Rappels sur les droites.

I La définition moderne d'une droite.

1 Définition.

Définition 1

Soient A et B deux points distincts du plan euclidien.

Nous noterons (AB), et nous appellerons *droite passant par A et B*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ou n'importe quel vecteur qui lui soit colinéaire et non nul est appelé *un vecteur directeur de la droite*.
2. Pour définir une droite il faut et il suffit que nous en connaissions un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Nous avions besoin de deux points et nous avons à nouveau besoin de deux informations.

2 Tracer une droite connaissant un point et un vecteur directeur.

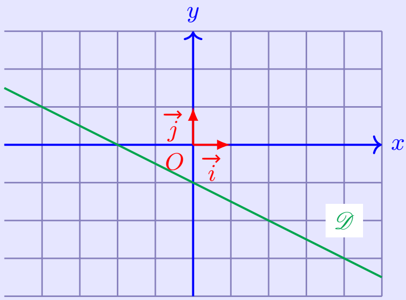
Exercice 1.

Après avoir choisi un repère du plan dessinez la droite passant par $H(-1{,}3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

3 Lire graphiquement un vecteur directeur.

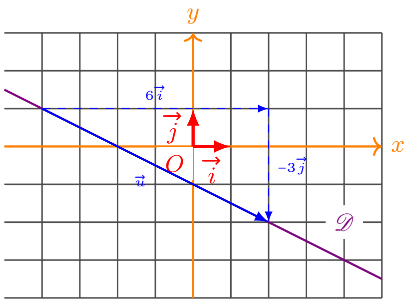
Exercice 2.

Sans justification donnez les coordonnées de 3 vecteurs directeurs de la droite $\mathscr{D}$ représentée ci-dessous dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



Correction exercice 2

Il suffit de trouver les coordonnées d'un vecteur « porté » par la droite. Pour avoir davantage de vecteurs directeurs on peut lire d'autres coordonnées ou prendre les coordonnées du précédent vecteur multiplié par n'importe quel nombre.



Les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

Indiquez si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -14 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont vecteurs directeurs de (AB) où $A(5{,}2)$ et $B(-2{,}5)$ sont des points du plan rapporté à un repère.

4 Parallélisme et vecteurs directeurs.

Définition 2

Nous dirons que deux droites sont *parallèles* si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Exercice 4. Application.

On considère une droite d passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.
Soient $B(7;-5)$, $C(-4;6)$ et $D(3;-4)$.

1. Tracez la droite d puis placez B, C et D.
2. Le point B est-il sur d ?
3. Les droites d et (CD) sont-elles parallèles ?

Correction exercice 4

1.
2. Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}\right) &= \begin{vmatrix}7-3 & -2\\ -5-1 & 3\end{vmatrix}\\ &= 4\times 3-(-6)\times(-2)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc B appartient à la droite passant ar A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

B appartient à d.

3. Déterminons si $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{u}\right) &= \begin{vmatrix}3-(-4) & -2\\ -4-6 & 3\end{vmatrix}\\ &= 7\times 3-(-10)\times(-2)\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires donc :

d et (CD) ne sont pas parallèles.

II Les équations cartésiennes de droites.

1 Équation cartésienne.

Exemple.

Proposition 1

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan euclidien.

(i) Pour toute droite $\mathscr{D}$ il existe des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls) tels que $\mathscr{D}$ est formée de tous les points $M(x,y)$ pour lesquels x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$.

(ii) Réciproquement étant donné des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls), l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite.

Démonstration 1

(i) Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{D} &\iff \det\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}\right) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \\ &\iff (y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y - x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A) = 0 \end{aligned}$$

Donc en posant $a = y_B - y_A$, $b = -(x_B - x_A)$ et $c = -x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A)$ nous obtenons bien que x et y sont solution de l'équation $ax + by + c = 0$.

(ii) Cette démonstration est plus technique et astucieuse. Nous n'en présenterons ici que la trame.
Pour s'assurer que l'équation est celle d'une droite nous devons trouver une droite qui lui corresponde, *i.e.* un point et un vecteur directeur de cette droite.
Pour le point nous choisirons $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$ si $a \neq 0$ et $\left(0; -\frac{c}{b}\right)$ sinon.
Pour le vecteur directeur nous choisissons $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (ce choix astucieux s'inspire de la démonstration de (i)).

