Exponentielle.

I Équation différentielle.

Une *équation différentielle* est une équation dont l'inconnue est une fonction, notée souvent y, et qui fait intervenir certaines dérivées de cette fonction (y', y'', $y^{(3)}$, ...).

Il existe une grande variété d'équations différentielles.

Les équations différentielles sont un objet de recherche permanent. Il existe un très grand nombre d'équations différentielles que nous ne savons pas résoudre de façon algébrique et pour lesquelles nous devons rechercher des valeurs approchées numériques en général grâce aux ordinateurs.

Les super-calculateurs sont des ordinateurs extrêmement puissants développés par de grands groupes commerciaux pour résoudre ce genre d'équations.

Les équations différentielles sont un sujet de recherche très actif en mathématique.

L'un des problème du siècle récompensé par un prix de un million de dollars (le prix Clay) est un problème d'équation différentielle faisant intervenir des fonctions de plusieurs variables. Il s'agit de l'équations de Navier-Stockes qui décrit la mécanique des fluides.

Exercice 1.

Démontrez dans les cas suivants que la fonction f est une solution de l'équation différentielle proposée. *Vous ne vous préoccuperez ni des ensembles de définition ni des ensembles de dérivabilité.*

1. La solution potentielle : $f(x) = \sqrt{\pi x + 3}$ et l'équation différentielle :
$$y'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi x + 3}}.$$
2. La solution potentielle : $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)$ et l'équation différentielle :
$$-\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 y'' = y.$$
3. La solution potentielle : $f(x) = \sqrt{x}$ et l'équation différentielle :
$$x^6\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^2y' - 2xy.$$

II Fonction exponentielle : définition.

L'objet de ce chapitre est de définir une nouvelle fonction classique comme une solution d'une équation différentielle avec une condition supplémentaire. Cette fonction, lorsque nous aurons établi son existence, nous l'appellerons exponentielle.

1 Existence.

Théorème 1 - existence.

Il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est solution de l'équation différentielle $(E) : \; y' = y$ et telle que $y(0) = 1$.

Remarques.

1. Nous retiendrons donc ces trois importantes propriétés de la fonction exponentielle que nous allons construire :
   (i) Le domaine de définition de exponentielle est $\mathbb{R}$ tout entier.
   (ii) Exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale sa dérivée.
   (iii) L'image de 0 par exponentielle est 1.
2. En mathématique on pense à tester les solutions le plus simples. Si la fonction nulle est bien solution de (E) elle ne satisfait pas la condition $f(0) = 1$.

2 Unicité.

Lemme 1

Si f est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : \; y' = y$ telle que $f(0) = 1$ alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

1. La trame de cette démonstration sera reprise par la suite.
2. Nous avons démontré chemin faisant que si f est solution de (E) alors : $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Encore une propriété de celle que nous appellerons fonction exponentielle.
3. En utilisant la continuité de la fonction f ($i.e$ sa courbe représentative est d'un seul tenant, elle se trace sans soulever le stylo) nous pourrions démontrer en raisonnant par l'absurde que f ne change pas de signe. Puis comme $f(0) = 1$ que nécessairement $f > 0$.

Théorème 2 - unicité.

L'équation différentielle (E) : $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ admet une unique solution.

3 Définition.

Définition 1

L'unique solution de l'équation différentielle (E) : $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ est appelée la fonction *exponentielle* et elle est notée exp.

Remarques.

1. Expliquons pour quoi s'intéresser spécifiquement à cette solution de cette équation différentielle. Il s'agit d'une des plus simples équations différentielles. Comme souvent en mathématique, c'est à partir de cette solution au problème simple que nous allons trouver des solutions à des problème semblables mais plus complexes.

   De la même façon que pour trouver la suite de Fibonacci (suite récurrente d'ordre deux) nous avons utiliser les suites géométriques.
2. Cette fonction revêt une importance considérable dans tous le domaines scientifiques. C'est une fonction qui sera ajoutée à votre bestiaire de fonctions classiques, au même titre que les fonctions affines, les fonction trinômes, les fonctions polynomiales, les fonctions trigonométriques, les fonctions inverse, carrée, racine carrée, valeur absolue et cube.

