Produit scalaire.

I Définition dans le cas des bipoints (vecteurs du plan euclidien).

1 Le produit scalaire à partir de la projection orthogonale.

Définition 1

Soient :

. A, B et C trois points du plan,

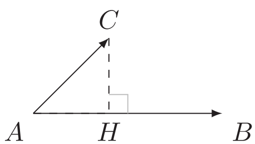
. H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Nous appellerons *produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$* le nombre réel noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ défini par

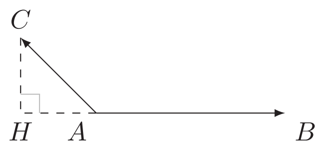
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AH \times AB & \text{si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont de même sens,} \\ -AH \times AB & \text{si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont de sens opposé.} \end{cases}$$

Remarques.

1. Typiquement nous avons deux situations possibles :

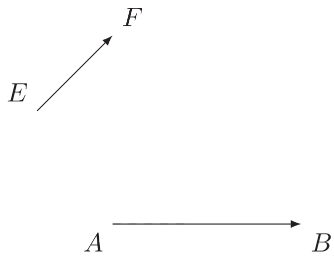


$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens

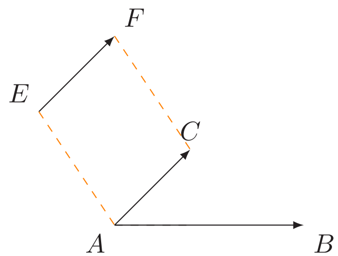


$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens opposé

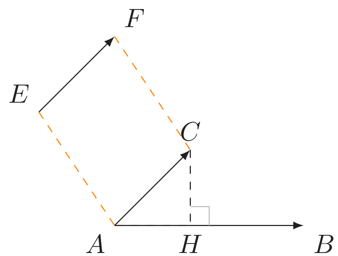
2. Il est difficile pour l'instant d'illustrer le produit scalaire par un exemple simple.
3. Le résultat d'un produit scalaire est donc un nombre qui peut être positif (premier cas ci-dessus) ou négatif (second cas ci-dessus).
4. Cette définition se généralise à des vecteurs n'ayant pas la même origine comme l'illustre les figures ci-dessous pour $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$:



On dessine le représentant de $\overrightarrow{EF}$ d'origine A :



Puis on projette orthogonalement sur (AB) :



Finalement $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = AH \times AB$.

5. Pour le produit scalaire $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB}$ nous pourrions considérer directement les projetés orthogonaux E' et F' de E et F sur (AB) : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{E'F'}$.

Rappelons que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ (qui est égale à AB dans un repère orthonormé) est appelé la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Proposition 1 Propriétés du produit scalaire de vecteurs du plan.

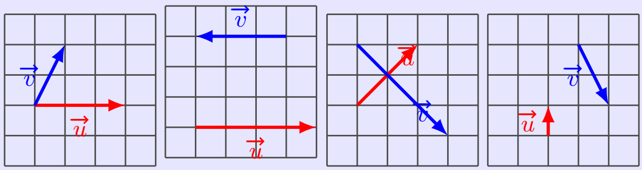
Soient A, B et C des points du plan.

(i) Si $(AB) \perp (AC)$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

(ii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2$.

Exercice 1.

Dans chacun des cas suivants, calculez le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, l'unité de longueur étant le côté d'un carreau.



Exercice 2.

ABC est un triangle isocèle en C tel que $AB = 6$ et I est le milieu de $[AB]$. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 3.

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 2$ et BCD un triangle isocèle en D tel que $BD = \sqrt{3}$ et D est extérieur au triangle ABC. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Montrez que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires en I.
2. Calculez $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 4.

Exercices 16 et 17 page 228 du manuel Indice.

2 Produit scalaire et cosinus.

Exercice 5. Inférence.

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$ et $CA = 5$. Sachant que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Proposition 2 - Caractérisation du produit scalaire avec normes et angles.

Soient A, B, et C des points du plan.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

Remarques.

