

Exponentielle.

Cette leçon est intéressante en elle-même. Il s'agit d'une exigence d'introduction construite, démontrée, de nouveaux outils mathématiques. Les techniques permettant de résoudre des exercices sont en fait peu nombreuses. C'est la construction de la leçon qui est intéressante.

I Équation différentielle.

Une *équation différentielle* est une équation dont l'inconnue est une fonction, notée souvent y , et qui fait intervenir certaines dérivées de cette fonction (y' , y'' , $y^{(3)}$, ...).

Vous retrouverez des dérivées d'ordre deux en terminale lors de l'étude de la convexité des courbes.

Il existe une grande variété d'équations différentielles.

Exemples.

1. Recherche des primitives de f (f étant une fonction donnée) : $y' = f$; $y' = 3x^2$, $y' = x^7$, $y' = \frac{1}{x}$, $y' = 0$, ...
2. Équations linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f$ (avec $a \in \mathbb{R}$, f fonction donnée). Vous étudierez ces équations en terminale en spécialité.
3. Équations linéaires du second ordre à coefficient constants : $\alpha y'' + by' + cy = f$, où a , b et c sont des constantes réelles et f une fonction donnée.
4. Équations non linéaires : $y' = a(x)y^\alpha + b(x)y$, $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$; $y' = \cos(y)$; où a , b et c sont des fonctions et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les équations différentielles sont un objet de recherche permanent. Il existe un très grand nombre d'équations différentielles que nous ne savons pas résoudre de façon algébrique et pour lesquelles nous devons rechercher des valeurs approchées numériques en général grâce aux ordinateurs.

Les super-calculateurs sont des ordinateurs extrêmement puissants développés par de grands groupes commerciaux pour résoudre ce genre d'équations.

Les équations différentielles sont un sujet de recherche très actif en mathématique.

L'un des problèmes du siècle récompensé par un prix de un million de dollars (le prix Clay) est un problème d'équation différentielle faisant intervenir des fonctions de plusieurs variables. Il s'agit de l'équation de Navier-Stokes qui décrit la mécanique des fluides.

Exercice 1.

Démontrez dans les cas suivants que la fonction f est une solution de l'équation différentielle proposée. *Vous ne vous préoccupez ni des ensembles de définition ni des ensembles de dérivabilité.*

1. La solution potentielle : $f(x) = \sqrt{\pi x + 3}$ et l'équation différentielle :

$$y'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi x + 3}}.$$

2. La solution potentielle : $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)$ et l'équation différentielle :

$$-\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 y'' = y.$$

3. La solution potentielle : $f(x) = \sqrt{x}$ et l'équation différentielle :

$$x^6 \sqrt{x} = \frac{1}{2}x^2 y' - 2xy.$$

Correction de l'exercice 1

Vérifions qu'en remplaçant y par f dans l'équation différentielle l'égalité est vérifiée.

1. L'équation différentielle fait intervenir y' nous devons donc trouver la dérivée de f .
 $f(x) = g(ax + b)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$, $a = \pi$ et $b = 3$, donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= ag'(ax + b) \\ &= \pi \frac{1}{2\sqrt{\pi x + 3}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{\pi x + 3}} \end{aligned}$$

Ainsi si $y = f$ on a bien $y'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi x + 3}}$.

f est bien solution de l'équation différentielle.

2. L'équation différentielle fait intervenir y'' nous devons donc trouver la dérivée seconde de f .
 $f(x) = g(ax + b)$ avec $g(x) = \cos(x)$, $a = \frac{2\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= ag'(ax + b) \\
 &= \frac{2\pi}{3} \left[-\sin\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &= -\frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

En procédant de même nous dérivons une seconde fois :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -\frac{2\pi}{3} \times \frac{2\pi}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Assurons nous que f est une solution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 f''(x) &= -\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 \times \left[-\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

On a bien $-\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 f'' = f$. Autrement dit

f est une solution de l'équation différentielle.

3. L'équation différentielle fait intervenir y' nous devons donc trouver la dérivée de f .
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}x^2 f'(x) - 2xf(x) &= \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x\sqrt{x} \\
 &= \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2x\sqrt{x} \times 4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} \\
 &= \frac{x^2 - 8x^2}{4\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{7}{4} \cdot \frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{7}{4}x\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

f n'est pas une solution de l'équation différentielle.

II Fonction exponentielle : définition.

Introduction avec l'idée de trouver la fonction qui complète le nuage de pont de la suite géométrique de terme initial 0 et de raison 2,7.

L'objet de ce chapitre est de définir une nouvelle fonction classique comme une solution d'une équation différentielle avec une condition supplémentaire. Cette fonction, lorsque nous aurons établi son existence, nous l'appellerons exponentielle.

1 Existence.

Théorème 1 - existence.

Il existe une fonction f dérivable sur \mathbb{R} qui est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = y$ et telle que $y(0) = 1$.

Démonstration

Nous ne ferons pas cette démonstration. Les démonstrations d'existence sont de deux sortes : soit on trouve une solution (et là tous les moyens sont bons, astuce, analogie, analyse-synthèse) soit on dispose d'un théorème qui nous garantit l'existence d'objets que nous ne pouvons pas trouver dans la pratique.

Il existe une façon de construire cette fonction en associant à chaque x la limite de la suite de terme général $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Les outils pour ce travail ne seront vus qu'en terminale.

On pourrait, à la façon d'Euler rechercher une solution sous forme polynomiale et voir apparaître l'expression qui fournit la définition classique moderne (mais non élémentaire) de la fonction exponentielle : $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$. Expression qui, pour vous, n'a pas vraiment de sens. ■

Remarques.

