Produit scalaire.

Ajout exemple théorique mélange trinôme inégalité analyse et vecteurs : inégalité de Cauchy-Schwartz en dimension deux. Deux démonstrations : identités remarquables et étude du trinôme.

Première partie produit scalaire sans les coordonnées.
Deuxième partie produit scalaire avec des coordonnées.

Une introduction du produit scalaire.

Nous avons vu en seconde de dessiner la somme de deux vecteurs : la relation de Chasles et l'identité du parallélogramme. Les physiciens aiment beaucoup cette dernière car elle permet de réaliser le bilan des forces ayant un point d'application commun. Mais ils utilisent aussi beaucoup cette idée à l'envers : étant donné un vecteur (force, déplacement, vitesse, accélération) il est possible de le décomposer en une composante suivant l'axe des abscisses et l'autre suivant l'axe des ordonnées. Il se trouve qu'il est possible d'étudier indépendamment sur chaque axe ; cela fonctionne très bien. Ainsi à partir d'un problème à deux dimensions (le plan) on se ramène à deux problèmes en dimension 1 (sur les axes d'abscisses et d'ordonnées). Comment obtenir la composante de $\vec{u}$ suivant l'axe des abscisses ? Avec une projection orthogonale : $\vec{u}\vec{i}$ est la longueur de la projection.

Pour faire le lien avec la définition du produit scalaire se demander comment prendre compte un produit scalaire avec un vecteur $2\vec{i}$? Ou si $veci$ n'a pas une norme égale à 1 ?

Que ce passe t-il si $\vec{i}$ est en sens contraire ?

Le produit scalaire permet d'obtenir la composante d'un vecteur suivant une certaine direction et une certaine graduation.

I Définition dans le cas des bipoints (vecteurs du plan euclidien).

1 Le produit scalaire à partir de la projection orthogonale.

Modifier la définition en commençant par le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires. Puis ensuite avec projection orthogonale.

Définition 1

Soient :

. A, B et C trois points du plan,

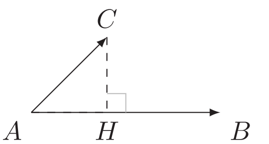
. H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Nous appellerons *produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$* le nombre réel noté $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ défini par

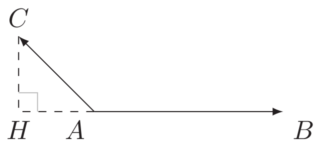
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{cases} AH\times AB & \text{si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont de même sens,}\\ -AH\times AB & \text{si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont de sens opposé.}\end{cases}$$

Remarques.

1. Typiquement nous avons deux situations possibles :

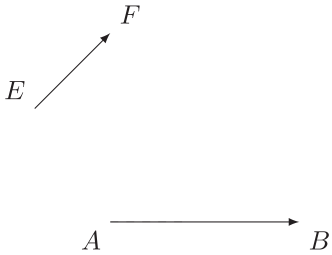


$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens

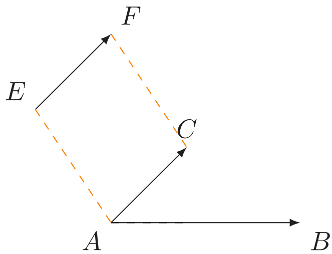


$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens opposé

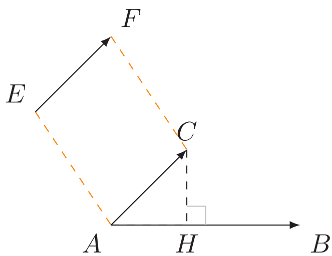
2. Il est difficile pour l'instant d'illustrer le produit scalaire par un exemple simple.
3. Le résultat d'un produit scalaire est donc un nombre qui peut être positif (premier cas ci-dessus) ou négatif (second cas ci-dessus).
4. Cette définition se généralise à des vecteurs n'ayant pas la même origine comme l'illustre les figures ci-dessous pour $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$:



On dessine le représentant de $\overrightarrow{EF}$ d'origine A :



Puis on projette orthogonalement sur (AB) :



Finalement $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = AH \times AB$.

5. Pour le produit scalaire $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB}$ nous pourrions considérer directement les projetés orthogonaux E' et F' de E et F sur (AB) : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{E'F'}$.

Rappelons que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ (qui est égale à AB dans un repère orthonormé) est appelé la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Proposition 1 Propriétés du produit scalaire de vecteurs du plan.

Soient A, B et C des points du plan.

(i) Si $(AB) \perp (AC)$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

(ii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2$.

Démonstration

Notons H le projeté orthogonal de C sur (AB).

(i) $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow AH = 0$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AH \times AB = 0$.

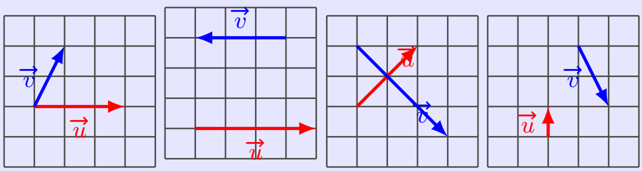
(ii) Le projeté orthogonale de B sur (AB) est B et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2$.

■

Exercice 1.

1ieme hachette barbazo 2019 exo 2 page 211

Dans chacun des cas suivants, calculez le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, l'unité de longueur étant le côté d'un carreau.

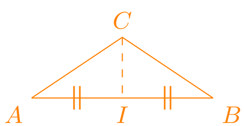


Exercice 2.

ABC est un triangle isocèle en C tel que $AB = 6$ et I est le milieu de $[AB]$. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction de l'exercice 2

En géométrie un petit schéma (au brouillon) peut être utile.



ABC et isocèle en C et I milieu de $[AB]$ donc I est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont de même sens (car I milieu de $[AB]$) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB\times AI\\ &= 6\times\frac{6}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18.}$$

Exercice 3.