Proposition 1 - propriétés de la fonction exponentielle.

(i) Exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$.

(ii) $\exp(0) = 1$.

III Propriétés algébriques.

1 Propriété fondamentale.

Théorème 3 - propriété fondamentale.

Pour tous réels a et b :

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

Proposition 2

Soient a et b des réels et n un entier.

(i) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

(ii) $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$.

(iii) $\exp(a) > 0$.

(iv) $\exp\left(\dfrac{1}{2}a\right) = \sqrt{\exp(a)}$.

(v) $\exp(na) = [\exp(a)]^n$.

Remarques.

1. Le théorème précédent peut se comprendre comme le fait que l'exponentielle transforme la somme en produit. On dit qu'exponentielle est un morphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$.
2. Le (iii) signifie que la fonction exponentielle est strictement positive. Ce qui va nous permettre de trouver son tableau de variation...
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après (v) $(\exp(na))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de terme initial 1 et de raison $\exp(a)$.

Exercice 2.

Exercices 11 et 12 page 174 du manuel Indice.

2 Notation exponentielle.

Nous avons vu que $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(a)]^n$.

Par conséquent si nous notons $\mathrm{e} = \exp(1)$ nous pouvons écrire : $\exp(n) = \mathrm{e}^n$.

Parce que les propriétés algébriques d'exponentielle sont semblables à celles des exposant nous généraliserons cette notation en écrivant pour tout réel x : $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Plutôt que la précédente proposition il faudra retenir :

(i) $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.

(ii) $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$.

(iii) $e^a > 0$.

(iv) $e^{\frac{1}{2}a} = \sqrt{e^a}$.

(v) $e^{na} = \left[e^a\right]^n$.

Nous n'utiliserons plus que la notation exponentielle sauf si l'expression en exposant est trop grosse : nous n'écrirons pas $e^{\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x^3+\frac{1}{x}}}$ mais $\exp\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x^3+\frac{1}{x}}\right)$.

Remarquons qu'à ce stade de la leçon nous ne connaissons aucune image par exp hormis $e^0 = 1$.

La notation e est un hommage au très très grand mathématicien Euler.

Exercice 3.

Exercices 13 à 21 page 174 du manuel Indice.

Exercice 4.

Exercices 43 à 57 page page 176 du manuel Indice.

Exercice 5.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Simplifiez les expression suivantes.

$A = \dfrac{e^{2x}}{e^{3x}}$.

$B = e^x\left(1 + 2e^{-x}\right)$.

$C = \dfrac{e^{x+2}}{e^{x+1}}$.

$D = \left(e^x + e^{-x}\right)^2$.

$E = \dfrac{e^{2x-1}}{\left(e^x\right)^2}$.

$F = e^{2x} \times e^{-2x}$.

$G = e^{2x+1} \times e^{1-x}$.

$H = \dfrac{e^{x+2}}{e^{-x+2}}$.

$I = e^{2x+1} \times e^{1-x}$.

$J = \dfrac{e^{3x} + e^x}{e^{2x} + 1}$.

$K = \dfrac{\left(e^2\right)^5}{e^9}$.

$L = \sqrt{e^2} \times \dfrac{1}{e^{-2}}$.

$M = \dfrac{1}{1+e} - \dfrac{e^{-1}}{1+e^{-1}}$.

$N = \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$.

$P = \dfrac{1+e^{2x}}{1-e^x} + \dfrac{e^{-x}+e^x}{1-e^{-x}}$.

$Q = \left(e^x + 1\right)^2 - \sqrt{e^{4x}} - 1$.

Exercice 6.

Déterminez si les égalités suivantes sont vraies ou fausses.

1. $e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{e^x}$.
2. $\sqrt{e^{x^2}} = e^x$.
3. $\sqrt{e^{2x}} = e^x$.
4. $\left(\dfrac{1}{e^{-\frac{x}{2}}}\right)^2 = e^x$.
5. $e^{-2x} = \dfrac{1}{(e^x)^2}$.
6. $e^{1-x} = \dfrac{e}{e^x}$.
7. $e^x + e^x = 2e^x$.
8. $\left(\dfrac{1}{e^x}\right)^3 = e^{-3x}$.
9. $e^{x-1} \times e^{1-x} = 1$.
10. $\dfrac{(e^x)^2}{e} = e^{2x-1}$.
11. $\dfrac{e^{3x}}{e^x} = e^3$.