1. Nous retiendrons donc ces trois importantes propriétés de la fonction exponentielle que nous allons construire :
 - (i) Le domaine de définition de l'exponentielle est \mathbb{R} tout entier.

- (ii) Exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et égale sa dérivée.
 - (iii) L'image de 0 par exponentielle est 1.
2. En mathématique on pense à tester les solutions le plus simples. Si la fonction nulle est bien solution de (E) elle ne satisfait pas la condition $f(0) = 1$.

2 Unicité.

Lemme 1

Si f est une solution définie sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(E) : y' = y$ telle que $f(0) = 1$ alors f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

Démonstration

Rappelons que nous avons établi lors de la leçon sur les variations de fonctions que si $f' = 0$ alors f est constante.

Soit f une solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$.

Une grosse astuce amorce cette démonstration puisque nous introduisons une nouvelle fonction. Cette fonction nous permettra de faire apparaître une contradiction dans le raisonnement par l'absurde que nous allons utiliser.

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = f(x)f'(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 φ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x réel :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x)[-f'(-x)] \\ &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)\end{aligned}$$

Or f est solution de E , i.e. $f' = f$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Par conséquent φ est constante : il existe un nombre $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout x réel, $\varphi(x) = k$.

En particulier : $k = \varphi(0) = f(0)f(-0) = f(0)^2 = 1$.

Un petit raisonnement par l'absurde pour achever.

Si f s'annulait en $x_0 \in \mathbb{R}$ alors forcément $\varphi(x_0) = f(x_0)f(-x_0) = 0 \times f(-x_0) = 0$, ce qui est impossible puisque nous avons démontré que φ est constante égale à 1. Nous avons démontré en raisonnant par l'absurde que

f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .



Remarques.

1. La trame de cette démonstration sera reprise par la suite.
2. Nous avons démontré chemin faisant que si f est solution de (E) alors : $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Encore une propriété de celle que nous appellerons fonction exponentielle.
Remarquons encore que en français nous dirions « l'image de l'opposé est l'inverse de l'image ». Ceci est remarquable car opposé et inverse jouent le même rôle le premier pour l'addition et le second pour la multiplication.
3. En utilisant la continuité de la fonction f (*i.e* sa courbe représentative est d'un seul tenant, elle se trace sans soulever le stylo) nous pourrions démontrer en raisonnant par l'absurde que f ne change pas de signe. Puis comme $f(0) = 1$ que nécessairement $f > 0$.

Théorème 2 - unicité.

L'équation différentielle (E) : $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ admet une unique solution.

Démonstration

Nous savons l'existence d'une solution grâce au précédent théorème.

Pour démontrer l'unicité nous allons user d'une méthode classique : nous allons considérer deux solutions du problème et démontrer qu'elles sont forcément égales.

Soient f et g des solutions de (E) telles que $f(0) = g(0) = 1$.

Nous souhaitons démontrer que f et g sont égales Pour cela nous allons démontrer que $\frac{f}{g} = 1$. C'est donc presque naturellement que nous allons introduire une nouvelle fonction.

Soit $\varphi = \frac{f}{g}$ définition rendue possible par le lemme qui nous garantit que g ne s'annule pas puisque c'est une solution de (E) .

Nous voulons démontrer que $\varphi = 1$. Nous allons d'abord démontrer que φ est constante en établissant que sa dérivée est nulle.

φ est un quotient de fonctions dérivable sur \mathbb{R} et dont le dénominateur ne s'annule pas (d'après le lemme), donc φ est érivable sur \mathbb{R} et

$$\varphi' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Puisque $f' = f$ et $g' = g$:

$$\begin{aligned}\varphi' &= \frac{fg - fg}{g^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Par conséquent φ est constante : il existe un nombre $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout x réel, $\varphi(x) = k$.

En particulier : $k = \varphi(0) = f(0)f(-0) = f(0)^2 = 1$.

Nous avons démontré que : $\frac{f}{g} = 1$. Autrement dit $f = g$.

L'équation (E) admet une unique solution telle que $y(0) = 1$.

■

3 Définition.

Nous avons atteint l'objectif de ce chapitre démontrer l'existence d'une certaine fonction.

Définition 1

L'unique solution de l'équation différentielle (E) : $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ est appelée la fonction *exponentielle* et elle est notée \exp .

Remarques.

1. Expliquons pour quoi s'intéresser spécifiquement à cette solution de cette équation différentielle. Il s'agit d'une des plus simples équations différentielles. Comme souvent en mathématique, c'est à partir de cette solution au problème simple que nous allons trouver des solutions à des problème semblables mais plus complexes.
De la même façon que pour trouver la suite de Fibonacci (suite récurrente d'ordre deux) nous avons utiliser les suites géométriques.
2. Cette fonction revêt une importance considérable dans tous le domaines scientifiques. C'est une fonction qui sera ajoutée à votre bestiaire de fonctions classiques, au même titre que les fonctions affines, les fonction trinômes, les fonctions polynomiales, les fonctions trigonométriques, les fonctions inverse, carrée, racine carrée, valeur absolue et cube.

Proposition 1 - propriétés de la fonction exponentielle.

- (i) Exponentielle est définie et dérivable sur \mathbb{R} et : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$.
 (ii) $\exp(0) = 1$.

Démonstration

Découle directement de la définition de la fonction exponentielle. ■

III Propriétés algébriques.

1 Propriété fondamentale.

Théorème 3 - propriété fondamentale.

Pour tous réels a et b :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b).$$

Démonstration

Nous allons utiliser la même méthode de dérivation d'une fonction astucieusement choisie. Nous avons deux variables dans cette expression, a et b , c'est une de trop pour nous, pour définir une fonction. Qu'à cela ne tienne, fixons-en une et laissons l'autre varier.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Notons φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$. φ est bien définie car $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après le lemme.

