Ajouter des exercices sur les comparaisons de d'images (rappels de secondes) et où d'antécédents (en prévision du théorème des valeurs intermédiaires).

Ajouter position relatives de courbes grâce à l'extremum de la différence des expression algébrique et donc le signe de cette différence.

Fonction dérivée et étude de variation.

I Étude des variations d'une fonction grâce à sa dérivée.

Introduction géométrique avec la tangente.

Théorème 1

Soient :

. $a < b$ deux réels,

. $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a,b[$.

Nous avons les résultats suivants.

(i) $f' \geqslant 0$ si et seulement si f est croissante.

(ii) $f' \leqslant 0$ si et seulement si f est décroissante.

(iii) $f' = 0$ si et seulement si f est constante.

(iv) Si $f' > 0$, sauf éventuellement en un nombre fini de points pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante.

(v) Si $f' < 0$, sauf éventuellement en un nombre fini de points pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement décroissante.

Démonstration 1

L'idée (très approximative) de la démonstration est la suivante pour le cas $f' \geqslant 0$. Pour h suffisamment proche de 0 le taux d'accroissement est positif : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$. Donc pour $h > 0$, $f(a+h) - f(a) \geqslant 0$. Ou encore : $f(a) \leqslant f(a+h)$. f conserve l'ordre entre a et $a+h$. Autrement dit f est croissante.

La réciproque est du même tabac.

Fin de la démonstration

Remarques.

1. Par convention les tableaux de variations indiquent la stricte monotonie. Pour les construire nous utiliserons donc les implications (iv) et (v) correspondantes.
2. Le (ii) offre une caractérisation des fonctions constantes. Autrement dit c'est un moyen des démontrer qu'une fonction est constante. Nous utiliserons ce résultat dans des démonstrations de la leçon sur la fonction exponentielle.
3. Ce résultat n'est valable que sur un intervalle. En effet, il n'est qu'à considérer la fonction inverse pour voir que le théorème ne fonctionne pas si on est pas sur un intervalle.

Exemples.

1. Soit $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 7$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   Étudions les variations de f sur $]0; +\infty[$.

   La démarche pour étudier les variations d'une fonction se fera désormais ainsi :

   (a) calcul de la fonction dérivée,
   (b) étude du signe de la fonction dérivée,
   (c) construction d'un tableau indiquant le signe de la fonction dérivée puis les variations de la fonction.

   (a) Déterminons la dérivée de f.
   f est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $]0; +\infty[$ et quelque soit $x \in]0; +\infty[$,
   $$f'(x) = -2x + 4$$
   (b) Étudions le signe de f'.
   f' est donc une fonction affine. Elle s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$. Comme son coefficient directeur $a = -2 < 0$, elle et strictement positive sur $]0; 2[$ et strictement négative sur $]2; +\infty[$.
   (c) Nous en déduisons

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	

2. Soit $g : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 13$ définie sur $\mathbb{R}$.
   Étudions les variations de g sur $\mathbb{R}$.

   En devoir surveillé une telle question, qui nécessite de nombreuses étapes, sera coupée en plusieurs sus questions : calculez la fonction dérivée, étudiez le signe de la fonction dérivée, dressez le tableau de variation de la fonction.

   (a) Déterminons la dérivée de g.
   g est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, quelque soit x réel,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x + 2 + 0 \\ &= x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

   (b) Étudions le signe de g'.
   g' est une fonction polynomiale de degré 2 avec : $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$.
   Recherchons les racines de f'.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (1) \times (2) = 1$$

   $\Delta > 0$ donc g' admet deux racines distinctes.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times (1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times (1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

   g' est donc du signe de $a = 1$ sauf entre les racines 1 et 2.

   (c) Nous en déduisons

x	0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$-\frac{73}{6}$	$\searrow$	$-\frac{37}{3}$	$\nearrow$	

3. Soit $h : x \mapsto -4\sqrt{x}$ une fonction définie sur $]0;+\infty[$.
   Étudions les variations de h sur $]0;+\infty[$.

   (a) Déterminons f'.
   h est le produit d'une constante et de la fonction racine carrée donc h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, quelque soit $x \in]0;+\infty[$,

   $$\begin{aligned} h'(x) &= 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

   (b) Étudions le signe de h'.
   Comme $x \neq 0$, $\sqrt{x}$ est strictement positif. Donc h' est strictement positive sur $]0;+\infty[$.