1. Ce résultat se généralise à d'autres vecteurs que les bipoints du plan et nous écrirons alors :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right).$$
Dans ce cas $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est appelé un angle orienté de vecteurs et il égale l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ obtenu en choisissant des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Nous avons : $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = -\left(\vec{v}, \vec{u}\right)$
2. D'après la remarque précédente nous pourrons généraliser la formule à des couples quelconques de bipoints :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{EF}|| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF}\right).$$
3. Nous retrouvons bien ce que nous avions déjà remarqué $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AB}|| \times \cos(0) = ||\overrightarrow{AB}||^2$.

Exercice 6.

Soit ABC un triangle isocèle en A et tel que $AB = 6$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 7.

Soit $ABDC$ un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.
Calculez

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
3. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Exercice 8.

Exercices 10 à 15 page 228 du manuel Indice.
Exercices 38 à 51 page 230 du manuel Indice.

3 Orthogonalité.

Définition 2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarques.

1. L'orthogonalité est l'équivalent de la perpendicularité mais pour des vecteurs. La notion d'orthogonalité est plus générale que celle de perpendicularité : dans l'espace il existe des droites orthogonales qui ne sont pas perpendiculaires (pas de point commun).
2. La définition d'orthogonalité reste valable dans
3. Si A, B, E et F sont des points distincts deux à deux du plan alors : $(AB) \perp (EF)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{EF}$.

II Des propriétés du produit scalaire.

1 Propriétés.

Proposition 3 - Propriétés du produit scalaire.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs, λ un nombre réel.

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

(ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

(iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

(iv) $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$.

Remarques.

1. Nous pouvons interpréter ces propriétés avec le vocabulaire que nous connaissons déjà sur les lois (opérations) :
   (i) Commutativité.
   (ii) Distributivité à gauche du produit scalaire sur l'addition (de vecteurs).
   (iii) Distributivité à droite du produit scalaire sur l'addition (de vecteurs).
   (iv) Une sorte de commutativité entre le produit par un nombre et le produit scalaire.
2. La propriété (i) est appelée la *symétrie* du produit scalaire. Les propriétés (ii), (iii) et (iv) sont appelées la *bilinéarité* du produit scalaire.

3. Ces propriétés sont à l'origine de la définition la plus générale du produit scalaire (y compris pour des vecteurs qui ne sont pas des objets de géométrie) d'où le fait que nous insistions. Cependant dans la pratique, au lycée, il faut retenir que nous allons pouvoir manipuler les vecteurs comme des nombres pour travailler avec le produit scalaire. Ainsi qui dit distributivité, dit double distributivité et donc identités remarquables.
4. En toute rigueur la propriété (iv) fait intervenir trois opérations différentes : produit de deux nombres réels, multiplication d'un vecteur par un nombre, produit scalaire.
5. La distributivité apparaîtra souvent lorsque la relation de Chasles est utilisée : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{ZF}\right)$.

Exercice 9.

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 2$ et BCD un triangle isocèle en D tel que $BD = \sqrt{3}$ et D est extérieur au triangle ABC. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Calculez $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BI}$, puis $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BD}$.
2. Calculez $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID}$, puis $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BD}$.
3. En déduire $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA}$.

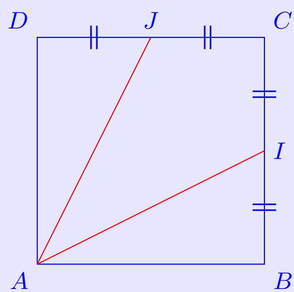
Exercice 10.

$ABCD$ est un carré de côté $a \in \mathbb{R}_+$, I est le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[CD]$.

1. En remarquant que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$, calculez $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI}$.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 11.

$ABCD$ est un carré de côté 6. Les points I et J sont les milieux respectif des côtés $[BC]$ et $[CD]$. Calculez $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.



Exercice 12.

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 3$. Les points B' et D' sont les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC).

1. Calculez $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.
2. Déduisez-en la longueur $B'D'$.

Exercice 13.

Exercices 18 à 22 page 229 du manuel Indice.

2 Exercices.

Exercice 14.

Exercices 52 page 230 à 60 page 231 du manuel Indice.

Exercice 15.

Soit $OABC$ un carré de côté 4 et M le milieu de $[OC]$.

1. Calculez $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en utilisant I le milieu de $[AB]$.
2. Déduisez-en une valeur approchée au degré près (à la calculatrice) de la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$.

III Produit scalaire et norme.

1 Des identités remarquables.

Proposition 4

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$.