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 2$ et BCD un triangle isocèle en D tel que $BD = \sqrt{3}$ et D est extérieur au triangle ABC. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Montrez que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires en I.
2. Calculez $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Correction de l'exercice 3

1. (ID) est par construction la médiane de BCD issue de D. Comme BCD est isocèle en D, (ID) est aussi la hauteur issue de D. Donc : $(ID)\perp(BC)$.
   De même ABC est isocèle en A donc : $(AI)\perp(BC)$.
   $\left.\begin{array}{l}(ID)\perp(BC)\\(AI)\perp(BC)\end{array}\right\}\Rightarrow (ID)\parallel(AI)$. Par conséquent A, I et D sont alignés et

   $$\boxed{(AD)\parallel(BC).}$$

2. (AD) et (BC) se coupent perpendiculairement en Idonc

   $$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}$$

   et $I\in[AD]$ donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont de même sens :

   $$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = AD\times AI$$

   En utilisant le théorème de Pythagore :

   $$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\times\sqrt{3}$$

   $$\boxed{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = 3+\sqrt{6}.}$$

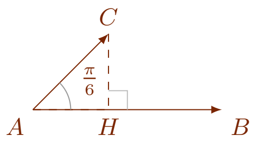
Exercice 4.

Exercices 16 et 17 page 228 du manuel Indice.

2 Produit scalaire et cosinus.

Exercice 5.
Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$ et $CA = 5$. Sachant que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction de l'exercice 5



$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens

Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Notons H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Puisque $\frac{\pi}{6} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $H \in [AB)$ et nous avons dans le triangle ACH rectangle en H :

$$\frac{AH}{AC} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

D'où :

$$AH = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens puisque $H \in [AB)$, donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AH \\ &= 7 \times 5\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{35}{2}\sqrt{3}.}$$

Le travail que nous avons fait ici pour calculer le produit scalaire en passant par le cosinus se généralise. Grâce à la proposition qui suit nous n'auront plus à le démontrer.

Proposition 2 - Caractérisation du produit scalaire avec normes et angles.

Soient A, B, et C des points du plan.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

Remarques.

Remarques.

1. Ce résultat se généralise à d'autres vecteurs que les bipoints du plan et nous écrirons alors :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right).$$
Dans ce cas $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est appelé un angle orienté de vecteurs et il égale l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ obtenu en choisissant des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Nous avons : $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = -\left(\vec{v}, \vec{u}\right)$
2. D'après la remarque précédente nous pourrons généraliser la formule à des couples quelconques de bipoints :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{EF}|| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF}\right).$$
3. Nous retrouvons bien ce que nous avions déjà remarqué $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AB}|| \times \cos(0) = ||\overrightarrow{AB}||^2$.

Exercice 6.

calculer le produit scalaire avec un angle.

Soit ABC un triangle isocèle en A et tel que $AB = 6$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction de l'exercice 6

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos(\widehat{BAC})$$

Or ABC est isocèle en A donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB^2 \times \cos(30^\circ) \\ &= 6^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{3}.$$

Exercice 7.

Soit $ABDC$ un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.
Calculez

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
3. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Correction de l'exercice 7

1.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 4 \times 5 \times \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10.$$

2. Puisque $ABDC$ est un parallélogramme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux (et en particulier de même sens) donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= AB \times CD \\ &= AB^2 \\ &= 4^2\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 16.$$

3. Puisque $ABDC$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ donc :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} = -10.$$

Ici j'ai en fait triché en utilisant une propriété de produit scalaire que je n'ai pas encore évoqué.

Exercice 8.
Exercices 10 à 15 page 228 du manuel Indice.

3 Orthogonalité.

Définition 2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarques.

Remarques.

1. L'orthogonalité est l'équivalent de la perpendicularité mais pour des vecteurs. La notion d'orthogonalité est plus générale que celle de perpendicularité : dans l'espace il existe des droites orthogonales qui ne sont pas perpendiculaires (pas de point commun).
2. Si A, B, E et F sont des points distincts deux à deux du plan alors : $(AB) \perp (EF)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{EF}$.

II Des propriétés du produit scalaire.

1 Propriétés.

Proposition 3 - Propriétés du produit scalaire.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs, λ un nombre réel.

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
(ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
(iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.
(iv) $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$.

Démonstration

Indémontrable puisque nous n'avons pas de définition générale d'un vecteur. Nous n'avons construit en seconde que des vecteurs du plan comme des translations. ■

Remarques.

Remarques.

1. Nous pouvons interpréter ces propriétés avec le vocabulaire que nous connaissons déjà sur les lois (opérations) :
   (i) Commutativité.
   (ii) Distributivité à gauche du produit scalaire sur l'addition (de vecteurs).
   (iii) Distributivité à droite du produit scalaire sur l'addition (de vecteurs).
   (iv) Une sorte de commutativité entre le produit par un nombre et le produit scalaire.
2. La propriété (i) est appelée la *symétrie* du produit scalaire. Les propriétés (ii), (iii) et (iv) sont appelées la *bilinéarité* du produit scalaire.
3. Ces propriétés sont à l'origine de la définition la plus générale du produit scalaire (y compris pour des vecteurs qui ne sont pas des objets de géométrie) d'où le fait que nous insistions. Cependant dans la pratique, au lycée, il faut retenir que nous allons pouvoir manipuler les vecteurs comme des nombres pour travailler avec le produit scalaire. Ainsi qui dit distributivité, dit double distributivité et donc identités remarquables.
4. En toute rigueur la propriété (iv) fait intervenir trois opérations différentes : produit de deux nombres réels, multiplication d'un vecteur par un nombre, produit scalaire.
5. La distributivité apparaîtra souvent lorsque la relation de Chasles est utilisée : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{ZF}\right)$.

Exercice 9.

1ieme bordas indice 2019 exo 3 page 223

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 2$ et BCD un triangle isocèle en D tel que $BD = \sqrt{3}$ et D est extérieur au triangle ABC. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Calculez $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BI}$, puis $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BD}$.
2. Calculez $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID}$, puis $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BD}$.
3. En déduire $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Correction de l'exercice 9

Nous utiliserons ici le résultat déjà montré dans l'exercice 2 : (BC) et (AD) se coupent perpendiculairement en I.

1. Puisque $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de sens contraire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BI} &= -CI\times BI\\ &= -1\times 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BI} = -1.}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{CI}\cdot\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID}\right)\\ &= \overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{ID}\end{aligned}$$

Comme (CI) et (ID) sont perpendiculaires, $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont orthogonaux et donc :

$$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BI}+0$$

D'après le précédent calcul :

$$\boxed{\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BD} = -1.}$$

2. Puisque $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont colinéaires et de sens contraire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID} &= -IA\times ID\\ &= -\sqrt{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID} = -\sqrt{6}.}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{IA}\cdot\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID}\right)\\ &= \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID}\end{aligned}$$

Pusique $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BD} &= 0+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID}\\ &= -\sqrt{6}\end{aligned}$$

D'après le précédent calcul

$$\boxed{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BD} = -\sqrt{6}.}$$

3. Par commutativité (symétrie) :

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA} &= \left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

D'après les questions précédentes :

$$\boxed{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA} = -1 - \sqrt{6}.}$$

Exercice 10.