   (c) Nous en déduisons

   h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4. Soit $h : x \mapsto x^3$.

   Exemple de fonction strictement croissante avec dérivée strictement positive sauf en un point.

Exercice 1. Application.

Exercices du manuel.

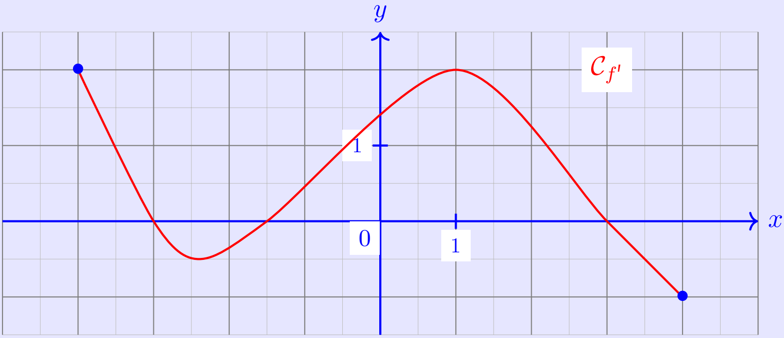
Oral. Exercices 12 page 146 à 24 page 144 du manuel Indice.

Exercice 2. Application.

À ajouter selon les besoins avec des corrections. Exercices 20 à 30 page 147 du manuel Indice de l'éditeur Bordas.

Exercice 3.

Donnez, par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f dont la fonction dérivée f' est représentée ci-dessous.



Correction de l'exercice 3 . . . .

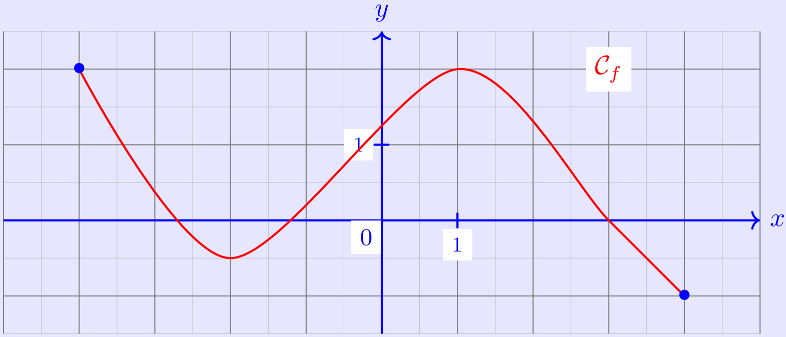
C'est la fonction dérivée, f', qui est représentée. À partir de son signe nous pourrons retrouver les variations de f d'après le théorème.

Pour se représenter les choses et justifier notre réponse, nous pouvons construire un tableau indiquant le signe de la dérivée et la variation de la fonction.

. . . . fin de la correction de l'exercice 3.

Exercice 4.

Donnez, par lecture graphique, le tableau de signe de la fonction f' dérivée de la fonction f qui est représentée ci-dessous.



Correction de l'exercice 4 . . . .

C'est la fonction f qui est représentée. À partir de ses variations nous pourrons retrouver le signe de sa fonction dérivée f' d'après le théorème.

. . . . fin de la correction de l'exercice 4.

Exercice 5. Application.

Exercices du manuel.

Exercices 36 page 148 à 42 page 148 du manuel Indice.

Exercice 6. Application.

Études de variations. Exercices 43 à 51 page 149 du manuel Indice.

Exercice 7.

Exercices 56 à 62 page 150 du manuel.

II Extrema d'une fonction grâce à sa dérivée.

1 Définition des extrema.

Rappel des définitions de maximum et minimum y compris locaux.

À rajouter en vrai définition ici dans la leçon.

Définition 1

Soient :

. I une partie de $\mathbb{R}$,

. $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I,

. $x_0 \in I$.

Nous dirons que f admet un *maximum local en* x_0 s'il est possible de trouver des réels a et b, avec $a < x_0 < b$, de sorte que

$$\text{quelque soit } x \in]a; b[,\ f(x) \leqslant f(x_0).$$

Remarques.