Nous savons que, normalement, si le résultat que nous souhaitons démontrer est vrai, φ devrait être une fonction constante, ce que nous allons maintenant démontrer.

φ est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas donc elle est même dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x réel :

$$\varphi'(x) = \frac{1 \times \exp'(a+x) \exp(x) - \exp'(a+x) \exp'(x)}{[\exp(x)]^2},$$

en reconnaissant une fonction composée et puisque $\exp' = \exp$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\exp(a+x) \exp(x) - \exp(a+x) \exp(x)}{[\exp(x)]^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\varpi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En particulier : $k = \varphi(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(0)} = \exp(a)$ puisque $\exp(0) = 1$.

Nous avons démontré que $\varphi(x) = \exp(a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Autrement dit :

$$\text{quelque soit } a \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \frac{\exp(a+x)}{\exp(x)} = \exp(a).$$

■

Proposition 2

Soient a et b des réels et n un entier.

$$(i) \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

$$(ii) \exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}.$$

$$(iii) \exp(a) > 0.$$

$$(iv) \exp\left(\frac{1}{2}a\right) = \sqrt{\exp(a)}.$$

$$(v) \exp(na) = [\exp(a)]^n.$$

Démonstration

(i) D'après le théorème précédent :

$$\exp(a - b) \exp(b) = \exp[(a - b) + b]$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \exp(a - b) \exp(b) &= \exp(a) \\ \frac{\exp(a - b) \exp(b)}{\exp(b)} &= \frac{\exp(a)}{\exp(b)}, \quad \text{car } \exp(b) > 0 \end{aligned}$$

$$\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

(ii) En utilisant le (i) avec $a = 0$.

(iii) Nous allons montrer que $\exp(a)$ est un nombre au carré.

$$\exp(a) = \exp\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\right)$$

D'après le précédent théorème :

$$\begin{aligned} &= \exp\left(\frac{1}{2}a\right)\exp\left(\frac{1}{2}a\right) \\ &= \left[\exp\left(\frac{1}{2}a\right)\right]^2 \end{aligned}$$

Donc $\exp(a) \geq 0$.

Comme de plus, d'après le lemme l'exponentielle ne s'annule pas :

$$\exp(a) > 0.$$

(iv) En reprenant la démonstration du (iii), nous avons

$$\left[\exp\left(\frac{1}{2}a\right)\right]^2 = \exp(a)$$

Donc :

$$\exp\left(\frac{1}{2}a\right) = \sqrt{\exp(a)} \text{ ou } \exp\left(\frac{1}{2}a\right) = -\sqrt{\exp(a)}$$

Et puisque $\exp(a) > 0$ d'après (iii) :

$$\exp\left(\frac{1}{2}a\right) = \sqrt{\exp(a)}.$$

(v) Le vrai procédé de démonstration de cette assertion est la démonstration par récurrence qui est au programme de terminale. Nous en donnons une version intuitive.

Raisonnons par disjonction des cas.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ fois}}$$

Donc en itérant le résultat du précédent théorème :

$$\exp(na) = \underbrace{\exp(a) \exp(a) \dots \exp(a)}_{n \text{ hhhhhhhhhfois}}$$

Enfin :

$$\exp(na) = [\exp(a)]^n.$$

* Soit maintenant $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$ alors

$$\begin{aligned} \exp(na) &= \frac{1}{\exp(-na)} \\ &= \frac{1}{[\exp(a)]^{-n}} \\ &= [\exp(a)]^n \end{aligned}$$

Dans tous les cas :

$$\exp(na) = [\exp(a)]^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$



Remarques.

1. Le théorème précédent peut se comprendre comme le fait que l'exponentielle transforme la somme en produit. On dit qu'exponentielle est un morphisme du groupe additif \mathbb{R} dans le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* .
2. Le (iii) signifie que la fonction exponentielle est strictement positive. Ce qui va nous permettre de trouver son tableau de variation...
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après (v) $(\exp(na))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de terme initial 1 et de raison $\exp(a)$.

Exercice 2.

Exercices 11 et 12 page 174 du manuel Indice.

2 Notation exponentielle.

Nous avons vu que $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$.

Par conséquent si nous notons $\mathbf{e} = \exp(1)$ nous pouvons écrire : $\exp(n) = \mathbf{e}^n$.

Parce que les propriétés algébriques d'exponentielle sont semblables à celles des exposant nous généraliserons cette notation en écrivant pour tout réel x : $\exp(x) = \mathbf{e}^x$.

Plutôt que la précédente proposition il faudra retenir :

(i) $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.

(ii) $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$.

(iii) $e^a > 0$.

(iv) $e^{\frac{1}{2}a} = \sqrt{e^a}$.

(v) $e^{na} = [e^a]^n$.

Nous n'utiliserons plus que la notation exponentielle sauf si l'expression en exposant est trop grosse : nous n'écrivons pas $e^{\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x^3+\frac{1}{x}}}$ mais $\exp\left(\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x^3+\frac{1}{x}}\right)$.

De même on préférera \exp lorsqu'il s'agira d'indiquer la dérivée. $e^{x'}$ est la dérivée d'une nombre et vaut donc 0. Par contre nous écrivons \exp' . Mais cette dernière écriture sera très rare puisque $\exp'(x) = \exp(x)$.

Remarquons qu'à ce stade de la leçon nous ne connaissons aucune image par \exp hormis $e(0) = 1$.

La notation e est un hommage au très très grand mathématicien Euler.

