Arbres pondérés.

I Rappels.

1 Expérience aléatoire, issues, événements.

Une *expérience aléatoire* est un dispositif expérimental qui permet de reproduire une expérience dont on ne peut prévoir exactement l'*issue* (ou résultat).

L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé l'*univers* de l'expérience et est noté Ω.

Les issues sont regroupées en ensembles appelés *événements*. L'ensemble de tous les événements possibles est noté $\mathscr{P}(\Omega)$. Deux événements sont dits *incompatibles* s'ils n'ont pas d'issue en commun (intersection vide).

Si ω_1, ω_2 et ω_3 sont des issues d'une expérience, alors $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ est un événement qui est *réalisé* si on obtient ω_1 ou ω_2 ou ω_3.

Si A et B sont deux événements alors :

— $\overline{A}$, appelé l'événement *contraire* de A, est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A,

— $A \cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A *et* B (les deux à la fois),

— $A \cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A *ou* B (au moins l'un des deux).

2 Probabilité.

La *probabilité* d'une issue d'une expérience aléatoire est la fréquence d'apparition (théorique) de cette issue si l'on répétait indéfiniment l'expérience. La probabilité est donc un nombre compris entre 0 et 1. Mathématiquement la définition d'une probabilité (hors programme) est

Définition 1

Une *probabilité sur un univers fini* est une fonction $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;1]$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(ii) Quelques soient les événements A et B incompatibles (ou disjoints) : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Remarques.

1. Dans le cas d'un univers fini la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalise.
2. Lorsque la probabilité d'un événement égale 1 on dit que l'événement est *certain*.

3. Lorsque la probabilité d'un événement égale 0 on dit que l'événement est *impossible*.
4. Dans une situation d'*équiprobabilité* (chaque issue à la même probabilité), la probabilité d'un événement A est : $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
5. Il existe deux formules calculatoires sur les événements qui sont souvent utilisées dans les exercices. Si A et B sont des événements alors :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

3 Modéliser.

Pour étudier une expérience aléatoire il faut faire le choix (pour nous le plus souvent arbitraire) d'une *modélisation*. C'est-à-dire choisir un univers (ou un ensemble d'événements) et une loi de probabilité qui correspondent à l'expérience.

4 Exercices.

Exercice 1. Concours.

Une enquête est effectuée dans un établissement de 1 550 élèves afin de connaître leur groupe sanguin ; les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

	A	B	O
Garçons	217	47	536
Filles	295	21	434

1. On choisit au hasard un des élèves parmi les 1 550 élèves de l'établissement. On considère :
   - L'événement F : « l'élève choisi est une fille ».
   - L'événement M : « L'élève choisi est du groupe B ».

   On note $\overline{F}$ l'évènement contraire de l'évènement F.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(F) = \frac{15}{31}$.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement M. Le résultat sera arrondi à 10^{-1}.
   (c) Définir par une phrase les événements $\overline{F} \cap M$ et $F \cup M$.
   (d) Calculer la probabilité de l'événement $F \cup M$.
2. On choisit au hasard un élève du groupe B. Calculer alors la probabilité que l'élève choisi soit un garçon. Le résultat sera arrondi à 10^{-1}.

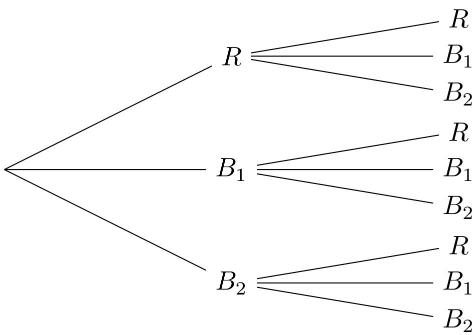
II Arbres pondérés.

1 Exemple-définition.

Nous avions vu en seconde deux façons de représenter une expérience aléatoire : tableau et arbre probabiliste. Nous allons voir et utiliser un nouveau type d'arbre.

Considérons le dispositif expérimental suivant : une urne contient 3 boules, à savoir 1 rouge et 2 bleues, et deux boules sont extraites de l'urne avec remise.