1. Nous avons bien sûr une définition équivalente pour un *minimum local*. Simplement l'inégalité est dans ce cas inversée : $f(x) \geqslant f(x_0)$.
2. Pour pouvoir poser des questions aux élèves sans donner à l'avance la réponse les enseignants de mathématiques utilise le terme générique d'*extremum local* pour parler d'un maximum ou d'un minimum local.
3. Cette définition interdit de prendre en compte les éventuelles bornes de l'ensemble de définition I comme des valeurs où un extremum local est atteint. Un extremum local est forcément « à l'intérieur » de l'ensemble de définition.

Exemples.

1. Considérons la fonction $f : [-10; 10] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{90}x^3 + \frac{1}{60}x^2 - \frac{21}{15}x$.
   L'étude des variations de f (ou un coup d'œil sur sa courbe représentative obtenue avec la calculatrice) permet de vérifier que : f admet un maximum local en -7 et f admet un minimum local atteint en 6.
2. La fonction identité sur $[0; 1]$ n'admet pas d'extremum local.
3. En chaque valeur de l'ensemble de définition d'une fonction constante, un maximum et un minimum est atteint.

Définition 2

Soient :

. I une partie de $\mathbb{R}$,

. $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I,

. $x_0 \in I$.

Nous dirons que f admet un *maximum absolu en* x_0 s'il est possible de trouver des réels a et b, avec $a < x_0 < b$, de sorte que

$$\text{quelque soit } x \in I,\ f(x) \leqslant f(x_0).$$

Remarques.

1. Dans les cas des extrema absolus on omet parfois le terme « absolu ». Nous parlerons donc de maximum ou de minimum sans préciser absolu.
2. Contrairement aux extrema locaux, un extremum absolu peut être atteint pour les bornes de l'ensemble de définition.

Exemples.

Exemples.

1. La fonction identité sur $[0; 1]$ admet un maximum en 1 et un minimum en 0.
2. La fonction valeur absolue admet un minimum en 0 mais pas de maximum.

2 Une condition nécessaire.

Théorème 2 - Théorème de Fermat.

Soient :

. $a < b$ deux réels,

. $x_0 \in]a; b[$,

. $f :]a; b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a; b[$.

Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration 2

Faire un schéma faisant apparaître les notations et les problèmes qui se posent.

Ajouter le schéma dans la démonstration ici. Avec lien avec les sécantes qui se rapprochent de tangente. Faire un rappel peut être avant sur les sécantes.

Quitte à considérer un intervalle plus petit que $]a;b[$ contenant x_0 nous pouvons supposer que $f(x_0)$ est un extremum global, ce que nous supposerons pour cette démonstration.

Supposons, par exemple, que $f(x_0)$ est un maximum et démontrons qu'alors forcément $f'(x_0) = 0$.

Dire que $f(x_0)$ est un maximum absolu sur $]a;b[$ signifie :

$$\forall x \in]a,b[,\ f(x) \leqslant f(x_0)$$

Soit $h < 0$ tel que $x_0 + h \in]a,x_0[$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0+h) - f(x_0) \leqslant 0 \\ h < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \tau_f(x_0,h) \geqslant 0$$

Puisque f est dérivable en c, $f'_g(c)$ existe et

$$f'_g(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x \in [c, c+\epsilon[}} \tau_f(c,x) \geq 0$$

De même nous établirions que $f'_d(c) \leq 0$. Or f étant dérivable en c, $f'_g(c) = f'_d(c) = f'(c)$, donc, nécessairement

$$\boxed{f'(c) = 0.}$$

Fin de la démonstration

Remarques.

1. Ainsi les zéros de la fonction dérivée nous indiquent les valeurs potentiels où chercher des extrema locaux.
2. Attention lors d'une recherche d'extrema absolu de ne pas oublier de tester les éventuelles bornes de l'ensemble de définition. Le théorème n'envisage pas ce cas puisque l'intervalle est ouvert.
3. Graphiquement : s'il y a un extremum local en x_0 alors la tangente en x_0 à la courbe est horizontale.

Exercice 8.

Àa jouter absolument. Exercice 63 page 150 du manuel Indice de première.

