)+\mathbb{P}\left(C\cap A\right)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{\mathbb{P}\left(B\cap A\right)}{\mathbb{P}(A)}+\frac{\mathbb{P}\left(C\cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} \qquad = \mathbb{P}_A(B)+\mathbb{P}_A(C)\end{aligned}$$

Fin correction exercice 22.

Exercice 23.

Soient :
. $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. A et B deux événements.

Démontrez que si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.

Correction exercice 23

Il s'agit de démontrer une implication. Il faut donc supposer la première assertion vraie et démontrer que la seconde est alors forcément vraie.

Soient A et B deux événements indépendants (on suppose la première assertion vraie).

Démontrons que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Nous devons faire un lien avec la première assertion. Il faut relier $A\cap B$ et $A\cap\overline{B}$.

Avec un schéma on remarque que

$$(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right) = A$$

Donc :

$$\mathbb{P}\left[(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right] = \mathbb{P}(A)$$

Et puisque $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont disjoints :

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}(A)$$

D'où :

$$\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Puisque A et B sont indépendants on a donc successivement :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)\left[1 - \mathbb{P}(B)\right] \\ &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{B}\right)\end{aligned}$$

Autrement dit A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Nous avons démontrer que si A et B sont indépendants, alors nécessairement A et $\overline{B}$ le sont aussi.

Fin correction exercice 23.