Fonction dérivée et étude de variation.

I Étude des variations d'une fonction grâce à sa dérivée.

Théorème 1

Soient :

. $a < b$ deux réels,

. $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a,b[$.

Nous avons les résultats suivants.

(i) $f' \geqslant 0$ si et seulement si f est croissante.

(ii) $f' \leqslant 0$ si et seulement si f est décroissante.

(iii) $f' = 0$ si et seulement si f est constante.

(iv) Si $f' > 0$, sauf éventuellement en un nombre fini de points pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante.

(v) Si $f' < 0$, sauf éventuellement en un nombre fini de points pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement décroissante.

Démonstration 1

L'idée (très approximative) de la démonstration est la suivante pour le cas $f' \geqslant 0$. Pour h suffisamment proche de 0 le taux d'accroissement est positif : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$. Donc pour $h > 0$, $f(a+h) - f(a) \geqslant 0$. Ou encore : $f(a) \leqslant f(a+h)$. f conserve l'ordre entre a et $a+h$. Autrement dit f est croissante.

La réciproque est du même tabac.

Fin de la démonstration

Remarques.

1. Par convention les tableaux de variations indiquent la stricte monotonie. Pour les construire nous utiliserons donc les implications (iv) et (v) correspondantes.
2. Le (ii) offre une caractérisation des fonctions constantes. Autrement dit c'est un moyen des démontrer qu'une fonction est constante. Nous utiliserons ce résultat dans des démonstrations de la leçon sur la fonction exponentielle.
3. Ce résultat n'est valable que sur un intervalle. En effet, il n'est qu'à considérer la fonction inverse pour voir que le théorème ne fonctionne pas si on est pas sur un intervalle.

Exemples.

1. Soit $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 7$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   Étudions les variations de f sur $]0; +\infty[$.

   La démarche pour étudier les variations d'une fonction se fera désormais ainsi :
   (a) calcul de la fonction dérivée,
   (b) étude du signe de la fonction dérivée,
   (c) construction d'un tableau indiquant le signe de la fonction dérivée puis les variations de la fonction.

   (a) Déterminons la dérivée de f.
   f est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $]0; +\infty[$ et quelque soit $x \in]0; +\infty[$,
   $$f'(x) = -2x + 4$$
   (b) Étudions le signe de f'.
   f' est donc une fonction affine. Elle s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$. Comme son coefficient directeur $a = -2 < 0$, elle et strictement positive sur $]0; 2[$ et strictement négative sur $]2; +\infty[$.
   (c) Nous en déduisons

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	$\nearrow$	-3	$\searrow$	

2. Soit $g : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 13$ définie sur $\mathbb{R}$.
   Étudions les variations de g sur $\mathbb{R}$.

   En devoir surveillé une telle question, qui nécessite de nombreuses étapes, sera coupée en plusieurs sus questions : calculez la fonction dérivée, étudiez le signe de la fonction dérivée, dressez le tableau de variation de la fonction.

   (a) Déterminons la dérivée de g.
   g est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, quelque soit x réel,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x + 2 + 0 \\ &= x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

(b) Étudions le signe de g'.
g' est une fonction polynomiale de degré 2 avec : $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$.
Recherchons les racines de f'.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (1) \times (2) = 1$$

$\Delta > 0$ donc g' admet deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times (1)} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times (1)} = 2$$

g' est donc du signe de $a = 1$ sauf entre les racines 1 et 2.

(c) Nous en déduisons

x	0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|$	$\nearrow$	$-\frac{73}{6}$	$\searrow$	$-\frac{37}{3}$	$\nearrow$	

3. Soit $h : x \mapsto -4\sqrt{x}$ une fonction définie sur $]0; +\infty[$.
Étudions les variations de h sur $]0; +\infty[$.

(a) Déterminons f'.
h est le produit d'une constante et de la fonction racine carrée donc h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, quelque soit $x \in]0; +\infty[$,

$$h'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

(b) Étudions le signe de h'.
Comme $x \neq 0$, $\sqrt{x}$ est strictement positif. Donc h' est strictement positive sur $]0; +\infty[$.