IV Fonction exponentielle : variation et signe.

1 Généralités.

Proposition 3

La fonction exponentielle est définie, dérivable, strictement positive, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

Exercices 29 à 42 page 175 du manuel Indice. Fonctions avec exponentielle.

Exercice 8.

Exercices 58 à 67 page 176 du manuel Indice. Étudier le signe d'expressions algébriques.

Exercice 9.

Exercices 87 à 108 pages 178 et 179 du manuel Indice. Fonctions avec exponentielle.

2 Équations et inéquations faisant intervenir l'exponentielle.

Théorème 4

Soient x et y deux réels.

(i) $e^x = e^y \iff x = y$.

(ii) $e^x < e^y \iff x < y$.

(iii) $e^x \leqslant e^y \iff x \leqslant y$.

Remarques.

1. Nous utiliserons souvent le (ii) de la façon suivante : $e^x - e^y$ est du signe de $x - y$.

Exercice 10.
Exercices 22 à 28 page 175 du manuel Indice.

Exercice 11.
Exercices 68 à 80 page 177 du manuel Indice.

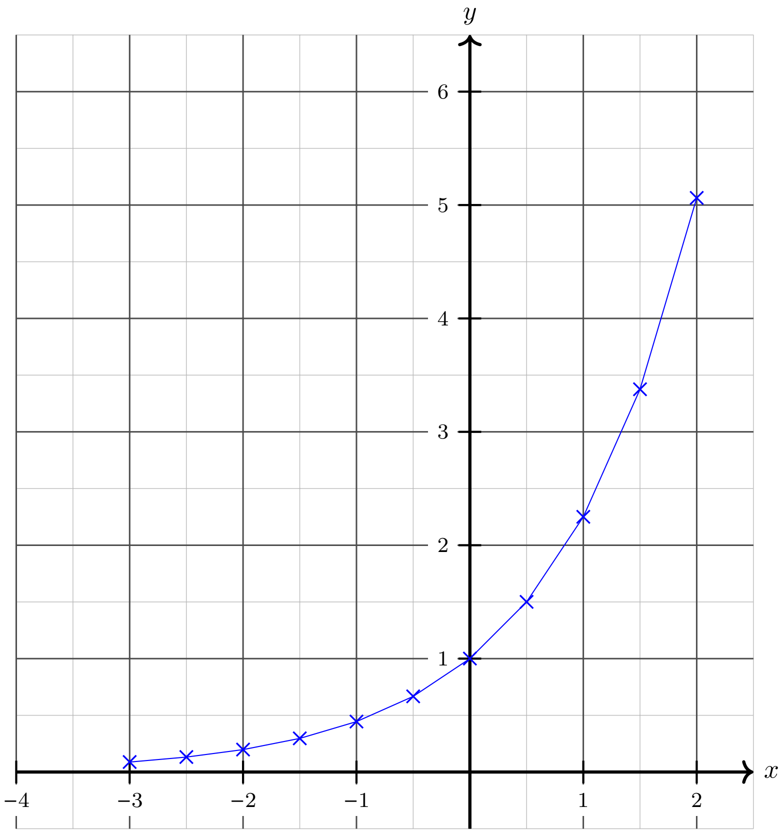
Exercice 12. - convexité de l'exponentielle.
Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et $\mathscr{T}_a$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Montrer que $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{T}_a$.

V Construction de la courbe représentative de l'exponentielle par la méthode d'Euler.