Exercice 3.

Exercices 13 à 21 page 174 du manuel Indice.

Correction de l'exercice 3

Exercice 13 page 174.

(a) e^{-4} .

(b) e^{-6} .

(c) e^3 .

(d) e^0 .

Exercice 14 page 174.

(a) e^{-1} .

(b) e^1 .

(c) e^{-2} .

(d) e^3 .

Exercice 15 page 174.

(a) e^{-5} .

- (b) e^2 .
- (c) e^{-3} .
- (d) e^{-6} .

Exercice 16 page 174.

- (a) e^6 .
- (b) e^6 .
- (c) e^{-6} .
- (d) e^{-2} .

Exercice 17 page 174.

- (a) e^{x+5} .
- (b) e^{-x+2} .
- (c) e^{-2x-1} .

Exercice 18 page 174.

- (a) e^{2x} .
- (b) e^0 .
- (c) e^{-2x} .

Exercice 19 page 174.

- (a) e^{4x} .
- (b) e^{-2x} .
- (c) e^{-2x+2} .

Exercice 20 page 174.

- (a) $e^{x-0,1}$.
- (b) $e^{0,9x}$.
- (c) e^{x+2} .

Exercice 21 page 174.

- (a)

$$\begin{aligned} e^{-0,053(t+13)} &= e^{-0,053t-0,053 \times 13} \\ &= e^{-0,053t-0,689} \\ &= e^{-0,053t} e^{-0,689} \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \frac{A(t+13)}{A(t)} &= \frac{2500e^{-0,053(t+13)}}{2500e^{-0,053t}} \\ &= \frac{e^{-0,053t} e^{-0,689}}{e^{-0,053t}} \\ &= e^{-0,689} \end{aligned}$$

(c)

Exercice 4.

Exercices 43 à 57 page page 176 du manuel Indice.

Exercice 5.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Simplifiez les expression suivantes.

$$A = \frac{e^{2x}}{e^{3x}}.$$

$$B = e^x (1 + 2e^{-x}).$$

$$C = \frac{e^{x+2}}{e^{x+1}}.$$

$$D = (e^x + e^{-x})^2.$$

$$E = \frac{e^{2x-1}}{(e^x)^2}.$$

$$F = e^{2x} \times e^{-2x}.$$

$$G = e^{2x+1} \times e^{1-x}.$$

$$H = \frac{e^{x+2}}{e^{-x+2}}.$$

$$I = e^{2x+1} \times e^{1-x}.$$

$$J = \frac{e^{3x} + e^x}{e^{2x} + 1}.$$

$$K = \frac{(e^2)^5}{e^9}.$$

$$L = \sqrt{e^2} \times \frac{1}{e^{-2}}.$$

$$M = \frac{1}{1+e} - \frac{e^{-1}}{1+e^{-1}}.$$

$$N = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2.$$

$$P = \frac{1+e^{2x}}{1-e^x} + \frac{e^{-x}+e^x}{1-e^{-x}}.$$

$$Q = (e^x + 1)^2 - \sqrt{e^{4x}} - 1.$$

Exercice 6.

Déterminez si les égalités suivantes sont vraies ou fausses.

$$1. e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{e^x}.$$

$$2. \sqrt{e^{x^2}} = e^x.$$

$$3. \sqrt{e^{2x}} = e^x.$$

$$4. \left(\frac{1}{e^{-\frac{x}{2}}}\right)^2 = e^x.$$

$$5. e^{-2x} = \frac{1}{(e^x)^2}.$$

$$6. e^{1-x} = \frac{e}{e^x}.$$

$$7. e^x + e^x = 2e^x.$$

$$8. \left(\frac{1}{e^x}\right)^3 = e^{-3x}.$$

$$9. e^{x-1} \times e^{1-x} = 1.$$

$$10. \frac{(e^x)^2}{e} = e^{2x-1}.$$

$$11. \frac{e^{3x}}{e^x} = e^3.$$

IV Fonction exponentielle : variation et signe.

1 Généralités.

Les questions que nous pouvons nous poser sur cette fonction : signe, variation, parité, périodicité, maximum, minimum, ...

Proposition 3

La fonction exponentielle est définie, dérivable, strictement positive, strictement croissante sur \mathbb{R} .

Démonstration

La seule chose que nous n'ayons pas établi est la stricte croissance. $\exp' = \exp$ et $\exp > 0$, donc \exp est strictement croissante.



Exemples.

Exemples.

1. Étudions les variations de $f : x \mapsto e^x + x$.
2. Étudions les variations de $g : x \mapsto e^{-2x+1}$.

Exercice 7.

Exercices 29 à 42 page 175 du manuel Indice. Fonctions avec exponentielle.

Exercice 8.

Exercices 58 à 67 page 176 du manuel Indice. Étudier le signe d'expressions algébriques.

Exercice 9.

Exercices 87 à 108 pages 178 et 179 du manuel Indice. Fonctions avec exponentielle.

2 Équations et inéquations faisant intervenir l'exponentielle.

Théorème 4

Soient x et y deux réels.

$$(i) e^x = e^y \Leftrightarrow x = y.$$

$$(ii) e^x < e^y \Leftrightarrow x < y.$$

Démonstration

Découle de la stricte croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} . ■

Exemples.

Exemples.

1. Résolvons $e^{-2x+1} = 1$.

2. Résolvons $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} = e^{x^2-1}$.

3. Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $e^{3x-4} = e^{-6}$.

$$\begin{aligned} e^{3x^2-4} = e^{-6} &\Leftrightarrow 3x^2 - 4 = -6 \\ &\Leftrightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 10.

Exercices 22 à 28 page 175 du manuel Indice.