Il ne reste plus, en faisant comme au (i), qu'à vérifier que l'équation cartésienne obtenue pour ce point et ce vecteur directeur est bien : $ax + by + c = 0$.

Remarques.

1. Une équation cartésienne n'est pas unique : $x + 3y + 1 = 0$ et $2x + 6y + 2 = 0$ sont deux équations cartésiennes d'une même droite, la seconde étant obtenue en multipliant la première par 2.
2. Dans la suite de la leçon nous distinguerons trois types de droites correspondant à deux types d'équations différentes.
3. Le choix du vecteur directeur au (ii) de la démonstration est à retenir : si une droite à une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ alors les vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

Exercice 5.

Soient $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère cartésien, $A(3; -1)$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -102 \end{pmatrix}$.

1. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant pas A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Démontrer que $B\left(0; -\frac{155}{2}\right) \in \mathscr{D}$.

Correction exercice 5

1. La méthode de la détermination d'une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur directeur est à connaître.

   Notons $\mathscr{D}$ la droite passant pas A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

   Déterminons une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

   Soit $M(x; y) \in \mathscr{D}$.

   $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, ce qui équivaut encore successivement à

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AM}; \vec{u}\right) &= 0 \\
\begin{vmatrix} x_{AM} & x_u \\ y_{AM} & y_u \end{vmatrix} &= 0 \\
\begin{vmatrix} x - 3 & -4 \\ y - (-1) & -102 \end{vmatrix} &= 0 \\
(x - 3) \times (-102) - (y + 1) \times (-4) &= 0 \\
-102x + 4y + 310 &= 0
\end{aligned}$$

$$\mathscr{D} : \ -102x + 4y + 310 = 0.$$

2. La méthode pour vérifier qu'un point appartient à une droite dont on connaît une équation est à savoir.

   Vérifions que $B \in \mathscr{D}$.

   $B \in \mathscr{D}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation cartésienne de $\mathscr{D}$. Or

$$\begin{aligned} -102x_B + 4y_B + 310 &= -102 \times 0 + 4 \times \left(-\frac{155}{2}\right) + 310 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   donc

$$B \in \mathscr{D}.$$

Exercice 6. Application.

Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant A et de vecteurs directeur $\vec{u}$.

1. $A(3;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.
2. $A(-2;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$.
3. $A(5;-10)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
4. $A(0;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

Correction exercice 6

1. $\mathscr{D} : \ 2x + y - 10 = 0.$
2. $\mathscr{D} : \ -3x - y - 1 = 0.$
3. $\mathscr{D} : \ x + 3y + 25 = 0.$
4. $\mathscr{D} : \ x - 5y + 20 = 0.$

2 Trouver un vecteur directeur grâce à une équation cartésienne.

Nous allons utiliser une astuce : si une droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

Exercice 7.

Déterminez un vecteur directeur de la droite d.

1. $d: \ 4y - 3x + 1 = 0$.
2. $d: \ x - 5y + 2 = 0$.
3. $d: \ -x + 2y - 5 = 0$.

Correction exercice 7

1. $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
   Or ici $a = -3$, $b = 4$ et $c = 1$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
2. Voici une autre façon de déterminer un vecteur directeur d'une droite mais un peu plus lourde. Trouvons deux points distincts A et B de d et alors $\overrightarrow{AB}$ sera un vecteur directeur de d. Pour trouver un point choisissons une valeur de x au hasard et cherchons une valeur de y correspondante e sorte que ce soit un point de la droite.
   Cherchons (si possible) $A \in d$ de sorte que $x_A = 0$ alors on devrait avoir $x_A - 5y_A + 2 = 0$ et donc $y_A = \frac{2}{5}$. $A\left(0; \frac{2}{5}\right)$ est un point de la droite.
   De même si $x_B = 1$ alors $y_B = \frac{3}{5}$ et $B \in d$.
   Donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d.
3. $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
   Or ici $a = -1$, $b = 2$ et $c = -5$ donc $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

3 Équations réduites.

Proposition 2 - équations réduites.

Soient :

. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan,

. $\mathscr{D}$ une droite du plan.

(i) Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $x = r$ avec r une constante réelle.

(ii) Si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$ avec m et p des constantes réelles.