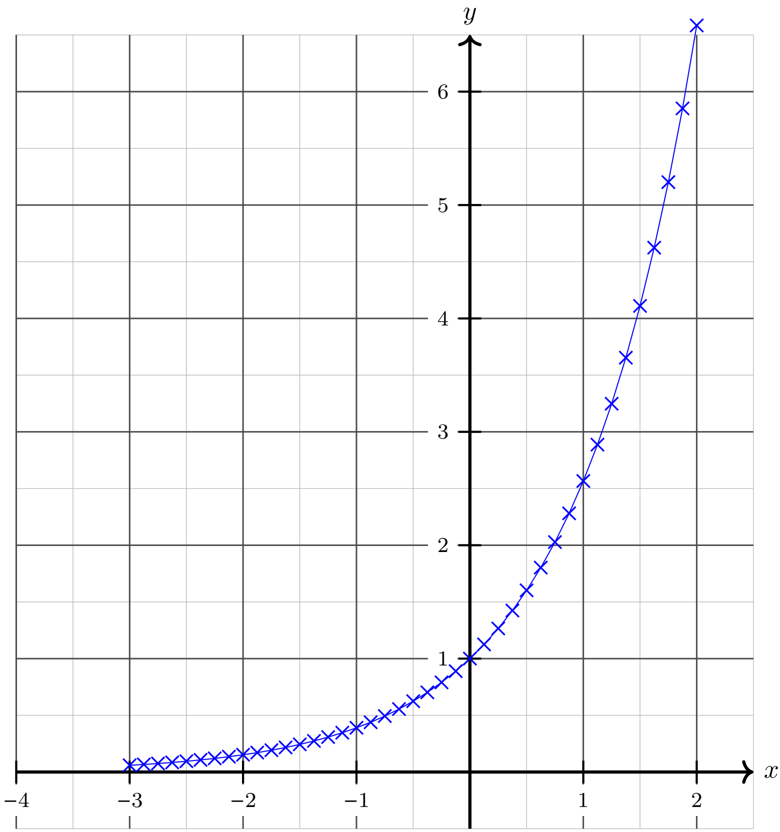
La problématique est la suivante : nous ne connaissons pour l'instant (dans cette leçon) aucun moyen de calculer des images par exponentielle, nous ne connaissons pas même la valeur de e. Bien sûr, votre calculatrice donne des valeurs approchées, mais notre objectif est précisément de savoir quelles instructions lui ont été données pour y parvenir.

1 Méthode d'Euler : point de vue géométrique.

L'idée, pour obtenir à peu près la courbe représentative de la fonction exponentielle, est de dire que, localement, la courbe représentative se confond avec la tangente. Nous pouvons dire que la tangente est une approximation de la courbe représentative.



y
x
6
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
1
2



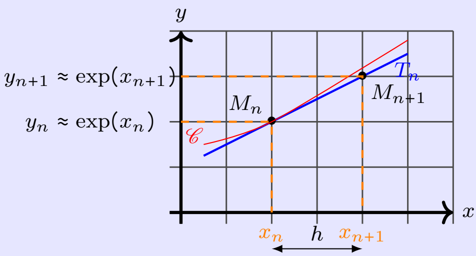
y
6
5
4
3
2
1
x
-4
-3
-2
-1
1
2

Exercice 13.

Nous souhaitons construire une suite $M_n(x_n; y_n)$ de points à peu près sur la courbe représentative de la fonction exponentielle.

On fixe le pas $h = 0{,}1$ qui est la distance séparant les abscisses des points que nous allons construire. On pose $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et pour tout n entier naturel, $x_{n+1} = x_n + h$.

Expliquons comment, à partir d'un point M_n qui est (à peu près) sur la courbe représentative de $\mathscr{C}$ de exp obtenir le point suivant.



La tangente T_n au point d'abscisse x_n a pour équation $y = \exp'(x_n)(x - x_n) + \exp(x_n)$.
Or $\exp' = \exp$ donc

$$T_n : \ y = \exp(x_n)(x - x_n) + \exp(x_n).$$

De plus, $M_n(x_n; y_n)$ appartenant à $\mathscr{C}$ nous avons $y_n = \exp(x_n)$ et donc

$$T_n : \ y = y_n(x - x_n) + y_n.$$

Puisque T_n est presque confondue avec $\mathscr{C}$ nous pouvons dire que M_{n+1} sera le point de T_n d'abscisse x_{n+1}. En utilisant l'équation de la tangente :

$$y_{n+1} = y_n(x_{n+1} - x_n) + y_n.$$

Et donc, comme $x_{n+1} - x_n = h$,

$$y_{n+1} = y_n h + y_n.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$x_{n+1} = x_n + h \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n(1 + h).$$

1. Sans justification précisez la nature des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Avec un tableur on obtient :

	A	B	C	D
1	x	0	0,1	0,2
2	y	1	1,1	1,21

   (a) Quelles formules ont été rentrées en `C1` et `C2` et recopiées vers la droite ?
   (b) Retranscrivez le précédent tableau dans une feuille de calcul puis recopiez vers la droite les formules entrées en `C1` et `C2`.
   (c) Affichez dans le tableur la représentation graphique de ce nuage de points.