Exercice 11.

Exercices 68 à 80 page 177 du manuel Indice.

Exercice 12. - convexité de l'exponentielle.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction exponentielle et \mathcal{T}_a la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse a . Montrer que \mathcal{C} est au-dessus de \mathcal{T}_a .

V Construction de la courbe représentative de l'exponentielle par la méthode d'Euler.

La problématique est la suivante : nous ne connaissons pour l'instant (dans cette leçon) aucun moyen de calculer des images par exponentielle, nous ne connaissons pas même la valeur de e . Bien sûr, votre calculatrice donne des valeurs approchées, mais notre objectif est précisément de savoir quelles instructions lui ont été données pour y parvenir.

1 Méthode d'Euler : point de vue géométrique.

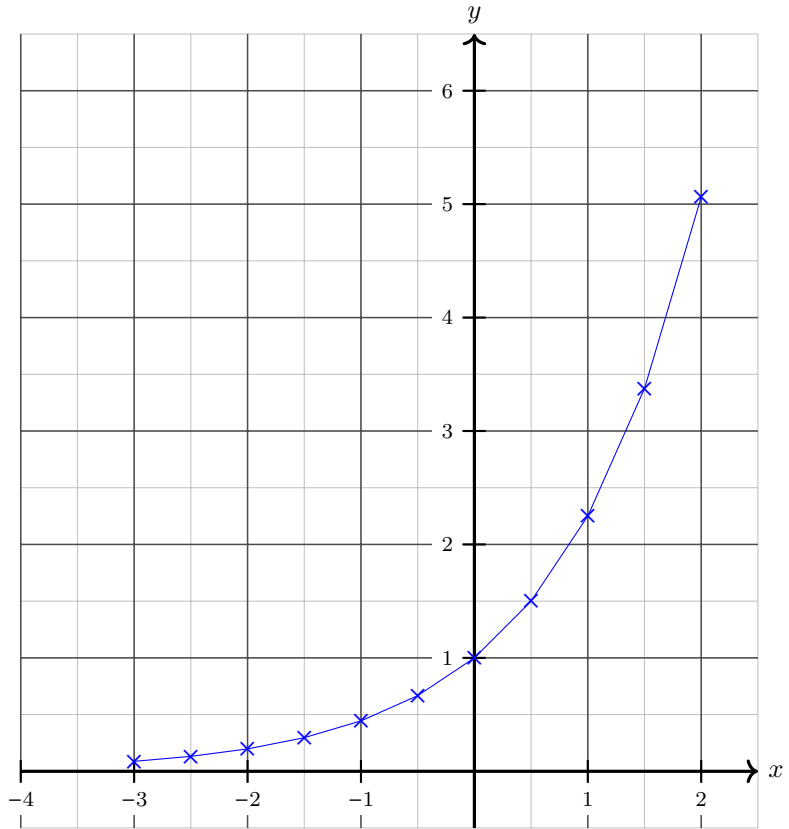
L'idée, pour obtenir à peu près la courbe représentative de la fonction exponentielle, est de dire que, localement, la courbe représentative se confond avec la tangente. Nous pouvons dire que la tangente est une approximation de la courbe représentative.

Pour l'instant les informations pertinentes concernant la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction exponentielle dont nous disposons :

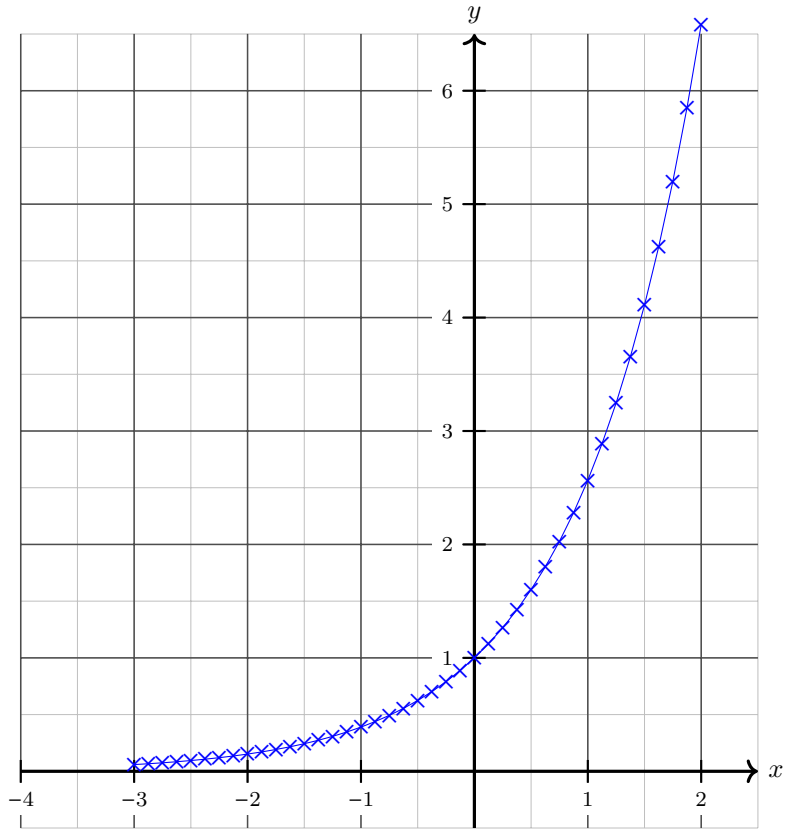
- \exp est définie sur \mathbb{R} .
- Hors programme : \exp est dérivable donc elle est continue. Par conséquent sa courbe représentative est d'un seul tenant, d'un seul trait.
- $\exp > 0$ donc sa courbe représentative est toute entière au-dessus de l'axe des abscisses.
- \exp est strictement croissante. Donc la courbe représentative monte constamment.
- $\exp(0) = 1$ donc la courbe représentative passe par le point de coordonnées $M(0; 1)$.

