Rappels sur les droites.

I La définition moderne d'une droite.

1 Définition.

Définition 1

Soient A et B deux points distincts du plan euclidien.

Nous noterons (AB), et nous appellerons *droite passant par A et B*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

2 Tracer une droite connaissant un point et un vecteur directeur.

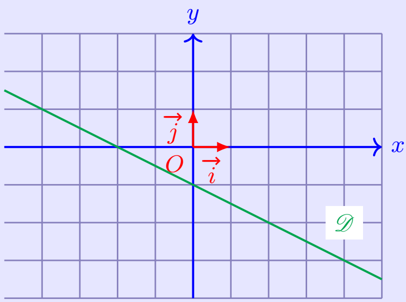
Exercice 1.

Après avoir choisi un repère du plan dessinez la droite passant par $H(-1{,}3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

3 Lire graphiquement un vecteur directeur.

Exercice 2.

Sans justification donnez les coordonnées de 3 vecteurs directeurs de la droite $\mathscr{D}$ représentée ci-dessous dans un repère $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.



Exercice 3.

Indiquez si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-14\\6\end{pmatrix}$ sont vecteurs directeurs de (AB) où $A(5{,}2)$ et $B(-2{,}5)$ sont des points du plan rapporté à un repère.

4 Parallélisme et vecteurs directeurs.

Définition 2

Nous dirons que deux droites sont *parallèles* si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Exercice 4. Application.

On considère une droite d passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.
Soient $B(7;-5)$, $C(-4;6)$ et $D(3;-4)$.

1. Tracez la droite d puis placez B, C et D.
2. Le point B est-il sur d ?
3. Les droites d et (CD) sont-elles parallèles ?

II Les équations cartésiennes de droites.

1 Équation cartésienne.

Proposition 1

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan euclidien.

(i) Pour toute droite $\mathscr{D}$ il existe des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls) tels que $\mathscr{D}$ est formée de tous les points $M(x,y)$ pour lesquels x et y vérifient l'équation $ax+by+c=0$.

(ii) Réciproquement étant donné des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls), l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que x et y vérifient l'équation $ax+by+c=0$ est une droite.

Exercice 5.

Soient $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère cartésien, $A(3;-1)$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-102\end{pmatrix}$.

1. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant pas A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Démontrer que $B\left(0;-\frac{155}{2}\right)\in\mathscr{D}$.

Exercice 6. Application.

Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant A et de vecteurs directeur $\vec{u}$.

1. $A(3;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.
2. $A(-2;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$.
3. $A(5;-10)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
4. $A(0;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

2 Trouver un vecteur directeur grâce à une équation cartésienne.

Nous allons utiliser une astuce : si une droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

Exercice 7.

Déterminez un vecteur directeur de la droite d.

1. $d:\ 4y - 3x + 1 = 0$.
2. $d:\ x - 5y + 2 = 0$.
3. $d:\ -x + 2y - 5 = 0$.

3 Équations réduites.

Proposition 2 - équations réduites.

Soient :
. $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan,
. $\mathscr{D}$ une droite du plan.

(i) Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $x = r$ avec r une constante réelle.

(ii) Si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$ avec m et p des constantes réelles.

Exercice 8.

Déterminez une équation réduite de la droite $\mathscr{D}:\ 2x + y + 4 = 0$.

III Fonctions affines.

1 Définition.

Définition 3

Soit f une fonction numérique.

f est dit *affine* si et seulement si il existe des nombres a et b réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

Dans ce cas a est appelé *le coefficient directeur* (ou *pente*) et b est appelé *l'ordonnée à l'origine*.

Exercice 9.

Tracez la courbe représentative de la fonction affine $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2$ sur $[-3; 6]$.

2 Identifier une fonction affine : taux d'accroissement.

Définition 4

Soient :

. f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$,

. α et β deux nombres de $\mathcal{D}_f$ tels que $\alpha \neq \beta$.

Le *taux d'accroissement de f entre α et β* est le nombre :

$$\tau_f(\alpha,\beta) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Proposition 3

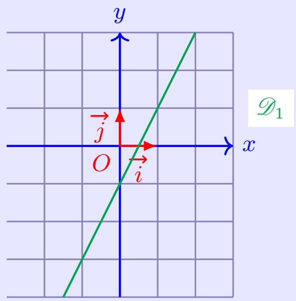
Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ a un taux d'accroissement constant si et seulement si c'est une fonction affine.
Dans ce cas son taux d'accroissement est alors son coefficient directeur (pente).

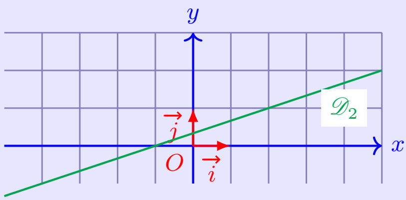
Exercice 10.

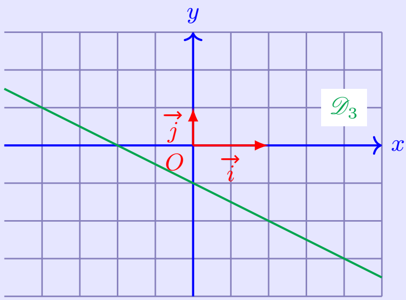
Déterminez la pente de la droite (AB) sachant que $A(2,5)$ et $B(6, -5)$.

Exercice 11.

Par lecture graphique déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite dessinée dans un repère ci-dessous.







3 Étude du signe d'une fonction affine.

Proposition 4

Soient :

. a et b deux nombres réels,

. $f : x \mapsto ax + b$ la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

Exercice 12.
Étudiez le signe de la fonction f définie sur $\mathscr{D}_f =]-\pi, 14]$ par $f(x) = -2x + 4$.

Exercice 13.
Étudiez le signe des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto (x-2)(4-3x)$.
2. $g : x \mapsto 3(2x+1)(x+4)$.
3. $h : x \mapsto -\pi(x+1)(x+3)(x-2)$.
4. $k : x \mapsto x^2\sqrt{|x|}(x-1)$.
5. $\ell : x \mapsto \frac{2x-3}{3x-7}$.

4 Tableau de variation.

Proposition 5

Soient :

. a et b deux nombres réels,

. f la fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$ quelque soient $x \in \mathbb{R}$

(i) Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(ii) Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

(iii) Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

IV Exercices.

Exercice 14.

On donne les équations : $3x + by + c = 0$ et $cx - 2y + 12 = 0$.
Indiquez si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, puis justifiez. « Il existe un unique couple $(b; c)$ de réels tel que ces deux équations sont celles d'une même droite. »