1eme hachette barbazo 2019 exo 1 page 213

$ABCD$ est un carré de côté $a \in \mathbb{R}_+$, I est le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[CD]$.

1. En remarquant que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$, calculez $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI}$.
2. Que peut-on en conclure ?

Correction de l'exercice 10

1. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} &= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}\right) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

Puisque $ABCD$ est un carré et I et J des milieux de $[AD]$ et $[CD]$:

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 0 + a \times \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a \times a + 0$$

Enfin

$$\boxed{\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 0.}$$

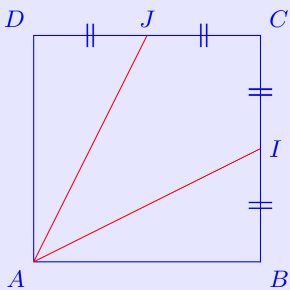
2. Nous déduisons de la question précédente que $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux. Donc

$$\boxed{\text{si } a \neq 0 \text{ alors } (AJ) \parallel (BI).}$$

Exercice 11.

Relation de Chasles et double distributivité.

$ABCD$ est un carré de côté 6. Les points I et J sont les milieux respectif des côtés $[BC]$ et $[CD]$. Calculez $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.



Correction de l'exercice 11

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DJ} \\
&= 0 + 6 \times \frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{2} \times 6 \times 6 + 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = 36.}$$

Exercice 12.

Belin.

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 3$. Les points B' et D' sont les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC).

1. Calculez $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.
2. Déduisez-en la longueur $B'D'$.

Correction de l'exercice 12

1.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}\\ &= -AB^2 + 0 + 0 + AD^2\\ &= -6^2 + 3^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -27.}$$

2. Puisque B' et D' sont les projetés orthogonaux de B et D su (AC) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'}\\ &= -AC \times B'D'\end{aligned}$$

Or :

- ABC est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore : $AC = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$,
- d'après la question précédente $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -27$

donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -AC \times B'D'$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned}-27 &= -3\sqrt{5} \times B'D'\\ \frac{-27}{-3\sqrt{5}} &= B'D'\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{B'D' = \frac{9}{5}\sqrt{5}.}$$

2 Exercices.

Exercice 13.

1Ime bordas indice 2019 6 page 225

Soit $OABC$ un carré de côté 4 et M le milieu de $[OC]$.

1. Calculez $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en utilisant I le milieu de $[AB]$.
2. Déduisez-en une valeur approchée au degré près (à la calculatrice) de la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$.

Correction de l'exercice 13

1.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\ &= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= MI^2 + 0 + 0 - IA \times IB \\ &= 4^2 - 3 \times 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7.}$$

2. Nous savons que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \times MB \times \cos\left(\widehat{AMB}\right)$$

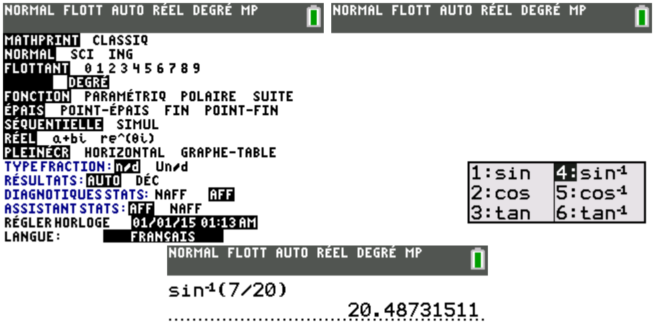
MAO et MBC étant rectangle en O et C d'après le théorème de Pythagore l'égalité précédente équivaut à :

$$7 = 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times \cos\left(\widehat{AMB}\right)$$

Ceci équivaut à :

$$\cos\left(\widehat{AMB}\right) = \frac{7}{20}$$

Avec la calculatrice :



$$\left(\widehat{AMB}\right) \approx 20^\circ.$$

III Produit scalaire et norme.

1 Des identités remarquables.

Proposition 4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

(ii) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

(iii) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2$.

Démonstration

Se démontre en utilisant la distributivité vue dans la proposition 3.

■

Exercice 14.

1ieme belin 2019 exo 48 page 234

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques.
Démontrez l'égalité : $||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Correction de l'exercice 14

En soustrayant terme à terme les égalités (i) et (ii) de la proposition 4 nous obtenons

$$||\vec{u}+\vec{v}|| - ||\vec{u}-\vec{v}|| = \left[||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2\right] - \left[||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2\right]$$

En développant et en simplifiant

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}.$$

2 Caractérisation du produit scalaire par la norme.

Nous savons calculer la norme avec le produit scalaire : $||AB||^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$, nous allons voir maintenant comment calculer le produit scalaire grâce à la norme.

Proposition 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$.

(ii) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$.

Démonstration

Découle directement des résultats établis à la précédente proposition.

■

Remarques.

Remarques.

1. Il est possible de retrouver la norme à partir du produit scalaire : $||\vec{u}||^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$ et nous voyons maintenant qu'il est possible de retrouver le produit scalaire à partir de la norme. Autrement dit il revient au même de se donner une norme ou un produit scalaire.

Exercice 15.

1ieme hachette barbazo 2019 exo 3 page 213.

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 7$. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction de l'exercice 15

Merci M. Garcia pour la correction.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(4^2 + 6^2 - \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(52 - \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\|^2\right)\end{aligned}$$

Donc, d'après la relationde Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(52 - \|\overrightarrow{CB}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(52 - 7^2\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}.}$$

Exercice 16.

1ieme belin 2019 4 page 227 Calcul du produit scalaire avec les normes.

ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $BC = 6$. Calculez $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$. Déduisez-en $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Correction de l'exercice 16

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{CA}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CB}\|^2-3^2-4^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(6^2-25\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\tfrac{11}{2}.}$$

De $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$ nous déduisons

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$

et donc :

$$\boxed{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\tfrac{11}{2}.}$$

Exercice 17.

1ieme bardas indice 2019 8 page 227

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB=3$, $AD=4$ et $AC=6$. Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

Correction de l'exercice 17

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{CA}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CB}\|^2-3^2-6^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(4^2-45\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\tfrac{29}{2}.}$$

Exercice 18.