Démonstration 2

Considérons une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Nous utiliserons le fait que la vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et aussi le fait que a et b ne peuvent être simultanément nuls.

On distingue les deux cas.

(i) Premier cas : la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Donc le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{\jmath}$ et par conséquent : $-b = 0$ et $a \neq 0$.

Ainsi l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$ se simplifie en $ax + c = 0$. Et puisque $a \neq 0$: $x = \frac{-c}{a}$.

(ii) Second cas : la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Donc le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{\jmath}$ et nécessairement : $b \neq 0$.

Ainsi l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$ peut s'écrire : $y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$.

Exercice 8.

Déterminez une équation réduite de la droite $\mathscr{D}$: $2x + y + 4 = 0$.

III Fonctions affines.

1 Définition.

Définition 3

Soit f une fonction numérique.

f est dit *affine* si et seulement si il existe des nombres a et b réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

Dans ce cas a est appelé *le coefficient directeur* (ou *pente*) et b est appelé *l'ordonnée à l'origine*.

Exercice 9.

Tracez la courbe représentative de la fonction affine $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2$ sur $[-3; 6]$.

Correction exercice 9

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction quelconque il faut utiliser le tableau de valeur de la calculatrice et tracer un grand nombre de points puis les relier en s'inspirant du tracer fournit par la calculatrice.

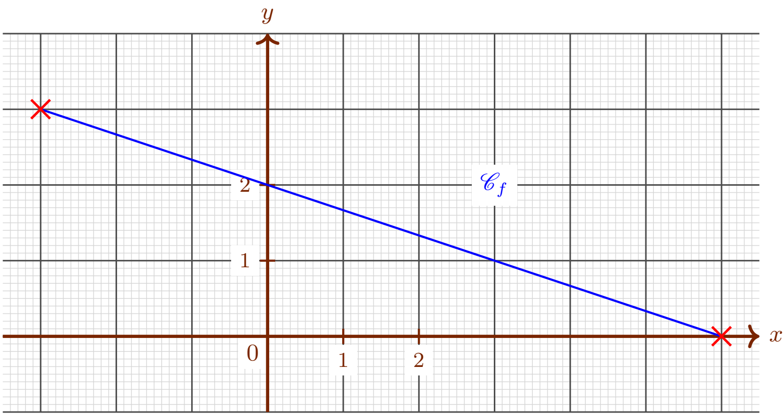
Cependant la courbe représentative d'une fonction affine est une droite (cf supra) donc il s'agit de tracer une droite. Il suffit de relier de façon rectiligne deux points distincts de cette droite.

Traçons la courbe représentative de f.

f est une fonction affine avec $a = -\frac{1}{3}$ et $b = 2$ donc sa courbe représentative et une droite.

On choisit deux valeurs distinctes de x ici, par exemple les bornes de l'ensemble de définition de f et on regarde leurs images par f.

$f(-3) = 3$ et $f(6) = 0$ (ce qui s'interprète en disant que $\mathscr{C}_f$ passe par les points de coordonnées $(-3; 3)$ et $(6{,}0)$) donc :



2 Identifier une fonction affine : taux d'accroissement.

Définition 4

Soient :
. f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$,
. α et β deux nombres de $\mathcal{D}_f$ tels que $\alpha \neq \beta$.

Le *taux d'accroissement de f entre α et β* est le nombre :

$$\tau_f(\alpha,\beta) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Exemples.

1.

Proposition 3

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ a un taux d'accroissement constant si et seulement si c'est une fonction affine.
Dans ce cas son taux d'accroissement est alors son coefficient directeur (pente).

Démonstration 3

Il s'agit ici de démontrer une équivalence (expression « si et seulement si »). L'exemple classique d'équivalence est le théorème de Pythagore : ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Pour démontrer une équivalence il faut procéder en deux temps : une implication et sa réciproque. On montre d'abord que si ABC est rectangle en A alors forcément $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Puis il faut montrer l'implication réciproque : si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors forcément ABC est rectangle en A.

1. Nous allons commencer par une première implication. Supposons que f est une fonction affine et démontrons qu'alors forcément le taux d'accroissement de f est constant (*i.e.* est indépendant des valeurs choisies pour le calculer). Nous savons déjà à quoi sera égale ce taux d'accroissement, puisque la proposition nous indique que ce doit être a.