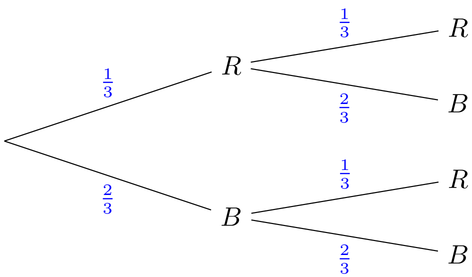
Première modélisation possible pour un unique tirage de boule (une épreuve). $\Omega = \{R, B_1, B_2\}$ muni de la loi d'équiprobabilité (ou loi uniforme).
Une schématisation de l'expérience (les deux tirages) est donnée par l'*arbre probabiliste* ci-contre.



Seconde modélisation possible pour un unique tirage de boule (une *épreuve*). $\Omega = \{R, B\}$ muni de la loi $\mathbb{P}$ définie par le tableau suivant :

Issue ω	R	B
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Une schématisation de l'expérience (les deux tirages, c'est-à-dire les deux épreuves) est donnée par l'*arbre pondéré* ci-contre.



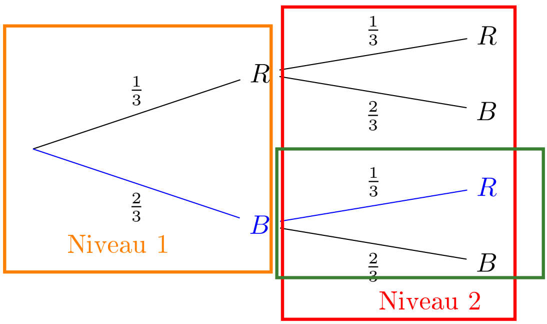
Remarques.

1. Les arbres probabilistes pour l'équiprobabilité sont des cas particuliers d'arbres pondérés avec la même probabilité sur toutes les branches $\frac{1}{n}$.
2. L'issue B est en fait formée des deux issues B_1 et B_2 autrement dit B est un événement. Progressivement, dans votre scolarité, vous vous détacherez des issues pour travailler davantage (et à terme exclusivement) avec les événements. Les nœuds d'un arbre pondéré peuvent être formés par des événements.

3. La comparaison des deux arbres permet d'anticiper ce que nous appellerons le principe multiplicatif : la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités qui apparaissent sur ce chemin. Pour s'en convaincre il suffit de dénombrer les chemins.
4. La somme des probabilités qui apparaissent sur un embranchement égale 1. Autrement dit toutes les possibilités sont prises en compte.

2 Vocabulaire des arbres probabilistes.

Reprenons la schématisation précédente :



Les issues de l'expérience ne sont pas les *nœuds* de l'arbre (*i.e.* B ou R) mais les *chemins* comme (B,R). Autrement dit les issues sont des couples. Le chemin (B,R) est donc différent du chemin (R,B). Nous noterons les chemins sans parenthèse : BR.

Les *niveaux* de l'arbre correspondent au choix successifs effectués lors de l'expérience et représentent les évolutions chronologiques (les futures) possibles. Autrement dit chaque niveau correspond à une épreuve. Le premier niveau correspond au premier tirage et le second au second tirage.

Un *embranchement* désigne l'ensemble des branches qui partent d'un nœud et les nœuds auxquels ils aboutissent. Dans l'arbre ci-dessus le premier niveau contient un seul embranchement alors que le second niveau contient deux embranchements. Un embranchement correspond à un choix donc une "petite" expérience aléatoire (épreuve) et *la somme des probabilités sur un embranchement est donc* 1.

Exercice 2. ♥

Schématisez les expériences suivantes par des arbres pondérés sans justifier.

1. Une enquête effectuée par l'INSEE à la rentrée 2019 montre que 60 % des élèves de première ont choisi la spécialité mathématiques. On choisit au hasard trois élèves de premières et on les interroges sur leur choix de spécialité.
2. Une étude de l'INED montre que, depuis plusieurs années, 49 % des enfants nés en France sont des filles. On choisit au hasard une famille de deux enfants et on s'intéresse au sexe des enfants.
3. Une urne contient dix boules indiscernables au touché : trois rouges et sept bleues. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.
4. Une urne contient trois boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher. On tire au hasard des boules dans l'urne, une par une, jusqu'à obtenir la boule noire.