(ii) $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$.

(iii) $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2$.

Exercice 16.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques.
Démontrez l'égalité : $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = 4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

2 Caractérisation du produit scalaire par la norme.

Nous savons calculer la norme avec le produit scalaire : $||AB||^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$, nous allons voir maintenant comment calculer le produit scalaire grâce à la norme.

Proposition 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$.

(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$.

Remarques.

1. Il est possible de retrouver la norme à partir du produit scalaire : $||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ et nous voyons maintenant qu'il est possible de retrouver le produit scalaire à partir de la norme. Autrement dit il revient au même de se donner une norme ou un produit scalaire.

Exercice 17.

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 7$. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 18.

ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $BC = 6$. Calculez $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$. Déduisez-en $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Exercice 19.

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 3$, $AD = 4$ et $AC = 6$. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Exercice 20.

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On donne $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$ et $\theta = \left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Calculez les éléments suivants.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. $3\vec{v} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$.
3. $||\vec{u} + \vec{v}||^2$.
4. $||2\vec{u} - \vec{v}||$.

Exercice 21.

Exercices 31 à 37 page 229 du manuel Indice.

Exercice 22.
Exercices 89 page 233 à 103 page 234 du manuel Indice.

Exercice 23.
Exercices 104 page 234 à 115 page 234 du manuel Indice.

IV Produit scalaire et coordonnées cartésiennes.

Rappelons qu'à tout bipoint $\overrightarrow{AB}$ nous associons ses coordonnées, dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Proposition 6

Soient :
. $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,
. $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$,
. $\vec{v}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Remarques.

1. Le repère doit être orthonormal pour que nous ayons bien $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.
2. Il est possible de définir des produits scalaires dans des repères qui ne sont pas orthonormés mais dans ce cas la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ne correspond pas à la longueur AB : $||\overrightarrow{AB}|| \neq AB$.

Corollaire 1

Soient :
. $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,
. $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$,
. $\vec{v}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Remarques.

1. Ainsi le produit scalaire nous permettra de vérifier l'orthogonalité de deux vecteurs et donc la perpendicularité de droites.

Exercice 24.

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, ainsi que les points $A(2;3)$, $B(-5;4)$, $C(-1;-3)$ et $D(-1;1)$.
Calculez les produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

Exercice 25.

Dans une base orthonormée on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.
Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux puis si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Exercice 26.

Dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ on a placé les points $A(1;1)$, $B(3;2)$ et $C(4;5)$.
Déterminez l'angle $\widehat{ABC}$ à 0,1 degré près en exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ de deux façons différentes.

Exercice 27.

Exercices 23 à 30 page 229 du manuel Indice.

Exercice 28.

Exercices 61 page 232 à 82 page 232 du manuel Indice.

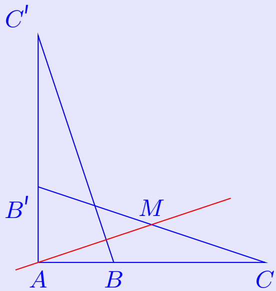
Exercice 29.

Exercices 83 page 232 à 88 page 233 du manuel Indice. Calcul d'angles.

V Exercices.

Exercice 30.

ABB' et ACC' sont deux triangles rectangles isocèles en A. On a $AB = AB' = 1$ et $AC = AC' = 3$. M est le milieu de $[B'C]$. On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right)$.



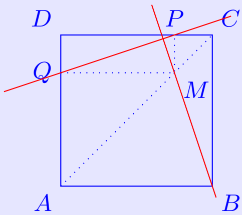
1. (a) Déterminez les coordonnées des points de la figure puis des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC'}$.

   (b) Déduisez-en que (AM) et (BC') sont perpendiculaires.

2. La perpendicularité des droites (AM) et (BC') reste-t-elle vraie quelque soit la longueur commune à AC et AC' ?

Exercice 31.

$ABCD$ est un carré de côté égale à 4, M est un point de la diagonale $[AC]$. P et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (CD) et (DA).
On veut démontrer que les droites (PQ) e t(BM) sont perpendiculaires. pour cela, on se place dans le repère d'origine A et tel que B et D ont respectivement pour coordonnées (4,0) et $(0;4)$: il s'agit du repère $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$.
On note x l'abscisse de M.



