

Méthode de Monte-Carlo.

I Des exercices de programmation en Python.

Exercice 1

Exercices page 342.

II Calcul de l'aire sous une parabole.

Exercice 2

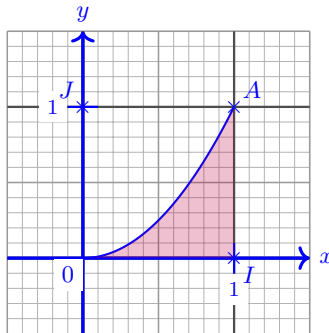
Il s'agit d'un problème de quadrature, *i.e.* un problème de calcul d'aire.

On considère l'arc de parabole \mathcal{P} qui est la courbe représentative de la fonction

$$f : \begin{cases} [0,1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases} \text{ dans un repère orthonormé } (O, I, J).$$

Notons $A(1;1)$.

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une valeur approchée de l'aire comprise entre \mathcal{P} et l'axe des abscisses (partie colorée sur la figure ci-dessous).



Nous allons faire apparaître 100 points $M(x; y)$ au hasard dans le rectangle $IAJO$ et regarder la proportion de points qui se trouvent dans la partie colorée. Le point $M(x; y)$ est dans la partie colorée si et seulement si $y < x^2$.

1. Justifiez que $A \in \mathcal{P}$.
2. Nous utilisons le programme suivant (rédigé en python) qui crée 100 points dans le carré $IAJO$ et compte le nombre de ces points qui sont sous la parabole.

```

import random

def point():
    if random.random() < random.random() ** 2:
        return 1
    else:
        return 0

n=0
dessous=0
while n<100:
    dessous=dessous+point()
    n=n+1
print(dessous)

```

Remarque : `random.random()` est un nombre aléatoire entre 0 et 1.

- (a) Expliquez en quoi la fonction `point()` crée un point dans le carré et test s'il est sous la parabole ou pas.
 - (b) Modifiez ce programme afin qu'il donne la proportion de points situés sous la parabole.
3. Le précédent programme génère un échantillon de taille 100. Déterminez l'intervalle de confiance correspondant.
 4. Interprétez l'intervalle de confiance précédemment déterminé.
 5. Modifiez le programme pour obtenir un échantillon de taille 1000 et déterminez l'intervalle de confiance correspondant.
 6. Répondez à la question initiale de cet exercice en précisant la marge d'erreur probabiliste de la valeur approchée trouvée.

III Calcul d'une valeur approchée de π .

Exercice 3

1. En considérant un cercle de rayon 1 et de centre O , l'origine d'un repère orthonormé, rédigez un algorithme en Python donnant une valeur approchée de l'aire de ce disque par la méthode de Monte-Carlo avec 100 000 points créés. Vous pourrez considérer un carré dans lequel le cercle est inscrit.
2. Déduisez-en une valeur approchée de π en précisant l'erreur commise du point de vu probabiliste (intervalle de confiance).