Exercice 3. Application.

Lors d'un sondage, on a demandé à tous les lycées d'un établissement le nombre de sport qu'ils pratiquaient en dehors de l'école au moins occasionnellement. Les réponses sont consignées dans le tableau suivant :

Nombre de sports pratiqués	Part de lycéens interrogés
0	35,6 %
1	23,1 %
2	20,5 %
3	13,1 %
4	7,2 %
5	0,4 %
6	0,1 %

On interroge un lycéen au hasard sur le nombre de sport qu'il pratique. Représentez cette situation par un arbre pondéré.

III Répétition à l'identique et de façon indépendante d'une épreuve.

Pour l'instant nous nous intéresserons surtout à une situation simple : la répétition à l'identique et de façon indépendante d'une même épreuve.

Exemples.

1. Lancer deux fois un dé à six faces. Il s'agit bien de recommencer le même lancé et le résultat du premier lancé n'a aucune influence sur celui du second.

2. Si le tirage de deux boules d'une urne sans remise peut être vu comme la répétition d'une expérience, le second tirage n'est pas indépendant du premier.

Voici des règles pour les exercices impliquant des arbres pondérés que nous considérerons comme intuitive mais détaillerons plus tard dans l'année :

1. La somme des probabilités sur les branches d'un même embranchement vaut 1.
2. Principe multiplicatif : la probabilité d'une issue est le produit des probabilités sur le chemin correspondant.

Exercice 4. ♥

D'après l'INSEE, 65 % des Français âgés de 15 à 25 ans ont réalisé au moins un achat par Internet en 2011. Nous supposerons que cette proportion se maintient encore quelques années après.
Nous interrogeons au hasard deux jeunes dans la tranche d'âge $15 - 25$ ans.

1. Modélisez cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :
   (a) A : « les deux jeunes interrogés ont effectué au moins un achat sur Internet cette année. »
   (b) B : « Un seul des deux jeunes interrogés a effectué au moins un achat sur Internet cette année. »
   (c) C : « Au plus un des deux jeunes interrogés a effectué au moins un achat sur Internet cette année. »

Exercice 5. Application.

Amy a acheté un sac de berlingots. D'après l'étiquette du sac, celui-ci contient 40 % de bonbons à la fraise, 30 % au citron et 30 % à la pomme.
Amy prend au hasard deux berlingots. On considère que le nombre de bonbons est suffisamment grand pour assimiler son choix à des tirages successifs avec remise.

1. Construisez un arbre pondéré représentant la situation. Nous noterons les événements :
   - F : « Le berlingot est à la fraise. »
   - C : « le berlingot est au citron. »
   - P : « le berlingot est à la pomme. »
2. Calculez les probabilités des événements suivants :
   - E_1 : « Amy a choisi deux berlingots au citron. »
   - E_2 : « Amy a choisi un berlingot à la fraise puis un au citron. »
   - E_3 : « Amy a choisi un berlingot à la fraise et un au citron. »
   - E_4 : « Amy n'a pas choisi de berlingot à la pomme. »
   - E_5 : « Amy a choisi des berlingots de parfums différents. »

IV Exercices.

Exercice 6. Application.

D'après un sondage BVA effectué en octobre 2013 sur un échantillon représentatif de la population, 73 % des Français âgés de 15 à 34 ans préfèrent se coucher tard plutôt que de se lever tôt.
Trois personnes choisies au hasard dans la tranche d'âge $15 - 34$ ans.
En utilisant un arbre pondéré, calculez la probabilité des événements suivants :

- A : « Les trois personnes interrogées préfèrent se coucher tard. »
- B : Exactement deux personnes interrogées sur les trois préfèrent se coucher tard. »
- C : « Au moins une des personnes interrogées préfère se coucher tard. »
- D : « Au plus une des personnes interrogées préfère se coucher tard. »
- E : « Moins de deux personnes interrogées préfèrent se coucher tard. »

Exercice 7.