   Soient α et β deux nombres réels quelconques avec $\alpha < \beta$.
   Par définition du taux d'accroissement :

$$\tau = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Et comme $f(x) = ax + b$ (c'est une fonction affine) :

$$\begin{aligned}
&= \frac{[a\beta + b] - [a\alpha + b]}{\beta - \alpha} \\
&= \frac{a\beta + b - a\alpha - b}{\beta - alpha} \\
&= \frac{a\beta - a\alpha}{\beta - \alpha} \\
&= \frac{a(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha}
\end{aligned}$$

Comme $\beta - \alpha$ est un facteur commun au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{a}{1} \\
&= a
\end{aligned}$$

Ainsi quels que soient les α et β choisi le taux d'accroissement vaut toujours a donc est constant.

2. Nous allons maintenant établir l'implication réciproque. Supposons maintenant que la fonction f (qui n'est pas a priori affine) a un taux d'accroissement constant et démontrons qu'alors f est forcément une fonction affine.

   Notons a (comme par hasard) la valeur constante (indépendamment du choix des valeurs de α et β) du taux d'accroissement :

$$a = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

   Cette égalité étant vraie quelques soient les valeurs choisies pour α et β en particulier, en choisissant $\alpha = 0$ nous obtenons :

$$a = \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta - 0}$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta} \\
a \times \beta &= \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta} \times x_2 \text{ car } \beta \neq 0 \\
a\beta &= f(\beta) - f(0) \\
a\beta + f(0) &= f(\beta) - f(0) + f(0) \\
a\beta + f(0) &= f(\beta)
\end{aligned}$$

Et en notant x plutôt que β (comme par hasard) nous obtenons : $f(x) = ax + f(0)$.
Autrement dit f est bien une fonction affine.

En raisonnant par double implication nous avons démontré la proposition.

Remarques.

1. La démonstration est basée sur la recherche du contre-exemple. Une fonction est affine si et seulement si son taux d'accroissement est toujours le même quelques soient les valeurs (distinctes) choisies pour x_1 et x_2. Donc pour montrer qu'un fonction n'est pas affine il faut trouver deux couples de valeurs x_1 et x_2 pour lesquelles le taux d'accroissement n'est pas le même.
2. Le taux d'accroissement réapparaîtra dans la leçon sur l'étude des droites. Confer les derniers exercices.

Exemples.

1. Si f est un fonction affine telle que $f(1) = 2$ et $f(3) = 4$ alors son coefficient directeur est
$$a = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4 - 2}{2} = 1.$$
2. Démontrons que la fonction carré n'est pas une fonction affine.

   Choisissons $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$ alors
$$\begin{aligned}\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{1^2 - 0^2}{1 - 0} \\ &= 1\end{aligned}$$
   Si par contre nous choisissons $x_1 = 2$ et $x_2 = 0$ alors
$$\begin{aligned}\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{2^2 - 0^2}{2 - 0} \\ &= 2\end{aligned}$$
   Le taux d'accroissement de la fonction carré n'est pas constant donc

   la fonction carrée n'est pas une fonction affine.

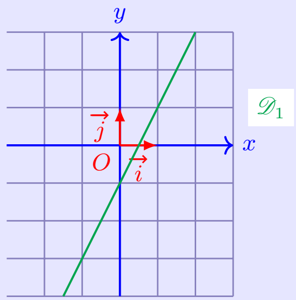
3. De même : $\frac{1^3-0^3}{1-0} = 1$ et $\frac{2^3-0^3}{1-0} = 8$. La fonction cube n'est donc pas une fonction affine.
4. De même : $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2-3} = -\frac{1}{6}$ et $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2-4} = -\frac{1}{4}$. La fonction inverse n'est donc pas une fonction affine.
5. De même : $\frac{\sqrt{9}-\sqrt{25}}{9-25} = \frac{1}{8}$ et $\frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{9-4} = \frac{1}{5}$. La fonction racine carrée n'est donc pas une fonction affine.

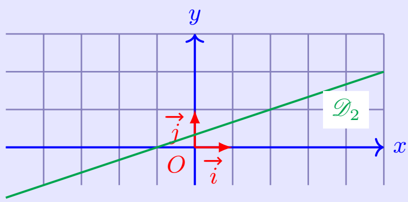
Exercice 10.