1. (a) Déterminez, en fonction de x les coordonnées de tous les points de la figure.
   (b) Concluez.
2. Nous voulons savoir si la propriété démontrée à la question précédente est vraie quelque sot le carré $ABCD$.
   Pour le savoir on note a la longueur du côté du carré et on se place dans le repère $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$. On note x l'abscisse du point M.
   (a) Justifiez que le repère $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$ est orthonormé.
   (b) Déterminez en fonction de x et de a les coordonnées de tous les points de la figure.
   (c) Concluez.

Exercice 32.

$ABCD$ est un rectangle non trivial (non réduit à un point ou un segment) et I est le milieu de $[CD]$. On pose $AB = a$ et $AD = b$.
Montrez l'équivalence : $(AC) \perp (BI) \iff a = b\sqrt{2}$.

Exercice 33.

ABC est un triangle rectangle en A, I est le milieu de $[BC]$ et H est le pied de la hauteur issue de A. P est le projeté orthogonal de H sur (AB) et Q celui de H sur (AC).

1. Justifiez que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
2. Justifiez que $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. Déduisez-en, que (AI) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice 34.

Soient $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.
Nous notons $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Nous admettrons que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base.

1. Montrez que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée.
2. Soit $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur du plan avec x et y des réels.
   (a) Calculez $\vec{i} \cdot \vec{u}$, $\vec{i} \cdot \vec{v}$, $\vec{j} \cdot \vec{u}$ et $\vec{j} \cdot \vec{v}$.
   (b) Calculez $\vec{r} \cdot \vec{u}$ et $\vec{r} \cdot \vec{v}$.
   (c) Déduisez-en les coordonnées de $\vec{r}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.
3. Intuitivement et sans aucune justification donnez une mesure en radian de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{u}\right)$.

Exercice 35.

On considère A, B et C trois points du plan distincts deux à deux. Soit la proposition « Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ».

1. Indiquez, en justifiant, si cette proposition est vraie ou fausse.
2. Écrivez la réciproque de cette proposition. Est-elle vraie ?
3. Écrivez le contraposée de cette proposition. Est-elle vraie ?

Exercice 36.

Soit le triangle EFG tel que $E(0;1)$, $F(8,-3)$ et $G(12;5)$.
Le point $H(7;0)$ appartient-il à la hauteur issue de F ?

Exercice 37.

Soient les points $A(-4;1)$ et $B(3;0)$.
Déterminez les coordonnées du point C tel que le triangle ABC soit rectangle en A et C appartienne à l'axe des ordonnées.

Exercice 38.

Sur le cercle trigonométrique de centre O, on place les points A et B associés aux réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.

1. Calculez les coordonnées des points A et B.
2. (a) Déterminez une mesure de $\widehat{AOB}$ en radians.
   (b) En calculant de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, déterminez la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$. Déduisez-en $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 39.

Soient les points $A(-6;4)$, $B(-2;2)$ et $C(5;-7)$ dans un repère orthonormé.

1. Calculez $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. Notons H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. Montrez que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Calculez BC. Déduisez-en BH et HC.

Exercice 40.

Soient A, B et C trois points du plan tels que $AB = 5$, $AC = \sqrt{10}$ et $BC = \sqrt{50}$. Calculez une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ à 0,1 degré près.

Exercice 41.

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 10$. M est le milieu de $[AD]$ et N est le milieu de $[AB]$. I est l'intersection des droites (BM) et (CN).

1. Calculez $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{NC}$.
2. Déduisez-en, à 0,1 degré près, l'angle $\widehat{MIC}$.

Exercice 42.

Soient OAA' et OBB' deux triangles rectangles isocèles en O. On se propose de démontrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires.

1. Montrez que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB}$.
2. Justifiez que $\widehat{AOB'} + \widehat{A'OB} = \pi$.
3. Déduisez-en que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB}$.
4. Concluez.

Exercice 43.

On considère trois points du plan $A(1;3)$, $B(-2;1)$ et $C(1;10)$. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB). On veut calculer la hauteur CH.

1. Justifiez que le vecteur $\vec{n}(-2;3)$ est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Soit D le point tel que $\overrightarrow{HD} = \vec{n}$.
   (a) Calculez $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   (b) Justifiez que $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   (c) Déduisez-en la longueur HC.