Le supermarché Rond-Point organise des ventes promotionnelles "flash". Les clients ont quelques minutes pour profiter des promotions.

Lors d'une de ces ventes un ensemble d'ustensiles de salle de bain composé :
- d'une serviette de bain (**G**rande ou **P**etite),
- d'un gant de toilette (**V**ert, **R**ouge ou **J**aune) et
- d'un rideau de douche (**B**lanc ou **T**ransparent)

est proposé.

Chaque client prend exactement un gant de toilette, une serviette de bain puis un rideau de douche.

1. Dessinez un arbre rendant compte de cette situation.
2. Inquiet de manquer l'offre promotionnelle, un client prend au hasard un gant de toilette, une serviette de bain puis un rideau de douche. Quelle est la probabilité que ce client prenne une grande serviette (**G**), un gant rouge (**R**) et un rideau blanc (**B**) ?
3. On note A l'événement : « le client prend un gant de toilette jaune ». Énumérer les issues qui réalisent A. En déduire la probabilité de A.
4. Calculer la probabilité qu'un client prenne un gant de toilette **V**ert ou **R**ouge.
5. On note B l'événement « le client prend un rideau de douche blanc ». Énumérer les issues qui réalisent B. En déduire la probabilité de B.
6. Déterminer la probabilité que le client prenne une petite serviette et un rideau de douche blanc.
7. Décrire l'événement $A \cup B$ par une phrase puis calculer la probabilité de $A \cup B$.

Exercice 8. Application.

Sur son trajet domicile-travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores, indépendants les uns des autres. Il a remarqué que, statistiquement, chaque feu est au vert une fois sur trois.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Pour un trajet domicile-travail, calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Deux feux sur les trois sont au vert.
   (b) Un seul feu sur les trois est au vert.
   (c) Tous les feux sont au vert.
   (d) Aucun des trois feux n'est au vert.

Exercice 9. Application.

Un restaurateur constate qu'au déjeuner, 9 clients sur 10 prennent un café. Quatre clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. Pour chacun, nous noterons C l'événement « le client prend un café ».

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Un seul des quatre clients prend un café.
   (b) Au moins deux clients prennent un café.
   (c) Au plus deux clients prennent un café.

Exercice 10. Application.

Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 3 vertes, 4 rouges et 3 bleues. On prélève successivement et avec remise deux boules du sac en notant la couleur de chaque boule.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité de l'événement E_1 :« tirer deux boules bleues ».
3. Calculez la probabilité de l'événement E_2 :« tirer au moins une boule bleue ».
4. Calculez la probabilité de l'événement E_3 :« tirer des boules uniquement rouge ou verte ».

Exercice 11. Application.

Un magazine est proposé sous deux versions : papier ou numérique.
L'éditeur délègue à une plateforme d'appels de démarcher une liste de clients potentiels.
Le centre d'appel contacte successivement deux personnes sur cette liste.
On considère les événements suivants.

. A : « la personne contactée s'abonne à la version papier »,

. B :« la personne contactée s'abonne à la version numérique »,

. N :« la personne contacté ne s'abonne pas »

Une étude statistique a montré que

. la probabilité qu'une personne s'abonne à la version papier est de 0,18 ;

. la probabilité qu'une personne s'abonne à la version numérique est de 0,22 ;

. la probabilité qu'une personne ne s'abonne à aucune des deux versions est de 0,7.

On étudie ce qu'il peut se passer lorsque la plateforme contact deux personnes.

1. Représentez la situation par un arbre probabiliste.

2. Calculez les probabilité des événements suivants.

   (a) E_1 :« Les deux personnes contactées ont choisi un abonnement numérique. »

   (b) E_2 : « au moins l'une des deux personnes a choisi un abonnement numérique »

   (c) E_3 :« au moins l'une des deux personnes a choisi un abonnement papier »

   (d) E_4 : « l'une des personnes contactées a choisi un abonnement papier et l'autre un abonnement numérique »

   (e) E_5 :« au moins l'une des deux personnes s'est abonnée »