Tracer des tangentes à main levée avec un pas de 1 en commençant par placer M_0 puis détermination de la tangente, puis détermination du nouveau point $M_1(1; 2)$ et donc nouvelle image $\exp(1) \approx 2$.

Exponentielle.



Exponentielle.



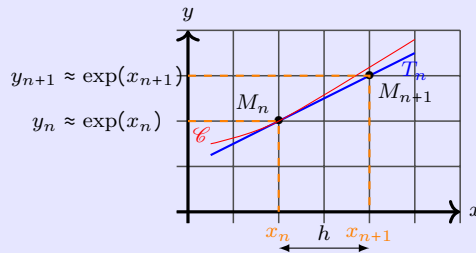
Exercice 13.

Exemple 2 page 176 belin spécialité lieme 2019.

Nous souhaitons construire une suite $M_n(x_n; y_n)$ de points à peu près sur la courbe représentative de la fonction exponentielle.

On fixe le pas $h = 0,1$ qui est la distance séparant les abscisses des points que nous allons construire. On pose $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et pour tout n entier naturel, $x_{n+1} = x_n + h$.

Expliquons comment, à partir d'un point M_n qui est (à peu près) sur la courbe représentative de \mathcal{C} de \exp obtenir le point suivant.



La tangente T_n au point d'abscisse x_n a pour équation $y = \exp'(x_n)(x - x_n) + \exp(x_n)$.
Or $\exp' = \exp$ donc

$$T_n : y = \exp(x_n)(x - x_n) + \exp(x_n).$$

De plus, $M_n(x_n; y_n)$ appartenant à \mathcal{C} nous avons $y_n = \exp(x_n)$ et donc

$$T_n : y = y_n(x - x_n) + y_n.$$

Puisque T_n est presque confondue avec \mathcal{C} nous pouvons dire que M_{n+1} sera le point de T_n d'abscisse x_{n+1} . En utilisant l'équation de la tangente :

$$y_{n+1} = y_n(x_{n+1} - x_n) + y_n.$$

Et donc, comme $x_{n+1} - x_n = h$,

$$y_{n+1} = y_n h + y_n.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$$x_{n+1} = x_n + h \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n(1 + h).$$

1. Sans justification précisez la nature des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Avec un tableur on obtient :

	A	B	C	D
1	x	0	0,1	0,2
2	y	1	1,1	1,21

- (a) Quelles formules ont été rentrées en C1 et C2 et recopiées vers la droite ?
- (b) Retranscrivez le précédent tableau dans une feuille de calcul puis recopiez vers la droite les formules entrées en C1 et C2.
- (c) Affichez dans le tableur la représentation graphique de ce nuage de points.

Exercice 9.

(Suite)

3. Nous allons faire un programme en Python qui fera le même travail que le tableur. Nous allons avoir besoin d'un nouveau type de variable appelé une *liste*. Une liste, comme en mathématique, est une suite mais finie indexée à partir de 0.

Par exemple l'instruction $L = [23, 2.5, 4]$ crée la liste appelée L formé des trois éléments 23, 2.5 et 4 (dans cet ordre). Il est possible d'appeler chaque élément de la liste : $L[0]$ vaut 23, $L[1]$ vaut 2.5 et $L[2]$ vaut 4.

Il est possible de rassembler deux listes par l'opérateur de concaténation qui est le plus $[2, a] + [7]$ donnera la liste $[2, a, 7]$.

- (a) Indiquez ce qu'il faut ajouter à ce programme pour qu'il affiche les points M_n reliés par des segments.

```
import numpy
import matplotlib.pyplot

def abscisses():
    x=0
    xn=[]
    k=0
    while k<11:
        xn=xn+[x]
        k=.....
        x=.....
    return(xn)

def ordonnees():
    y=1
    yn=[]
    k=0
    while k<11:
        yn=yn+[y]
        k=.....
        y=.....
    return(yn)

matplotlib.pyplot.plot(abscisses(),
                        ordonnees())
matplotlib.pyplot.show()
```

- (b) Exécutez le précédent programme avec Python.
- (c) Proposez un programme Python qui trace les points M_n reliés par des segments, pour un pas $h = \frac{1}{10^m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

Correction de l'exercice 9

1. D'après les formules de récurrences (h est une valeur fixe)

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme $x_0 = 0$ et de raison $r = h$.
 $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $y_0 = 1$ et de raison
 $q = 1 + h$.

2. (a) En C1 :

$$= B1 + 0,1.$$

En C2 :

$$= B2 * (1 + 0,1).$$

- (b) Voir ce [fichier excell](#)
 (c) Voyez le précédent fichier.
3. (a)

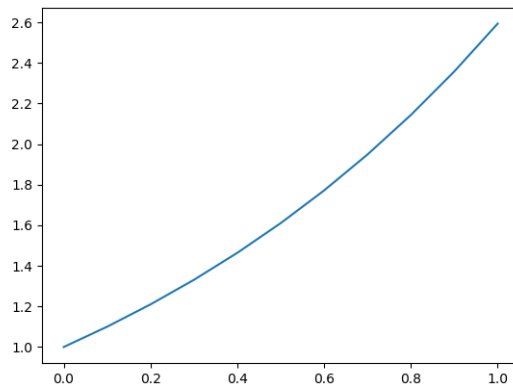
```
import numpy
import matplotlib.pyplot

def abscisses():
    x=0
    xn=[]
    k=0
    while k<11:
        xn=xn+[x]
        k=k+1
        x=x+0.1
    return(xn)

def ordonnees():
    y=1
    yn=[]
    k=0
    while k<11:
        yn=yn+[y]
        k=k+1
        y=y*(1+0.1)
    return(yn)

matplotlib.pyplot.plot(abscisses(),ordonnees())
matplotlib.pyplot.show()
```