1ieme hachette déclic 8 page 249

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On donne $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\theta = (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$.
Calculez les éléments suivants.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. $3\vec{v} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$.
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.
4. $\|2\vec{u} - \vec{v}\|$.

Correction de l'exercice 18

1.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta \\ &= 2 \times 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = -3.}$$

2.

$$\begin{aligned}3\vec{v} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) &= 3\vec{v} \cdot \vec{u} + 3\vec{v} \cdot (-2\vec{v}) \\ &= 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 3 \times (-3) - 6 \times \|\vec{v}\|^2 & &= -9 - 6 \times 3^2\end{aligned}$$

$$\boxed{3\vec{v} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = -63.}$$

3.

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ &= 2^2 + 2 \times (-3) + 3^2\end{aligned}$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 7.$$

4.

$$\begin{aligned}\|2\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= (2\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})\\ &= 4\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{v}\cdot\vec{u} + \|\vec{v}\|^2\\ &= 4\times 2^2 - 4\vec{u}\cdot\vec{v} + 3^2\\ &= 16 - 4\times(-3) + 9\\ &= 37\end{aligned}$$

Donc

$$\|2\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{37}.$$

IV Avec les coordonnées cartésiennes.

Rappelons qu'à tout bipoint $\overrightarrow{AB}$ nous associons ses coordonnées, dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$.

Proposition 6

Soient :

. $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,

. $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$,

. $\vec{v}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration

■

Remarques.

1. Le repère doit être orthonormal pour que nous ayons bien $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

2. Il est possible de définir des produits scalaires dans des repères qui ne sont pas orthonormés mais dans ce cas la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ne correspond pas à la longueur AB : $||\overrightarrow{AB}|| \neq AB$.

Corollaire 1

Soient :
. $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,
. $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$,
. $\overrightarrow{v}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Remarques.

1. Ainsi le produit scalaire nous permettra de vérifier l'orthogonalité de deux vecteurs et donc la perpendicularité de droites.

Exercice 19.

1ieme hachette barbazo 2019 exo 2 page 213.

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, ainsi que les points $A(2;3)$, $B(-5;4)$, $C(-1;-3)$ et $D(-1;1)$.
Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Correction de l'exercice 19

1. Calculons $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= x_u x_v + y_u y_v \\ &= 2 \times (-3) + (-1) \times 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -11.}$$

2. Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$. De même $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= x_{AB}x_{CD} + y_{AB}y_{CD} \\ &= -7 \times 0 + 1 \times 4\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 4.}$$

Exercice 20.

Dans une base orthonormée on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.
Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux puis si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Correction de l'exercice 20

Nous savons que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Nous allons donc le calculer.

1. Calculons $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= x_u x_v + y_u y_v \\ &= 4 \times 1 + \frac{2}{3} \times (-6) \\ &= 0\end{aligned}$$

Autrement dit

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}}$$

2. Calculons $\vec{u} \cdot \vec{w}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{w} &= x_u x_w + y_u y_w \\ &= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} \times 4 \\ &= \frac{2}{3} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Autrement dit

$\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.

Exercice 21.

1ieme belin 2019 8 page 228 Utiliser le produit scalaire pour calculer un angle. Calculer un angle avec les coordonnées.

Dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ on a placé les points $A(1;1)$, $B(3;2)$ et $C(4;5)$.
Déterminez l'angle $\widehat{ABC}$ à 0,1 degré près en exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ de deux façons différentes.

Correction de l'exercice 21

* Calculons le produit scalaire avec les coordonnées.
  $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
  Donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= x_{BA}x_{BC} + y_{BA}y_{BC} \\
&= -2 \times 1 + (-1) \times 3 \\
&= -5
\end{aligned}$$

* Calculons le produit scalaire avec normes et cosinus.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\left(\widehat{ABC}\right) \\
&= \sqrt{x_{BA}^2 + y_{BA}^2} \times \sqrt{x_{BC}^2 + y_{BC}^2} \times \cos\left(\widehat{ABC}\right) \\
&= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} \times \sqrt{1^2 + 3^2} \times \cos\left(\widehat{ABC}\right) \\
&= 5\sqrt{2} \times \cos\left(\widehat{ABC}\right)
\end{aligned}$$

Des deux points précédents nous déduisons :

$$-5 = 5\sqrt{2} \times \cos\left(\widehat{ABC}\right)$$

ce qui équivaut à

$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc, en radian, une mesure de $\widehat{ABC}$ est $\frac{3\pi}{4}$.
Enfin :

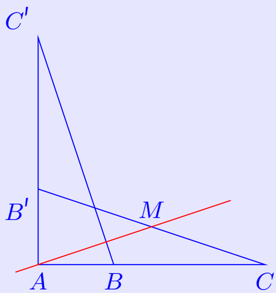
$$\widehat{ABC} = 135^{\circ}.$$

V Exercices.

Exercice 22.

34 et 35 page 233 belin 1ieme 2019 Géométrie démontrer orthogonalité.

ABB' et ACC' sont deux triangles rectangles isocèles en A. On a $AB = AB' = 1$ et $AC = AC' = 3$. M est le milieu de $[B'C]$. On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right)$.



1. (a) Déterminez les coordonnées des points de la figure puis des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC'}$.
   (b) Déduisez-en que (AM) et (BC') sont perpendiculaires.
2. La perpendicularité des droites (AM) et (BC') reste-t-elle vraie quelque soit la longueur commune à AC et AC' ?

Correction de l'exercice 22

1. (a) $A(0;0)$, $B(1{,}0)$, $B'(0;1)$, $C(3;0)$, $C'(0;3)$, $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.
   $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC'}\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$.
   (b) Démontrons que les droites $(AM) \parallel (BC')$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC'} &= \frac{3}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 3 \\ &= 0\end{aligned}$$

Autrement dit $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC'}$ sont orthogonaux et par conséquent

$$\boxed{(AM) \parallel (BC').}$$

2. Quelques essais sur le brouillon permettent de voir que le résultat de la question 1 se généralise.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons maintenant que $C(x;0)$ et $C'(0;x)$.

   Démontrons que $(AM) \perp (BC')$.

   Avec les nouvelles coordonnées de C et C' nous obtenons ; $M\left(\frac{x}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\frac{x}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC'}\begin{pmatrix}-1\\ x\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC'} &= \frac{x}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times x \\ &= 0\end{aligned}$$

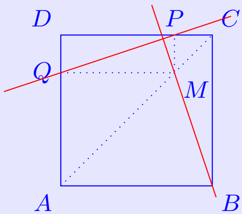
   Autrement dit $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC'}$ sont orthogonaux. Or ceci équivaut à dire que

$$\boxed{(AM) \parallel (BC').}$$

Exercice 23.

