Méthode de Monte-Carlo.

I Des exercices de programmation en Python.

Exercice 1

Exercices page 342.

II Calcul de l'aire sous une parabole.

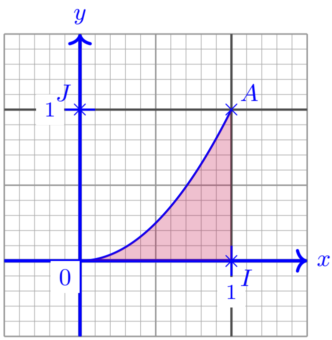
Exercice 2

Il s'agit d'un problème de quadrature, *i.e.* un problème de calcul d'aire.

On considère l'arc de parabole $\mathscr{P}$ qui est la courbe représentative de la fonction $f : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ dans un repère orthonormé (O,I,J).

Notons $A(1;1)$.

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une valeur approchée de l'aire comprise entre $\mathscr{P}$ et l'axe des abscisses (partie colorée sur la figure ci-dessous).



Nous allons faire apparaître 100 points $M(x;y)$ au hasard dans le rectangle $IAJO$ et regarder la proportion de points qui se trouvent dans la partie colorée. Le point $M(x;y)$ est dans la partie colorée si et seulement si $y < x^2$.

1. Justifiez que $A \in \mathscr{P}$.
2. Nous utilisons le programme suivant (rédigé en python) qui crée 100 points dans le carré $IAJO$ et compte le nombre de ces points qui sot sous la parabole.

```
import random

def point():
  if random.random()<random.random()**2:
    return(1)
  else:
    return(0)

n=0
dessous=0
while n<100:
  dessous=dessous+point()
  n=n+1
print(dessous)
```

Remarque : random.random() est un nombre aléatoire entre 0 et 1.

(a) Expliquez en quoi la fonction point() crée un point dans le carré et test s'il est sous la parabole ou pas.

(b) Modifiez ce programme afin qu'il donne la proportion de points situés sous la parabole.

3. Le précédent programme génère un échantillon de taille 100. Déterminez l'intervalle de confiance correspondant.
4. Interprétez l'intervalle de confiance précédemment déterminé.
5. Modifiez le programme pour obtenir un échantillon de taille 1 000 et déterminez l'intervalle de confiance correspondant.
6. Répondez à la question initiale de cet exercice en précisant la marge d'erreur probabiliste de la valeur approchée trouvée.

Correction exercice 2

1. $x_A^2 = 1^2 = 1 = y_A$. Don A appartient à la courbe représentative de la fonction carré.
2. (a) Le premier « random.random() » donne aléatoirement l'ordonnée y (entre 0 et 1) d'un point M. Le second « random.random() » qui est élevé au carré correspond à l'abscisse x d'un point M.
   Le test effectué consiste donc à s'assurer que $y < x^2$. Si cela est vrai l'ordonnée y de M est plus petite que l'image de son abscisse par la fonction carré. Autrement dit dans ce cas le point est en dessous de la courbe représentative de la fonction carrée.
3. Déterminons l'intervalle de confiance.

   $n = 100 > 25$ la taille de l'échantillon est suffisante.

En lançant le programme nous avons obtenus 30 points sous la parabole. Par conséquent la fréquence d'obtention de ces points $f = \frac{30}{100} = 0{,}3$. Nous avons bien $0{,}2 \leqslant f \leqslant 0{,}8$.
Par conséquent l'intervalle de confiance au seuil de 95 % est

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\boxed{I = [0{,}2 ; 0{,}4].}$$

4. La proportion de l'aire sous la parabole par rapport à l'aire du carré a une probabilité de 0,95 d'être entre 0,2 et 0,4.
   Et puisque l'aire du carré est 1 cela signifie que

   l'aire sous la parabole est entre 0,2 et 0,4 avec une probabilité de 0,95.

5. Avec $n = 1000$ le programme m'indique que 366 sont sous la parabole donc : $f = 0{,}366$.

$$I \approx [0{,}334 ; 0{,}398]$$

6. L'aire sous la parabole est approximativement de 0,366 et est dans l'intervalle $[0{,}344 ; 0{,}398]$ avec une probabilité de 0,95.

III Calcul d'une valeur approchée de π.

Exercice 3

1. En considérant un cercle de rayon 1 et de centre O, l'origine d'un repère orthonormé, rédigez un algorithme en Python donnant une valeur approchée de l'aire de ce disque par la méthode de Monte-Carlo avec 100 000 points créés. Vous pourrez considérer un carré dans lequel le cercle est inscrit.
2. Déduisez-en une valeur approchée de π en précisant l'erreur commise du point de vu probabiliste (intervalle de confiance).

Correction exercice 3

1. Pour vérifier qu'un point $M(x,y)$ est dans le quart de disque il faut vérifier que : $OM = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1$.

```
import random
import math

def point():
  if math.sqrt(random.random()**2+random.random()**2)<=1:
    return(1)
  else:
    return(0)

n=0
dessous=0
while n<100000:
  dessous=dessous+point()
  n=n+1
print(dessous)
```

D'après le programme 78612 points sont dans le quart de disque. Donc la proportion de points dans un quart de disque est $f = \frac{78612}{100000} = 0{,}78612$.

L'aire du quart de disque est donc 0,78612. Par conséquent l'aire du disque est environ : 3,14448.

Donc $\pi \approx 3{,}14448$.