Exercice 44.

En utilisant le produit scalaire remarquable :

$$\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}).$$

montrez qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

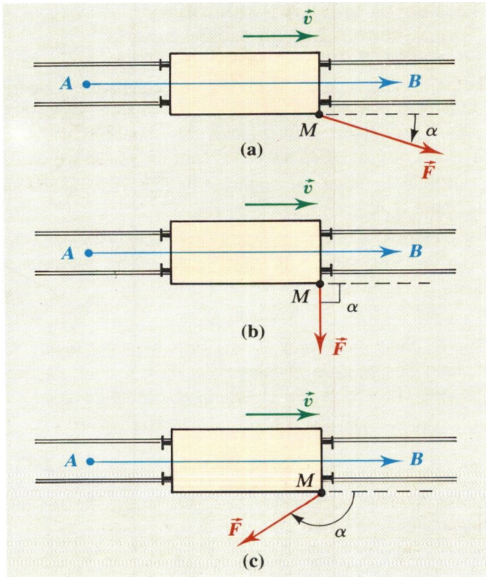
VI Applications.

1 Travail d'une force. ★★

Une belle illustration du travail d'une force.

Le travail peut être compris comme la quantité d'énergie dépensée pour participer au mouvement.

Pour une force $\vec{F}$ s'exerçant sur un solide effectuant un mouvement de translation $\overrightarrow{AB}$ le travail est $W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$. Le travail s'exprime en joules, l'intensité de la force est en newton et la longueur AB en mètres.

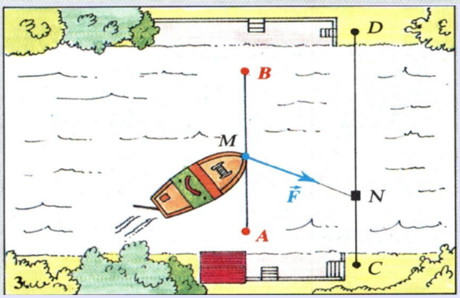


2. ***Le wagonnet se déplace sur une voie rectiligne de A vers B. En* (a), *le travail de la force $\vec{F}$ est moteur; en* (b), *le travail est nul; en* (c), *le travail est résistant.***

Exercice 45.

Au cours de la traversée d'un fleuve à fort courant, un bac est relié à un câble MN pouvant lui-même coulisser sur un câble CD placé en travers de la rivière.
Entre A et B, le bac est animé d'un mouvement de translation rectiligne, parallèlement à CD, et la force $\vec{F}$ exercée en M par le câble est constante. Calculer $W_{A \to B}(\vec{F})$.

Données : $F = 5\,000$ N, $\widehat{(\vec{F}, \overrightarrow{AB})} = \frac{3\pi}{4}$, $AB = 200$ m.



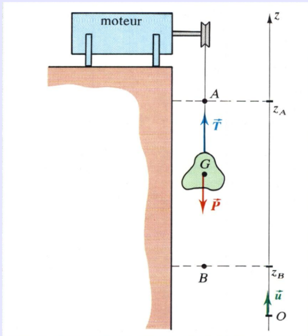
Exercice 46.

Rappelons que le poids, $\overrightarrow{P}$, s'appliquant à une masse m est $\overrightarrow{P} = m \times g \times \overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est vecteur orthogonal au sol terrestre.
Rappelons également le principe d'inertie : la somme des forces s'exerçant sur un solide mouvement rectiligne à vitesse constante est nulle.

Une charge de masse $m = 200$ kg est soulevée à vitesse constante d'une hauteur $h = 30$ m par un treuil entraîné par un moteur.

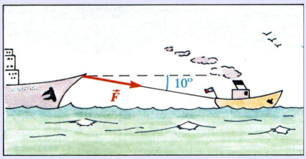
1/ Calculer le travail du poids de la charge. (On prendra $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$.)

2/ Calculer le travail minimal effectué par le moteur.



Exercice 47.

Un remorqueur exerce sur un cargo une force $\vec{F}$, d'intensité $F = 50\,000$ N et faisant l'angle $\alpha = 10^{\circ}$ avec la direction du déplacement. La vitesse de l'ensemble est de 6 nœuds. Calculer la puissance de la force $\vec{F}$.