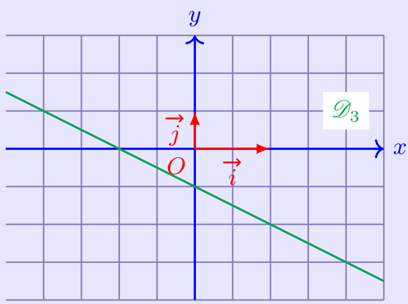
Déterminez la pente de la droite (AB) sachant que $A(2{,}5)$ et $B(6,-5)$.

Exercice 11.

Par lecture graphique déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite dessinée dans un repère ci-dessous.







3 Étude du signe d'une fonction affine.

Proposition 4

Soient :

. a et b deux nombres réels,

. $f : x \mapsto ax + b$ la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

Démonstration 4

Supposons $a > 0$ et démontrons qu'alors le tableau de signe proposé convient.

Recherchons pour quelles valeurs de x, $f(x) > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff ax + b > 0 \\ &\iff ax + b - b > 0 - b \\ &\iff ax > -b \end{aligned}$$

Et comme $a > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff \frac{ax}{a} > -\frac{b}{a} \\ &\iff x > -\frac{b}{a} \\ &\iff x \in \left]-\frac{b}{a}; +\infty\right[\end{aligned}$$

Recherchons de même pour quelles valeurs de x, $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff ax + b = 0 \\ &\iff x = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Remarques.

1. De même si $a < 0$ alors le tableau de signe est

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f	$+$	0	$-$

2. Si $a = 0$ alors f est la fonction constante égale à b donc elle est toujours du même signe, celui de b.

Exercice 12.
Étudiez le signe de la fonction f définie sur $\mathscr{D}_f =]-\pi, 14]$ par $f(x) = -2x + 4$.

Exercice 13.
Étudiez le signe des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto (x-2)(4-3x)$.
2. $g : x \mapsto 3(2x+1)(x+4)$.
3. $h : x \mapsto -\pi(x+1)(x+3)(x-2)$.
4. $k : x \mapsto x^2\sqrt{|x|}(x-1)$.
5. $\ell : x \mapsto \frac{2x-3}{3x-7}$.

4 Tableau de variation.

Proposition 5

Soient :

. a et b deux nombres réels,

. f la fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$ quelque soient $x \in \mathbb{R}$

(i) Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(ii) Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

(iii) Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration 5

Si $a = 0$ la fonction est évidemment constante.

Démontrons l'un des deux cas l'autre se traitant de la même façon. Supposons par exemple que $a < 0$.

Il faut démontrer que f est strictement décroissante. D'après la définition de la monotonie, il faut donc montrer que quels que soient les nombres réels α et β si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$.

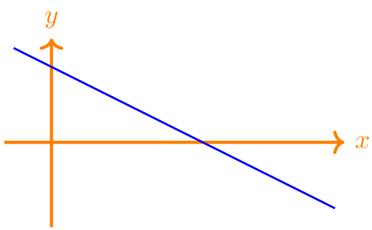
Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Cette inégalité est successivement équivalente à :

$$\begin{aligned} a\alpha &> ax\beta \text{ car } a < 0 \\ a\alpha + b &> a\beta + b \\ f(\alpha) &> f(\beta) \end{aligned}$$

On a donc démontrer que si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$. Autrement dit f est strictement décroissante.

Étudions par exemple le signe de $f : x \mapsto -2x + 4$.

* f est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 4$.
* le coefficient directeur est strictement négatif, $a < 0$ donc f est strictement décroissante.
  Ceci se traduit graphiquement par une droite qui descend. Quelque chose comme :



Nous voyons sur ce schéma que la fonction prend d'abord des valeurs positives puis des valeurs négatives. Autrement dit nous pouvons déjà compléter le tableau de signe de la façon suivante :

x	$-\infty$		?		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

Il nous reste à trouver pour quelle valeur de x, f s'annule.

* f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$. Ce résultat a été établi plus tôt dans cette leçon.

Nous en déduisons le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

IV Exercices.

Exercice 14.

On donne les équations : $3x + by + c = 0$ et $cx - 2y + 12 = 0$.
Indiquez si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, puis justifiez. « Il existe un unique couple $(b; c)$ de réels tel que ces deux équations sont celles d'une même droite. »