Permet de montrer l'insuffisance de la précédente proposition. De plus avec le tableau de variation nous voyons apparaître la mise en évidence du résulta suivant : il faut que la dérivée change de signe.

3 Une condition suffisante.

Proposition 1

Soient :

. $a < b$ deux réels,

. $x_0 \in]a;b[$,

. $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a;b[$.

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe dans le voisinage de x_0, alors f admet un extremum local en x_0.

Démonstration 3

Démontrons maintenant l'implication réciproque. Nous supposerons donc que f' s'annule en x_0 en changeant de signe dans son voisinage et qu'alors, forcément, f admet un extremum local en x_0.

Dire que f s'annule en x_0 en changeant de signe dans son voisinage signifie qu'il est possible de trouver des réels α et β de sorte que $]\alpha;\beta[\subset]a;b[$ et qu'en se limitant à $]\alpha;\beta[$ nous avons alors

x	α		x_0		β
f'		$+$	0	$-$	
f	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\beta)$

ou

x	α		x_0		β
f'		$-$	0	$+$	
f	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\beta)$

Et donc dans les deux cas nous avons bien un extremum sur $]\alpha;\beta[$ en x_0. Autrement dit

f admet un extremum local en x_0.

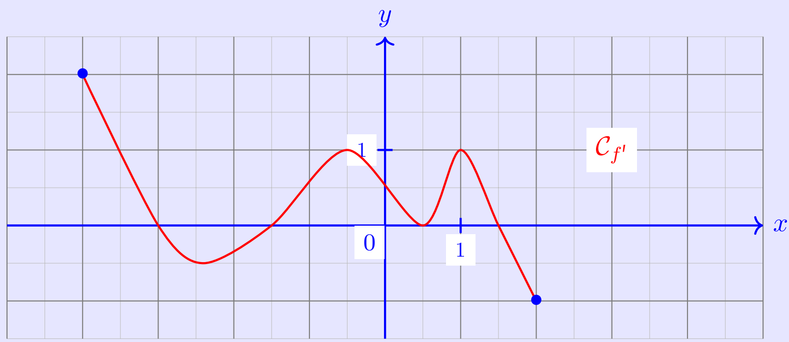
Fin de la démonstration

Remarques.

1. Ce résultat peut être utilisé si on a pas au préalable construit le tableau de variation de la fonction f et notamment dans des cas de lecture graphique.
2. Il faut impérativement que la dérivée change de signe, le fait que la dérivée s'annule ne suffisant pas. Il suffit, pour s'en convaincre de considérer la fonction cube dont la dérivée s'annule en zéro et qui n'admet pas d'extremum local.
3. Graphiquement : s'il y a une tangente horizontale et que la courbe de la fonction est, au moins au voisinage du point de tangence, toute entière dans l'un des demi-plans délimités par la tangente, alors la fonction admet un extremum local.

Exercice 9.

La dérivée f' d'une fonction f est représentée ci-contre. Par lecture graphique précisez les extrema locaux de f et pour quelles valeurs de x ils sont atteints.



Exercice 10.

Exercices 64 à 67 pages 150 et 151 du manuel Indice de première.

Correction de l'exercice 10..

Exercice 65 page 150.

(a) $f'(x) = 3x^2 - 8x - 3$.

x	-1		$-\frac{1}{3}$		3		4
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) f admet un maximum local en $-\frac{1}{3}$ et un minimum local en 3.

x	-1		$-\frac{1}{3}$		3		4
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	3	$\nearrow$	$\frac{149}{27}$	$\searrow$	-13	$\nearrow$	-7

f admet un maximum absolu en $-\frac{1}{3}$ et un minimum absolu en 3.

(c) Les tangentes sont horizontales.

.... fin de la correction de l'exercice 10.

III Exercices.

Exercice 11.

Étudiez les variations de

1. sin sur $[0,\pi]$.
2. cos sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
3. $x \mapsto \cos^2 x + \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$.
4. $x \mapsto \cos(2x)$ sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice 12.

Obtenir des inégalités : exercices 71 à 73 page 151 du manuel Indice de première.

Exercice 13.

Position relative de deux courbes : exercices 78 à 81 pages 151 et 152 du manuel Indice de première.

Exercice 14.

Optimisation : exercice 85 page 153 du manuel Indice de première.