36 et 37 page 233 belin 1ieme 2019 Géométrie démontrer orthogonalité.

$ABCD$ est un carré de côté égale à 4, M est un point de la diagonale $[AC]$. P et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (CD) et (DA).
On veut démontrer que les droites (PQ) e t(BM) sont perpendiculaires. pour cela, on se place dans le repère d'origine A et tel que B et D ont respectivement pour coordonnées (4,0) et $(0;4)$: il s'agit du repère $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$.
On note x l'abscisse de M.



1. (a) Déterminez, en fonction de x les coordonnées de tous les points de la figure.
   (b) Concluez.
2. Nous voulons savoir si la propriété démontrée à la question précédente est vraie quelque sot le carré $ABCD$.
   Pour le savoir on note a la longueur du côté du carré et on se place dans le repère $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$. On note x l'abscisse du point M.
   (a) Justifiez que le repère $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$ est orthonormé.
   (b) Déterminez en fonction de x et de a les coordonnées de tous les points de la figure.
   (c) Concluez.

Correction de l'exercice 23

1. (a) Clairement : $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;4)$, $D(0;4)$, $M(x;x)$, $P(x;4)$, $Q(0;x)$.
   (b) Démontrons que $(PQ)\perp(BM)$.

   Nous déduisons de la question précédente : $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-x\\x-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\x-0\end{pmatrix}$.

   Donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BM}&=-x\times(x-4)+(x-4)\times x\\&=0\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux. Puisque $B \neq M$ et $P \neq Q$ cela équivaut à dire que

$$\boxed{(PQ) \perp (BM).}$$

2. (a) Démontrons que $\left(A; \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$ est orthonormé.

Pour démontrer qu'il est orthonormé il faut démontrer d'une part que $\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et d'autre part que $\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ ont la même norme.

*

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right) &= \frac{1}{a^2} \times \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{a}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{a^2} \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

*

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}\right\| &= \frac{1}{a}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \frac{1}{a} \times AB \\ &= \frac{1}{a} \times a \\ &= 1\end{aligned}$$

De même $\left\|\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right\| = 1$.

Donc $\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ ont la même norme.

$$\boxed{\left(A; \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right) \text{ est orthonormé.}}$$

(b) Clairement : $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;a)$, $D(0;a)$, $M(x;x)$, $P(x;a)$, $Q(0;x)$.

(c) Démontrons que $(PQ) \perp (BM)$.

Nous déduisons de la question précédente : $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-x \\ x-a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-a \\ x-0\end{pmatrix}$.

Donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BM} &= -x \times (x-a) + (x-a) \times x \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux. Puisque $B \neq M$ et $P \neq Q$ cela équivaut à dire que

$$\boxed{(PQ) \perp (BM) \text{ quelque soit la longueur } a \text{ du coté du carré.}}$$

Exercice 24.

38 page 233 belin 1ieme 2019 Géométrie orthogonalité démontrer une équivalence.

$ABCD$ est un rectangle non trivial (non réduit à un point ou un segment) et I est le milieu de $[CD]$. On pose $AB = a$ et $AD = b$.
Montrez l'équivalence : $(AC) \perp (BI) \Leftrightarrow a = b\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 24

Montrons : $(AC) \perp (BI) \Leftrightarrow a = b\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
(AC) \perp (BI) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BI} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CI} \\
&= \Leftrightarrow 0 - AB \times CI + \overrightarrow{BC}^2 + 0 \\
&\Leftrightarrow -a \times \frac{a}{2} + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{2}a^2 + BC^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{2}a^2 + b^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2b^2 - a^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{2}b - a)(\sqrt{2}b + a) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}b - a = 0 \quad \text{car } a > 0 \text{ et } b > 0 \\
&\leftrightarrow \sqrt{2}b = a
\end{aligned}$$

Nous avons démontré par équivalences successives que

$$\boxed{(AC) \perp (BI) \Leftrightarrow a = b\sqrt{2}.}$$

Exercice 25.

Belin 2019 74 page 237. Avec projeté orthogonal.

ABC est un triangle rectangle en A, I est le milieu de $[BC]$ et H est le pied de la hauteur issue de A. P est le projeté orthogonal de H sur (AB) et Q celui de H sur (AC).

1. Justifiez que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
2. Justifiez que $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. Déduisez-en, que (AI) et (PQ) sont perpendiculaires.

Correction de l'exercice 25

1. Nous avons vu en seconde l'*identité du parallélogramme* : $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

   Soit D un point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme (et donc un rectangle) alors, d'après l'identité du parallélogramme :

   $$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

   Comme $ABDC$ est un parallélogramme ses diagonales se coupent en leur milieu donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI}$ et par conséquent l'identité du parallélogramme s'écrit :

   $$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

   Finalement

   $$\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).}$$

2. En considérant, d'une part, les projetés orthogonaux de A et H sur (AB) :

   $$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (1),$$

   et d'autre part, en considérant les projetés orthogonaux de P et Q sur (AB) :

   $$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (2).$$

   De (1) et (2) nous déduisons par transitivité :

   $$\boxed{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

De même nous établissons :

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}.}$$

3. Démontrons que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{PQ} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux ce qui équivaut à dire que

$$\boxed{(AI) \perp (PQ).}$$

Exercice 26.

Liens avec repère galiléen et copernicien, avec les angles on voit se dessiner la matrice d'une rotation.

Soient $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.
Nous notons $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$. Nous admettrons que $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ est une base.

1. Montrez que $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ est une base orthonormée.
2. Soit $\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$ un vecteur du plan avec x et y des réels.
   (a) Calculez $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{v}$.
   (b) Calculez $\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{v}$.
   (c) Déduisez-en les coordonnées de $\overrightarrow{r}$ dans la base $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.
3. Intuitivement et sans aucune justification donnez une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{u}\right)$.

Correction de l'exercice 26

C'est par le procédé décrit dans cet exercice qu'en physique les équations et autres résultats obtenus dans un *repère de Serret-Frenet* sont ensuite traduit dans un repère de référence.

1. Montrons que $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ est une base orthonormée.

   * Montrons que les vecteurs sont orthogonaux.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=x_ux_v+y_uy_v\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=0\end{aligned}$$

   * Montrons que les vecteurs de la base ont même norme.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}^2&=x_u^2+y_u^2\\&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\&=1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{v}^{\,2} &= x_v^2 + y_v^2\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\ &= 1\end{aligned}$$

Nous avons bien $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

$(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée.