Exercice 9.

(Suite)

3. Nous allons faire un programme en Python qui fera le même travail que le tableur. Nous allons avoir besoin d'un nouveau type de variable appelé une *liste*. Une liste, comme en mathématique, est une suite mais finie indexée à partir de 0.

   Par exemple l'instruction $L = [23{,}2.5{,}4]$ crée la liste appelée L formé des trois éléments 23, 2.5 et 4 (dans cet ordre). Il est possible d'appeler chaque élément de la liste : $L[0]$ vaut 23, $L[1]$ vaut 2.5 et $L[2]$ vaut 4.
   Il est possible de rassembler deux listes par l'opérateur de concaténation qui est le plus $[2,a]+[7]$ donnera la liste $[2,a,7]$.

   (a) Indiquez ce qu'il faut ajouter à ce programme pour qu'il affiche les points M_n reliés par des segments.

```
import numpy
import matplotlib.pyplot

def abscisses():
  x=0
  xn=[]
  k=0
  while k<11:
    xn=xn+[x]
    k=.....
    x=.....
  return(xn)

def ordonnees():
  y=1
  yn=[]
  k=0
  while k<11:
    yn=yn+[y]
    k=.....
    y=.....
  return(yn)

matplotlib.pyplot.plot(abscisses(),
    ordonnees())
matplotlib.pyplot.show()
```

   (b) Exécutez le précédent programme avec Python.

   (c) Proposez un programme Python qui trace les points M_n reliés par des segments, pour un pas $h = \frac{1}{10^m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10.
Exercices 81 à 86 pages 177 et 178 du manuel Indice.

2 Valeur approchée de e.

Lors de l'exercice précédent nous avons obtenu une valeur approchée de e lorsque pour un pas de $\frac{1}{10}$ nous calculons y_{10}.

Pour obtenir une valeur plus précise de e il suffit de prendre un pas plus petit : pour un pas de $\frac{1}{10^3}$, y_{10^3} est une valeur approchée plus fine de e.

En généralisant nous voyons que e est la limite de la suite de terme général $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

VI Fonctions hyperboliques.

Exercice 11.
On définit sur $\mathbb{R}$ les deux fonctions cosh (lisez « cosinus hyperbolique ») et sinh (lisez « sinus hyperbolique ») par :

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Montrez que cosh est une fonction paire et sinh une fonction impaire.
2. Montrez que cosh et sinh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cosh'(x) = \sinh(x) \text{ et } \sinh'(x) = \cosh(x).$$
3. Dressez le tableau de variation des fonctions sinh puis cosh.
4. Établissez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
5. Montrez que pour tous réels a et b on a les égalités
$$\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b),$$
$$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b).$$
6. Montrez que cosh et sinh vérifient l'équation différentielle $y'' = y$.

VII Exercices.

Exercice 12.
Résolvez dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{x-4}} = \mathrm{e}^{x^2-1}$.

Exercice 13.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{e^{2x+1}}{(e^x)^3} \geqslant 0$.

Exercice 14.

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 - 2{,}5x + 1)e^x$ pour tout x réel.

1. (a) Calculez f'.
   (b) Étudiez le signe de f' et déduisez-en les variations de f.
2. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -1 recoupe la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M. Déterminez à la calculatrice une valeur approchée de l'abscisse de M.
3. Déterminez une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0.
4. Complétez la fonction Python ci-dessous afin qu'elle permette d'approcher, au dixième près par excès, l'abscisse du point P intersection de la tangente $\mathscr{T}$ et de $\mathscr{C}_f$.

```
from math import
exp
def intersect():
x=0
y=1
z=1
while y>=z:
x=.....
y=-1.5*x+1
z=.....
return(.....)
```