Exercice 15.

Exercice 97 page 129 du manuel première ESL Hachette Déclic 2015 : fonction bénéfice, degré 3.

Un responsable d'un service comptable souhaite présenter, en réunion, l'estimation des bénéfices pour l'année à venir.
Le bénéfice $B(q)$, exprimé en euros, pour q unités produites et vendues est modélisé par la fonction définie par $B(q) = -q^3 + 375q^2 + 105\,000q$ avec $q \geqslant 0$.
Il souhaite trouver comment graduer ses axes pour afficher uniquement la partie de la courbe où le bénéfice est positif. De plus, cette partie doit être entièrement représentée.

1. (a) Calculez $B'(q)$.
   (b) Étudiez le signe de $B'(q)$ et construire de tableau de variations de B pour $q \geqslant 0$.
2. Factorisez $B(q)$ et résolvez $B(q) = 0$.
3. (a) Comment doit-il graduer ses axes ?
   (b) Vérifiez en traçant cette courbe sur la calculatrice.

Correction de l'exercice 15..

1. (a) Déterminons B'.

   B est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $$B'(q) = -3q^2 + 375 \times 2q + 105\,000$$

   Quelque soit $q \in [0; +\infty[$

   $$B'(q) = -3q^2 + 750q + 105\,000$$

   (b) Étudions le signe de B' et les variations de B.

   B' est une fonction polynomiale de degré 2 avec : $a = -3$, $b = 750$ et $c = 105\,000$.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (750)^2 - 4 \times (-3) \times (105\,000)\\ &= 1\,822\,500\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc B' admet deux racines distinctes :

$$q_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(750)-\sqrt{1822500}}{2\times(-3)} = 350$$

$$q_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(750)+\sqrt{1822500}}{2\times(-3)} = -100$$

La fonction polynomiale de degré 2 B' est du signe de son coefficient dominant $a = -3 < 0$ sauf entre ses racines $q_1 = 350$ et $q_2 = -100$ donc

q	$-\infty$		-100		0		350		$+\infty$
B'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
B		$\searrow$	$-5\,750\,000$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$39\,812\,500$	$\searrow$	

2. Factorisons $B(q) = 0$.

$$\begin{aligned}B(q) &= -q^3 + 375q^2 + 105\,000q\\ &= -q^2 \times q + 375q \times q + 105\,000q\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{B(q) = q(-3q^2 + 375q + 105\,000)}$$

Résolvons $B(q) = 0$.

Utilisons le résultat précédent. Dire que $B(q) = 0$ équivaut successivement à

$$q(-3q^2 + 375q + 105\,000) = 0$$
$$q = 0 \text{ ou } -3q^2 + 375q + 105\,000 = 0 \qquad (E_1)$$

Nous voyons apparaitre une équation polynomiale de degré 2, (E_1).
Résolvons (E_1).
Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2 avec : $a = -3$, $b = 375$ et $c = 105\,000$.
B' est une fonction polynomiale de degré 2 avec : $a = -3$, $b = 750$ et $c = 105\,000$.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (375)^2 - 4 \times (-3) \times (105\,000) \\ &= 1\,400\,625\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc (E_1) admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-375-\sqrt{1400625}}{2\times(-3)} \\ &= \frac{546507}{2104} \\ &\approx 260 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_4 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-375+\sqrt{1400625}}{2\times(-3)} \\ &= -\frac{283507}{2104} \\ &\approx -135 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est $\{q_3; q_4\}$.
Enfin puisque $q \geq 0$ nous ne retiendrons que les solutions positives

> L'ensemble des solutions de l'équation $B(q) = 0$ est $\mathcal{S} = \{0; q_3\}$.

3. En combinant la lecture du tableau de variation et la connaissance des zéros de la fonction bénéfice il appert que pour voir la partie positive de Bil faut choisir

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq q_3 \approx 260 \\ 0 \leq y \leq 39\,812\,500 \end{cases}$$

.... fin de la correction de l'exercice 15.

Exercice 16. Application.

Exercice 109 page 131 du manuel Hachette Déclic 2015 première ESL : problème de bac, étude d'une fonction auxiliaire, coût moyen.

Partie A : étude d'une fonction.