2. (a) *

$$\begin{aligned}\vec{i}\cdot\vec{u} &= x_i x_u + y_i y_u\\ &= 1\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}\vec{i}\cdot\vec{v} &= x_i x_v + y_i y_v\\ &= 1\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}\vec{j}\cdot\vec{u} &= x_j x_u + y_j y_u\\ &= 0\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}\vec{j}\cdot\vec{v} &= x_j x_v + y_j y_v\\ &= 0\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{u} &= \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\vec{u}\\ &= x\vec{i}\cdot\vec{u}+y\vec{j}\cdot\vec{u}\\ &= x\frac{\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{v} &= \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\vec{v}\\ &= x\vec{i}\cdot\vec{v}+y\vec{j}\cdot\vec{v}\\ &= x\frac{\sqrt{2}}{2}-y\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Rappelons que dans un repère orthonormal $\vec{r}\cdot\vec{u}$ est la longueur (algébrique) de la projection orthogonal de $\vec{r}$ sur l'axe partant $\vec{u}$ c'est donc l'abscisse de $\vec{r}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$. La remarque est valable pour les ordonnées.

Dans la base $(\vec{u},\vec{v})$, $\vec{r}\begin{pmatrix}x\frac{\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x\frac{\sqrt{2}}{2}-y\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

3. À vue de nez $\left(\vec{i},\vec{u}\right)=\frac{\pi}{4} \mod (2\pi)$.

Exercice 27.

Bordas indice 2019 74 page 232. Orthogonalité.

On considère A, B et C trois points du plan distincts deux à deux. Soit la proposition « Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ ».

1. Indiquez, en justifiant, si cette proposition est vraie ou fausse.
2. Écrivez la réciproque de cette proposition. Est-elle vraie ?
3. Écrivez le contraposée de cette proposition. Est-elle vraie ?

Correction de l'exercice 27

1. Si ABC est rectangle en A alors $(AB)\perp(AC)$.
   Si $(AB)\perp(AC)$ et A, B et C distincts deux à deux alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Autrement dt $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

   La proposition proposée est vraie.

2. La réciproque de la proposition est : « Si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, alors ABC est un triangle rectangle en A ».
   Cette réciproque est bien sur vraie.
3. La contraposée de la proposition est : « Si ABC n'est pas rectangle en A, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0$ ».
   Une proposition et sa contraposée ont la même valeur logique. Or la proposition était vraie donc sa contraposée l'est aussi.

Exercice 28.

Bordas indice 2019 75 page 232. Orthogonalité.

Soit le triangle EFG tel que $E(0;1)$, $F(8,-3)$ et $G(12;5)$.
Le point $H(7;0)$ appartient-il à la hauteur issue de F ?

Correction de l'exercice 28

Les points considérés étant distincts deux à deux : H appartient à la hauteur issue de F si et seulement si $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$.

Calculons $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG} &= x_{HF}x_{EG} + y_{HF}y_{EG} \\ &= 1 \times 12 + (-3) \times 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont orthogonaux et donc

F appartient à la hauteur issue de F.

Exercice 29.

Bordas indice 2019 76 page 232. Orthogonalité.

Soient les points $A(-4;1)$ et $B(3;0)$.
Déterminez les coordonnées du point C tel que le triangle ABC soit rectangle en A et C appartienne à l'axe des ordonnées.

Correction de l'exercice 29

Déterminons les coordonnées de C en procédant par analyse-synthèse.

* Analyse.
Si C appartient à l'axe des ordonnées alors $x_C = 0$.

Si ABC est rectangle en A alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
Or

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 &\iff x_{AB}x_{AC} + y_{AB}y_{AC} = 0 \\ &\iff 7 \times 4 + (-1) \times (y_C - 1) = 0 \\ &\iff 28 + 1 = y_C \\ &\iff 29 = y_C\end{aligned}$$

donc $C(0; 27)$.

* Synthèse.
Il est aisé de vérifier que le point de coordonnées $(0; 29)$ convient.

Exercice 30.

Bordas indice 2019 78 page 232. Orthogonalité.

Sur le cercle trigonométrique de centre O, on place les points A et B associés aux réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.

1. Calculez les coordonnées des points A et B.
2. (a) Déterminez une mesure de $\widehat{AOB}$ en radians.
   (b) En calculant de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, déterminez la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$. Déduisez-en $\sin \frac{\pi}{12}$.

Correction de l'exercice 30

1. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
2. (a) $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$.
   (b) D'une part

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= x_{OA}x_{OB} + y_{OA}y_{OB} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) \quad (1)\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \times \cos\left(\widehat{AOB}\right)\\ &= 1\times 1\times\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad (2)\end{aligned}$$

donc, d'après (1) et (2) :

$$\boxed{\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(1+\sqrt{3}).}$$

Exercice 31.

Bordas indice 2019 79 page 232. calculer une longueur. Projection orthogonal ave angle obtus ou aigu

Soient les points $A(-6;4)$, $B(-2;2)$ et $C(5;-7)$ dans un repère orthonormé.

1. Calculez $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
2. Notons H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. Montrez que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$.
3. Calculez BC. Déduisez-en BH et HC.

Correction de l'exercice 31

1.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} &= x_{BA}x_{BC} + y_{BA}y_{BC}\\ &= (-4)\times 7 + 2\times -9\\ &= -42\end{aligned}$$

2. Il y a deux cas possibles soit $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$ si $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de même sens, soit $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$ si $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de sens contraire.
Pour savoir dans quel cas nous sommes, déterminons si l'angle $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ est aigu ou obtus.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -42 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = -42$$

Donc $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) > 0$ et donc $\widehat{ABC}$ est un angle obtus et par conséquent $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de sens contraire.

$$\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}}$$

3.

Exercice 32.

Belin 2019 90 page 239. Calcul angle

Soient A, B et C trois points du plan tels que $AB = 5$, $AC = \sqrt{10}$ et $BC = \sqrt{50}$.
Calculez une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ à 0,1 degré près.