(b) Nous obtenons le graphique :



(c) Par exemple pour $m = 4$, et donc $h = 10^{-4}$:

```
import numpy
import matplotlib.pyplot

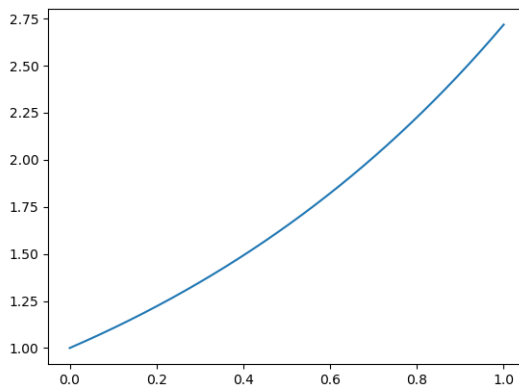
m=4

def abscisses():
    x=0
    xn=[]
    k=0
    while k<10**m+1:
        xn=xn+[x]
        k=k+1
        x=x+10**(-m)
    return(xn)

def ordonnees():
    y=1
    yn=[]
    k=0
    while k<10**m+1:
        yn=yn+[y]
        k=k+1
        y=y*(1+10**(-m))
    return(yn)

matplotlib.pyplot.plot(abscisses(),ordonnees())
matplotlib.pyplot.show()
```

Ce qui renvoie



Exercice 10.

Exercices 81 à 86 pages 177 et 178 du manuel Indice.

2 Valeur approchée de e.

Lors de l'exercice précédent nous avons obtenu une valeur approchée de e lorsque pour un pas de $\frac{1}{10}$ nous calculons y_{10} .

Pour obtenir une valeur plus précise de e il suffit de prendre un pas plus petit : pour un pas de $\frac{1}{10^3}$, y_{10^3} est une valeur approchée plus fine de e.

En généralisant nous voyons que e est la limite de la suite de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

VI Fonctions hyperboliques.

Exercice 11.

On définit sur \mathbb{R} les deux fonctions \cosh (lisez « cosinus hyperbolique ») et \sinh (lisez « sinus hyperbolique ») par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrez que \cosh est une fonction paire et \sinh une fonction impaire.
2. Montrez que \cosh et \sinh sont dérivables sur \mathbb{R} et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \quad \text{et} \quad \sinh'(x) = \cosh(x).$$

3. Dressez le tableau de variation des fonctions \sinh puis \cosh .
4. Établissez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
5. Montrez que pour tous réels a et b on a les égalités

$$\cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b),$$

$$\sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b).$$

6. Montrez que \cosh et \sinh vérifient l'équation différentielle $y'' = y$.

Correction de l'exercice 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cosh(-x) &= \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \\ &= \cosh(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sinh(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} \\ &= -\frac{e^{-x} + e^x}{2} \\ &= -\sinh(x) \end{aligned}$$

\cosh (resp. \sinh) est paire (resp. impaire).

2. \cos (resp. \sinh) est une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur \mathbb{R} donc est dérivable sur \mathbb{R} .

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cosh'(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \sinh(x)\end{aligned}$$

et


$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ &= \cosh(x)\end{aligned}$$

$$\cosh' = \sinh \text{ et } \sinh' = \cosh.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cosh(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \\ &\Leftrightarrow e^x > -e^{-x}\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est toujours vraie puisqu'exponentielle est à valeurs strictement positives donc

x	$-\infty$	$+\infty$
\cosh	+	
\sinh		

Merci à M. Maillot.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}) \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

5. Soient a et b des réels.

$$\begin{aligned} & \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b) \\ &= \frac{1}{4} (e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + \frac{1}{4} (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-a-b}) + \frac{1}{4} (e^{a+b} - e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{a+b} + e^{-a-b}) \\ &= \cosh(a + b) \end{aligned}$$

Quelques soient a et b des réels :

$$\cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b).$$

Soient a et b des réels.

$$\begin{aligned} & \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b) \\ &= \frac{1}{4} (e^a - e^{-a})(e^b + e^{-b}) + \frac{1}{4} (e^a + e^{-a})(e^b - e^{-b}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-a-b}) + \frac{1}{4} (e^{a+b} - e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-a-b}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{a+b} - e^{-a-b}) \\ &= \sinh(a + b) \end{aligned}$$

Quelques soient a et b des réels :

$$\sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b).$$

6. Nous savons que : $\cosh' = \sinh$ et $\sinh' = \cosh$ donc

$$\begin{aligned} \cosh'' &= (\sinh)' \\ &= \sinh' \\ &= \cosh \end{aligned}$$

Donc $\cosh'' = \cosh$, *i.e.* \cosh est solution de l'équation différentielle $y'' = y$.

VII Exercices.

Exercice 12.

Résolvez dans \mathbb{R} : $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} = e^{x^2-1}$.

Correction de l'exercice 12

Résolvons l'inéquation $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} = e^{x^2-1}$ (1) dans \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} = e^{x^2-1} \\
 &\Leftrightarrow e^{2x+1} e^{-(x-4)} = e^{x^2-1} \\
 &\Leftrightarrow e^{2x+1-(x-4)} = e^{x^2-1} \\
 &\Leftrightarrow e^{x+5} = e^{x^2-1} \\
 &\Leftrightarrow x+5 = x^2-1 \\
 &\Leftrightarrow x^2-x-6 = 0
 \end{aligned}$$

$g : x \mapsto x^2 - x - 6$ est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -6$.