On considère la fonction définie sur $[5\,000; 15\,000]$ par :

$$f(x) = 9 + \frac{63\,000}{x}.$$

1. Calculez $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Étudiez le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[5\,000; 15\,000]$.
3. Résoudre $f(x) = 16$.

Partie B : étude d'un bénéfice.

Un restaurateur propose un menu unique à 16 €.
Il a calculé que :

- les charges fixes s'élèvent à 63 000 € pour une année ;
- la préparation d'un repas coûte 9 €.

On suppose que tous les repas préparés sont vendus. On désigne par x le nombre de repas servis en un an et on suppose que x appartient à $[5\,000; 15\,000]$.

1. On note $C_T(x)$ le coût total annuel de la préparation de x repas. Exprimez $C_T(x)$ en fonction de x.
2. (a) On note $C_M(x)$ le coût moyen d'un repas pour la préparation de x repas. montrez que $C_M(x) = f(x)$.

   (b) Déterminez, à l'aide de la première partie, le seuil de rentabilité du restaurant, c'est-à-dire le nombre de repas qu'il faut servir pour que l'exploitation du restaurant dégage un bénéfice.
3. On note $B(x)$ le bénéfice annuel du restaurant pour x repas.

   (a) Exprimez $B(x)$ en fonction de x.

   (b) Ce restaurateur souhaite pouvoir payer son serveur 1 325 € brut par mois et s'octroyer un salaire de 2 000 €, uniquement à l'aide du bénéfice.
   Sachant que le restaurant est ouvert 300 jours dans l'année, combien de repas faut-il servir en moyenne par jour pour atteindre l'objectif ?

Correction de l'exercice 16. . . . .

Partie A.

1. Déterminons f'.

   f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, donc f est dérivable sur $[5000; 15000]$ et, quelque soit x dans cet intervalle

   $$\boxed{f'(x) = -\frac{63000}{x^2}.}$$

2. Dressons le tableau de variation f.

   f' est une expression fractionnaire dont le dénominateur est toujours positif puisque c'est un carré. f' est donc du signe de son numérateur autrement dit strictement négatif.

x	5000	15000
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	21,6 ↘	13,2

3. Résolvons l'équation $f(x) = 16$.

$$f(x) = 16$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
9 + \frac{x}{63000} &= 16\\
9 + \frac{x}{63000} - -9 &= 16 - -9\\
\frac{63000}{x} &= 7\\
\frac{63000}{x} \times x &= 7 \times x, \quad \text{car } x \neq 0\\
63000 &= 7x\\
\frac{63000}{7} &= \frac{7x}{7}\\
9000 &= x
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 16$ est $\mathscr{S} = \{16\}$.

Partie B.

1. $C_T(x) = 63000 + 9x$
2. (a) Déterminons $C_M(x)$.

$$\begin{aligned} C_M(x) &= \frac{C_T(x)}{x} \\ &= \frac{63000 + 9x}{x} \\ &= \frac{63000}{x} + \frac{9x}{x} \\ &= \frac{63000}{x} + 9 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Quelque soit $x \in [5000; 15000]$, $f(x) = C_M(x)$.

(b) La rentabilité sera atteinte lorsque le coût moyen d'un repas sera inférieur au prix de vente de 16 euros.
Puisque $C_M = f$ nous pouvons affirmer d'après les questions A.2 et A.3 que

x	5000		9000		15000
$C_M(x)$	21,6	$\searrow$	16	$\searrow$	13,2

D'après ce tableau de variation

le seuil de rentabilité est de 9000 repas servis.

3. (a)

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C_T(x) \\ &= 16x - C_T(x) \\ &= 7x - 63000 \end{aligned}$$

(b) Pour pouvoir verser les deux salaires sur 12 mois il faut que le bénéfice vérifie

$$B(x) \geqslant 1325 \times 12 + 200 \times 12.$$

Il s'agit d'une inéquation du premier degré que nous résolvons en isolant le x :

$$\begin{aligned} B(x) &\geqslant 39900 \\ 7x - 63000 &\geqslant 39900 \\ 7x - 63000 + 63000 &\geqslant 39900 + 63000 \\ 7x &\geqslant 102900 \\ \frac{7x}{7} &\geqslant \frac{102900}{7} \\ x &\geqslant 14700 \end{aligned}$$

Il faut donc vendre plus de 14700 repas sur 300 jour. Autrement dit

Il doit donc vendre plus de 49 repas par jour.