Correction de l'exercice 32

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right\|^2\right) &= 5 \times \sqrt{50} \times \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) \\
\frac{1}{2}\left(5^2 + \sqrt{50}^2 - \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}\right\|^2\right) &= 5^3 \times \sqrt{2} \times \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) \\
\frac{1}{2 \times 5^2\sqrt{2}}\left(75 - \left\|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right\|^2\right) &= \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) \\
\frac{\sqrt{2}}{2^2 5^3}\left(75 - \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2\right) &= \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) \\
\frac{\sqrt{2}}{2^2 5^3}\left(75 - \sqrt{10}^2\right) &= \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) \\
\frac{\sqrt{2}}{2^2 5^3}\left(75 - \sqrt{10}^2\right) &= \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\cos\left(\widehat{ABC}\right) \approx 79{,}4^\circ.}$$

Exercice 33.

Belin 2019 91 page 237. Calcul angle

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 10$. M est le milieu de $[AD]$ et N est le milieu de $[AB]$. I est l'intersection des droites (BM) et (CN).

1. Calculez $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{NC}$.
2. Déduisez-en, à 0,1 degré près, l'angle $\widehat{MIC}$.

Correction de l'exercice 33

1. Notons $\overrightarrow{i}$ le vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, de même sens et de norme 1 et $\overrightarrow{j}$ le vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AD}$, de même sens et de norme 1.
   Dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$: $M(0;5)$, $B(6;0)$, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$, $N(3;0)$, $C(6;10)$ et $\overrightarrow{NC}\begin{pmatrix}3\\10\end{pmatrix}$.
   Donc
   $$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{NC} = -6\times 3 + 5\times 10$$
   $$\boxed{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{NC} = 32.}$$
2. $\widehat{MIC} = \left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{NC}\right)$.
   Or
   $$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{NC} = BM\times NC\times\cos\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{NC}\right)$$
   D'où :
   $$32 = \sqrt{(-6)^2+5^2}\times\sqrt{3^2+10^2}\times\cos\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{NC}\right)$$
   $$\frac{32}{\sqrt{61}\sqrt{109}} = \cos\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{NC}\right)$$
   $$\boxed{\widehat{MIC} \approx 66{,}9^\circ.}$$

Exercice 34.

Belin 2019 92 page 237. Calcul angle

Soient OAA' et OBB' deux triangles rectangles isocèles en O. On se propose de démontrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires.

1. Montrez que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}$.
2. Justifiez que $\widehat{AOB'} + \widehat{A'OB} = \pi$.
3. Déduisez-en que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}$.
4. Concluez.

Exercice 35.

Belin 2019 108 page 240. Calcul longueur de la hauteur d'un triangle.

On considère trois points du plan $A(1;3)$, $B(-2;1)$ et $C(1;10)$. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB). On veut calculer la hauteur CH.

1. Justifiez que le vecteur $\vec{n}(-2;3)$ est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Soit D le point tel que $\overrightarrow{HD} = \vec{n}$.
   (a) Calculez $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   (b) Justifiez que $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   (c) Déduisez-en la longueur HC.

Correction de l'exercice 35

1.

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} &= -2 \times (-3) + 3 \times (-2) \\ &= 0\end{aligned}$$

2. (a)

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times 0 + 3 \times 7$$

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 21.}$$

(b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HC} &= \vec{n} \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \vec{n} \cdot \overrightarrow{HA} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC}.}$$

(c) D'une part : $\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont colinéaires donc : $\left|\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HC}\right| = HD \times HC$.

D'autre part : $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC} = 21$.

Donc :

$$\begin{aligned} HC &= \frac{21}{HD} \\ &= \frac{21}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

$$\boxed{HC = \frac{21}{13}\sqrt{13}.}$$

Exercice 36.

2ieme nathan transmath 1987 ex 11 page 299

En utilisant le produit scalaire remarquable :

$$\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - \vec{v}\right).$$

montrez qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

Correction de l'exercice 36

Démontrons l'équivalence par conditions nécessaire et suffisante.

Considérons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs associés à deux côtés consécutifs du parallélogramme.

* Condition nécessaire.
  Si un parallélogramme est un losange alors $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. Donc $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$. Et d'après l'égalité rappelée dans l'énoncé : $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = 0$. Autrement dit les diagonales du parallélogramme sont orthogonales.
* Condition suffisante.
  Supposons maintenant que les diagonales sont orthogonales alors $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = 0$ et par conséquent $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$. Ainsi le parallélogramme est une losange.

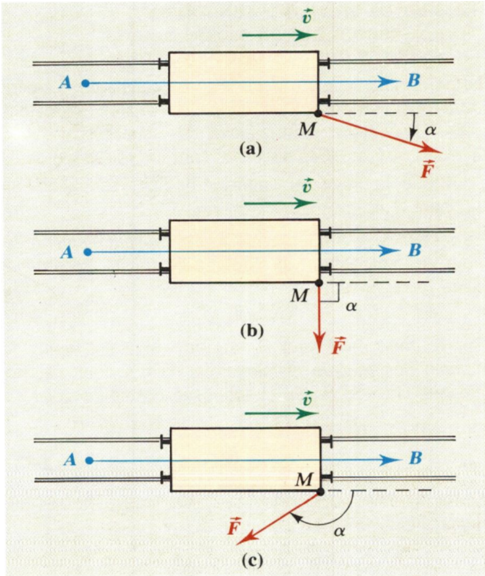
VI Applications.

1 Travail d'une force. ★★

Une belle illustration du travail d'une force.

Le travail peut être compris comme la quantité d'énergie dépensée pour participer au mouvement.

Pour une force $\vec{F}$ s'exerçant sur un solide effectuant un mouvement de translation $\overrightarrow{AB}$ le travail est $W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$. Le travail s'exprime en joules, l'intensité de la force est en newton et la longueur AB en mètres.



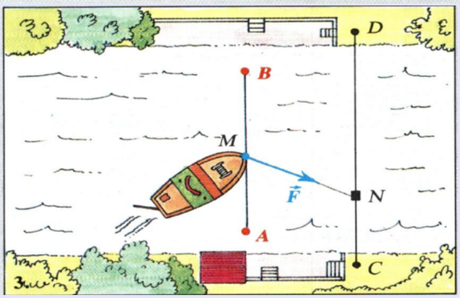
2. ***Le wagonnet se déplace sur une voie rectiligne de A vers B. En* (a)*, le travail de la force $\vec{F}$ est moteur; en* (b)*, le travail est nul; en* (c)*, le travail est résistant.***

Exercice 37.

hachette collection eurin gie physique chime 1988 à partir de la page 24

Au cours de la traversée d'un fleuve à fort courant, un bac est relié à un câble MN pouvant lui-même coulisser sur un câble CD placé en travers de la rivière.
Entre A et B, le bac est animé d'un mouvement de translation rectiligne, parallèlement à CD, et la force $\vec{F}$ exercée en M par le câble est constante. Calculer $W_{A \to B}(\vec{F})$.