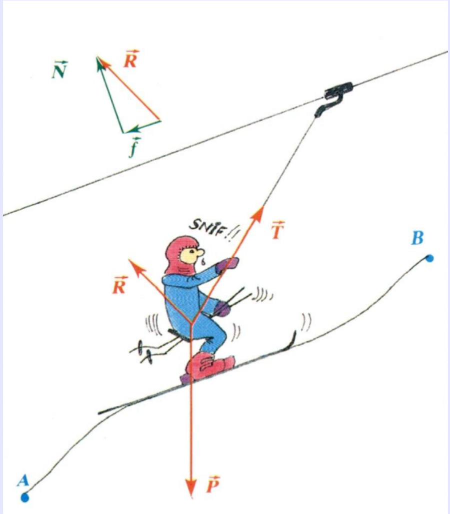


Exercice 48.

Un skieur de masse $m = 80$ kg est tiré à vitesse constante par un câble tendu le long d'une piste curviligne de longueur $\ell = 3$ km et de dénivellation $h = 400$ m.
Les frottements sont assimilables à une force $\vec{f}$ constamment opposée au vecteur vitesse $\vec{v}$ et de norme supposée constante, $f = 200$ N.

1/ Faire le bilan des forces appliquées au skieur.

2/ Calculer le travail de ces forces sur le trajet AB. (On prendra $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$.)



Pour une force $\overrightarrow{F}$ s'exerçant sur un solide effectuant un mouvement avec la vitesse $\overrightarrow{v}$, la puissance est $\mathscr{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$. La puissance s'exprime en joules par seconde, l'intensité de la force est en newton et la vitesse v en mètres par seconde.

Exercice 49.

Après une certaine durée de chute, un parachutiste de masse totale 80 kg est animé d'un mouvement de translation rectiligne verticale uniforme de vitesse $v = 2{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Calculez la puissance des forces réparties exercées par l'air sur le parachutiste et son parachute. On prendra $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

2 Ligne de niveau.

Exercice 50.

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$.

1. Justifiez que $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2$ et $MB^2 = \overrightarrow{MB}^2$.
2. (a) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Justifiez que :

$$\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}).$$

   (b) Déduisez-en que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$.
3. (a) Montrez que l'égalité $MA = MB$ équivaut à $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
   (b) Quelle propriété du collège retrouve-t-on ?

Exercice 51.

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 2$.

1. Déterminez l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \leqslant 0$ en représentant cette région du plan.
2. Déterminez l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \geqslant 4$ en représentant cette région du plan.

Exercice 52.

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 2$ et I le milieu de $[AB]$. On veut déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 12$.

1. Justifiez que

$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right).$$

2. Déduisez-en que $MA^2 - MB^2 = 6$ équivaut à $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$.
3. Déterminez un point H de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$.
4. Déduisez-en l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 6$ et le représenter.
5. Déterminez de même l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 4$. En remarquant que $AB^2 = 4$ pouvait-on prévoir la réponse ?

3 Pythagore généralisé (Al-Kashi).

VII Vers l'infini et au-delà.

1 Le produit vectoriel une introduction au produit scalaire.

2 Loi des sinus. ★

3 Droite d'Euler d'un triangle. ★

4 Médianes du triangle et centre de gravité. ★

5 Inégalité triangulaire.

Exercice 53.

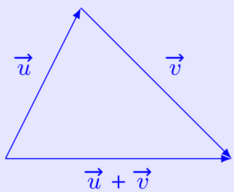
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des représentants respectifs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Justifiez que, quelque soit le réel α, on a $|\cos\alpha| \leqslant 1$.
2. En déduire que $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (1).
3. Redémontrez que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$.
4. En utilisant les résultats des questions précédente, montrez que

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad (1).$$

Cet exercice présente deux inégalité absolument fondamentales en mathématiques bien que vous en fassiez assez peu usage au lycée :

- (1) est appelée l'*inégalité de Cauchy-Schwartz* elle se généralise à tous les espaces vectoriels (y compris des ensembles de fonctions).
- (2) est appelée *inégalité triangulaire* est correspond au cas vectoriel de l'inégalité que cous connaissez déjà dans le cas affine :



6 Quadrangle orthocentrique.

Exercice 54.