.... fin de la correction de l'exercice 16.

Exercice 17. Application.

Exercice 110 page 131 du manuel Hachette Déclic 2015 : coût moyen, technique.

Correction de l'exercice 17 ....

1. (a) Avec la calculatrice

$$C_T(20) = 358.$$

Et puisque $C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}$,

$$C_M(20) = 17{,}9.$$

(b) Nous utilisons le taux d'accroissement de la fonction affine représentée par la droite (OA) pour déterminer sa pente :

$$\begin{aligned} p &= \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} \\ &= \frac{C_T(20) - 0}{20 - 0} \\ &= \frac{358}{20} \\ &= 17{,}9 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La pente de } (OA) \text{ est de } 17{,}9.}$$

(c) Il faut imaginer que la droite rouge reste fixée au points O et A mais le point A peut s déplacer sur la courbe $\mathscr{C}_{C_T}$. La question est donc de trouver la position du point A pour laquelle la pente de (OA) est la plus faible.

La pente semble minimale lorsque A a pour abscisse 40.

$$\boxed{\text{Pour que le coût soit minimal il faut produire 40 crèmes.}}$$

2. (a) Donnons l'expression de $C_M(q)$.

$$\begin{aligned} C_M(q) &= \frac{C_T(q)}{q} \\ &= \frac{0{,}001q^3 + 5q + 250}{q} \\ &= \frac{0{,}001q^3}{q} + \frac{5q}{q} + \frac{250}{q} \\ &= 0{,}001q^2 + 5 + \frac{250}{q} \end{aligned}$$

(b) Déterminons C'_M.

$C_M = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 0{,}001q^3 + 5q + 250$ et $v(x) = q$. u et v sont dérivables et v est non nulle sur $]0; +\infty[$.
De plus

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = 0{,}003q^2 + 5 \\ v(x) = 1 \end{array} \right.$$

Donc

$$\begin{aligned}
C'_M &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
&= \frac{(0{,}003q^2 + 5) \times q - (0{,}001q^3 + 5q + 250) \times 1}{q^2} \\
&= \frac{0{,}003q^2 \times q + 5 \times q - (0{,}001q^3 + 5q + 250)}{q^2} \\
&= \frac{0{,}003q^3 + 5q - 0{,}001q^3 - 5q - 250)}{q^2} \\
&= \frac{(0{,}003 - 0{,}001)q^3 + (5 - 5)q - 25}{q^2} \\
&= \frac{0{,}002q^2 - 250}{q^2}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
&(q - 50)(0{,}002q^2 + 0{,}1q + 5) \\
&= q \times 0{,}002q^2 + q \times 0{,}1q + q \times 5 + (-50) \times 0{,}002q^2 + (-50) \times 0{,}1q + (-50) \times 5 \\
&= 0{,}002q^3 + 0{,}1q^2 + 5q - 0{,}1q^2 + 10q - 250q \\
&= 0{,}002q^2 - 250
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{C'_M(q) = \frac{(q - 50)(0{,}002q^2 + 0{,}1q + 5)}{q^2}.}$$

(c) Étudions les variations de C_M.

C'_M est un quotient dont le dénominateur est positif car c'est un carré. Donc C'_M est du signe de son numérateur qui est un produit.

* $f : q \mapsto q - 50$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = -50$.
  $a > 0$ donc f est strictement croissante.
  f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 50$.

* $g : x \mapsto 0{,}002q^2 + 0{,}1q + 5$ est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 0{,}002$, $b = 0{,}1$ et $c = 5$.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (0{,}01)^2 - 4 \times 0{,}002 \times 5\\ &= 24{,}96\end{aligned}$$

$\Delta < 0$ donc g est du signe de son coefficient dominant, *i.e.* g est strictement positive.

Nous en déduisons le tableau de signe C'_M et celui de variation de C_M.

q	0		50		120
$C'_M(q)$		$-$	0	$+$	
$C_M(q)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(120)$

Avec $f(120) \approx 0{,}222638$.

. . . . fin de la correction de l'exercice 17.