Données : $F = 5\,000$ N, $\quad (\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{AB}}) = \dfrac{3\pi}{4}$, $\quad AB = 200$ m.



Exercice 38.

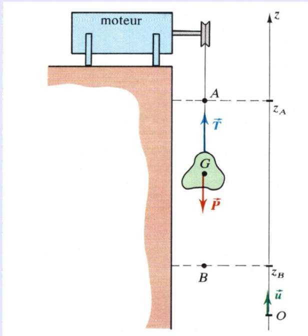
hachette collection eurin gie physique chime 1988 à partir de la page 24

Rappelons que le poids, $\overrightarrow{P}$, s'appliquant à une masse m est $\overrightarrow{P} = m \times g \times \overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est vecteur orthogonal au sol terrestre.
Rappelons également le principe d'inertie : la somme des forces s'exerçant sur un solide mouvement rectiligne à vitesse constante est nulle.

Une charge de masse $m = 200$ kg est soulevée à vitesse constante d'une hauteur $h = 30$ m par un treuil entraîné par un moteur.

1/ Calculer le travail du poids de la charge. (On prendra $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$.)

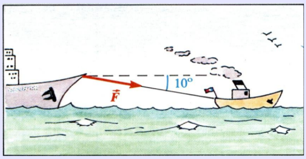
2/ Calculer le travail minimal effectué par le moteur.



Exercice 39.

hachette collection eurin gie physique chime 1988 à partir de la page 24

Un remorqueur exerce sur un cargo une force $\vec{F}$, d'intensité $F = 50\,000$ N et faisant l'angle $\alpha = 10^{\circ}$ avec la direction du déplacement. La vitesse de l'ensemble est de 6 nœuds. Calculer la puissance de la force $\vec{F}$.



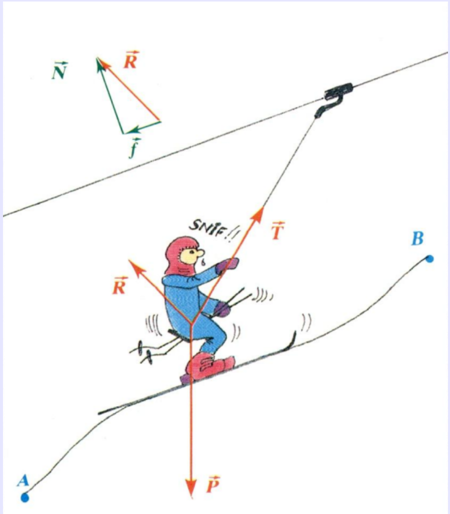
Exercice 40.

hachette collection eurin gie physique chime 1988 à partir de la page 24

Un skieur de masse $m = 80$ kg est tiré à vitesse constante par un câble tendu le long d'une piste curviligne de longueur $\ell = 3$ km et de dénivellation $h = 400$ m.
Les frottements sont assimilables à une force $\vec{f}$ constamment opposée au vecteur vitesse $\vec{v}$ et de norme supposée constante, $f = 200$ N.

1/ Faire le bilan des forces appliquées au skieur.

2/ Calculer le travail de ces forces sur le trajet AB. (On prendra $g = 10$ m.s^{-2}.)



Pour une force $\overrightarrow{F}$ s'exerçant sur un solide effectuant un mouvement avec la vitesse $\overrightarrow{v}$, la puissance est $\mathscr{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$. La puissance s'exprime en joules par seconde, l'intensité de la force est en newton et la vitesse v en mètres par seconde.

Exercice 41.

hachette collection eurin gie physique chime 1988 à partir de la page 24

Après une certaine durée de chute, un parachutiste de masse totale 80 kg est animé d'un mouvement de translation rectiligne verticale uniforme de vitesse $v = 2{,}7\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Calculez la puissance des forces réparties exercées par l'air sur le parachutiste et son parachute. On prendra $g = 10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

2 Ligne de niveau.

Exercice 42.

Belin 2019 113 page 241.

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$.

1. Justifiez que $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2$ et $MB^2 = \overrightarrow{MB}^2$.
2. (a) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Justifiez que :
$$\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}).$$
   (b) Déduisez-en que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$.
3. (a) Montrez que l'égalité $MA = MB$ équivaut à $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
   (b) Quelle propriété du collège retrouve-t-on ?

Exercice 43.

Belin 2019 73 page 237.

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 2$.

1. Déterminez l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \leqslant 0$ en représentant cette région du plan.
2. Déterminez l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \geqslant 4$ en représentant cette région du plan.

Exercice 44.

Belin 2019 117 page 241.

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 2$ et I le milieu de $[AB]$. On veut déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 12$.

1. Justifiez que
$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right).$$
2. Déduisez-en que $MA^2 - MB^2 = 6$ équivaut à $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$.
3. Déterminez un point H de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$.
4. Déduisez-en l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 6$ et le représenter.
5. Déterminez de même l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 4$. En remarquant que $AB^2 = 4$ pouvait-on prévoir la réponse ?

3 Pythagore généralisé (Al-Kashi).

VII Vers l'infini et au-delà.

1 Le produit vectoriel une introduction au produit scalaire.

2 Loi des sinus. ★

3 Droite d'Euler d'un triangle. ★

4 Médianes du triangle et centre de gravité. ★

5 Inégalité triangulaire.

Exercice 45.

Belin 2019 105 page 240.

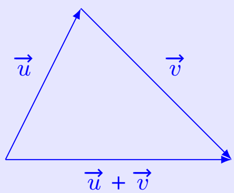
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des représentants respectifs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Justifiez que, quelque soit le réel α, on a $|\cos \alpha| \leqslant 1$.
2. En déduire que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \quad (1)$.
3. Redémontrez que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.
4. En utilisant les résultats des questions précédente, montrez que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad (1).$$

Cet exercice présente deux inégalité absolument fondamentales en mathématiques bien que vous en fassiez assez peu usage au lycée :

- (1) est appelée l'*inégalité de Cauchy-Schwartz* elle se généralise à tous les espaces vectoriels (y compris des ensembles de fonctions).
- (2) est appelée *inégalité triangulaire* est correspond au cas vectoriel de l'inégalité que cous connaissez déjà dans le cas affine :



6 Quadrangle orthocentrique.

Exercice 46.

Belin 2019 112 page 241.