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) \\
 &= 25
 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc g admet deux racines distinctes :

$$\begin{array}{l|l}
 x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} & = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} \\
 = -2 & = 3
 \end{array}$$

Donc

$$(1) \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

L'ensemble des solutions de (1) est $\mathcal{S} = \{-2; 3\}$.

Exercice 13.

Résolvez dans \mathbb{R} l'inéquation $\frac{e^{2x+1}}{(e^x)^3} \geq 0$.

Correction de l'exercice 13

L'exponentielle est toujours strictement positive donc $e^{2x+1} > 0$ et $(e^x)^3 > 0$ pour tout x réel.

l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

Exercice 14.

lieme hachette barbazo spe 2019 47 page 199

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 - 2,5x + 1)e^x$ pour tout x réel.

1. (a) Calculez f' .
(b) Étudiez le signe de f' et déduisez-en les variations de f .
2. La tangente à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse -1 recoupe la courbe \mathcal{C}_f au point M . Déterminez à la calculatrice une valeur approchée de l'abscisse de M .
3. Déterminez une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point B d'abscisse 0 .
4. Complétez la fonction Python ci-dessous afin qu'elle permette d'approcher, au dixième près par excès, l'abscisse du point P intersection de la tangente \mathcal{T} et de \mathcal{C}_f .

```

from math import
exp
def intersect():
    x=0
    y=1
    z=1
    while y>=z:
        x=.....
        y=-1.5*x+1
        z=.....
    return(.....)

```

Correction de l'exercice 14

1. Calculons f' .

f est un produit de fonctions dérivables donc est dérivable sur \mathbb{R} . En effet $f = uv$ avec

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - 2,5x + 1 \\ v(x) = e^x \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x - 2,5 \\ v'(x) = e^x \end{cases} .$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Puisque $f' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 2,5) e^x + (x^2 - 2,5x + 1) e^x \\ &= (2x - 2,5 + x^2 - 2,5x + 1) e^x \\ &= (x^2 - 0,5x - 1,5) e^x \end{aligned}$$

$$f'(x) = (x^2 - 0,5x - 1,5) e^x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2. Étudions le signe de f' et les variations de f .

f' est un produit nous allons donc étudier le signe de chacun de ses facteurs.

* $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

* Notons $g(x) = x^2 - 0,5x - 1,5$ pour tout x réel.

g est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 1$, $b = -0,5$ et $c = -1,5$.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-0,5)^2 - 4 \times 1 \times (-1,5) \\ &= 6,25 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc g admet deux racines distinctes :

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-(-0,5) - \sqrt{6,25}}{2 \times 1} \\ = -1 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-(-0,5) + \sqrt{6,25}}{2 \times 1} \\ = 1,5 \end{array} \right.$$

Enfin g , étant une fonction polynomiale de degré deux, elle est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses racines :

x	$-\infty$	-1	$1,5$	$+\infty$	
g	+	0	-	0	+

Enfin :

x	$-\infty$	-1	$1,5$	$+\infty$
e^x	+	+	+	+
$x^2 - 5x + 1$	+	0	-	+
f'	+	0	-	+
f	$f(-1)$ $f(1,5)$ 			

3. D'après la question précédente : $f'(-1) = 0$, donc la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse -1 est horizontale le nombre dérivé représentant le coefficient directeur de la tangente.

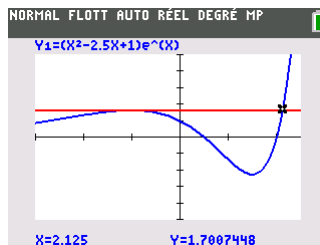
Avec la calculatrice :

```

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP  |  NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
Graph1 Graph2 Graph3             |  FENÊTRE
█ Y1=(X^2-2.5X+1)e^X              |  Xmin=-3
█ Y2=Y1(-1)                       |  Xmax=2.5
█ Y3=                               |  Xgrad=1
█ Y4=                               |  Ymin=-5
█ Y5=                               |  Ymax=5
█ Y6=                               |  Ygrad=1
█ Y7=                               |  Xrés=1
█ Y8=                               |  ΔX=0.020833333333333
                                     |  PasTrace=0.041666666666666...

```

Puis en appuyant sur trace à partir du graphique :



$$x_M \approx 2,125.$$

4. Déterminons une équation de \mathcal{T} .

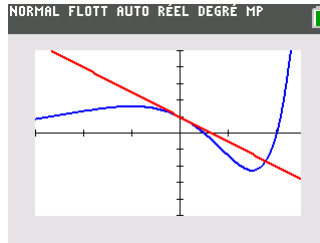
Puisque \mathcal{T} est tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 une équation de \mathcal{T} est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1,5$ donc

$$\mathcal{T} : y = 1,5x + 1.$$

5. Graphiquement voici la situation :



Ainsi, en partant de $x = 0$ et en augmentant x de 0,1 en 0,1 nous finirons par obtenir une valeur de x à partir de laquelle la courbe représentative de f passe au dessus de la tangente.

```

from math import exp
def intersect():
    x=0
    y=1
    z=1
    while y >= z:
        x=x+0.1
        y=-1.5*x+1
        z=(x**2-2.5*x+1)*exp(x)
    return(x)

```

La fonction `intersect()` renvoie 1,8 ce qui s'interprète en disant que l'abscisse du point d'intersection de \mathcal{T} et \mathcal{C}_f est entre 1,7 et 1,8.