(c) Nous en déduisons

h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

4. Soit $h : x \mapsto x^3$.

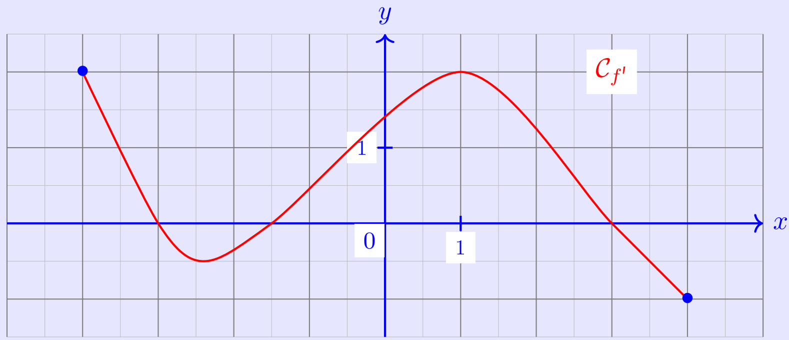
Exercice 1. Application.

Oral. Exercices 12 page 146 à 24 page 144 du manuel Indice.

Exercice 2. Application.

Exercice 3.

Donnez, par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f dont la fonction dérivée f' est représentée ci-dessous.



Correction de l'exercice 3 ....

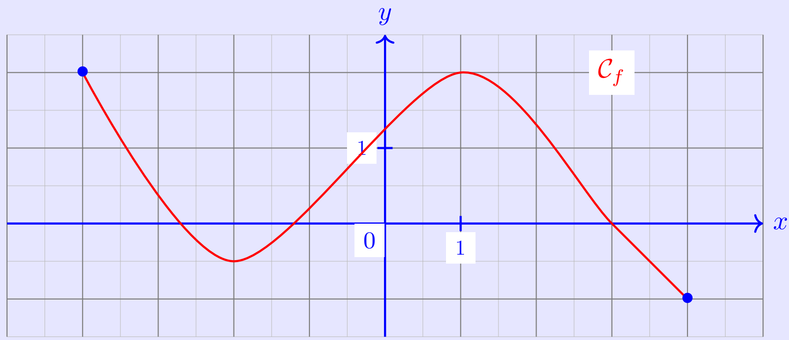
C'est la fonction dérivée, f', qui est représentée. À partir de son signe nous pourrons retrouver les variations de f d'après le théorème.

Pour se représenter les choses et justifier notre réponse, nous pouvons construire un tableau indiquant le signe de la dérivée et la variation de la fonction.

.... fin de la correction de l'exercice 3.

Exercice 4.

Donnez, par lecture graphique, le tableau de signe de la fonction f' dérivée de la fonction f qui est représentée ci-dessous.



Correction de l'exercice 4 ....

C'est la fonction f qui est représentée. À partir de ses variations nous pourrons retrouver le signe de sa fonction dérivée f' d'après le théorème.

.... fin de la correction de l'exercice 4.

Exercice 5. Application.

Exercices 36 page 148 à 42 page 148 du manuel Indice.

Exercice 6. Application.

Études de variations. Exercices 43 à 51 page 149 du manuel Indice.

Exercice 7.

Exercices 56 à 62 page 150 du manuel.

II Extrema d'une fonction grâce à sa dérivée.

1 Définition des extrema.

Définition 1

Soient :

. I une partie de $\mathbb{R}$,

. $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I,

. $x_0 \in I$.

Nous dirons que f admet un *maximum local en* x_0 s'il est possible de trouver des réels a et b, avec $a < x_0 < b$, de sorte que

$$\text{quelque soit } x \in]a;b[,\ f(x) \leqslant f(x_0).$$

Remarques.

1. Nous avons bien sûr une définition équivalente pour un *minimum local*. Simplement l'inégalité est dans ce cas inversée : $f(x) \geqslant f(x_0)$.
2. Pour pouvoir poser des questions aux élèves sans donner à l'avance la réponse les enseignants de mathématiques utilise le terme générique d'*extremum local* pour parler d'un maximum ou d'un minimum local.
3. Cette définition interdit de prendre en compte les éventuelles bornes de l'ensemble de définition I comme des valeurs où un extremum local est atteint. Un extremum local est forcément « à l'intérieur » de l'ensemble de définition.

Définition 2

Soient :

. I une partie de $\mathbb{R}$,

. $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I,

. $x_0 \in I$.

Nous dirons que f admet un *maximum absolu en* x_0 s'il est possible de trouver des réels a et b, avec $a < x_0 < b$, de sorte que

$$\text{quelque soit } x \in I,\ f(x) \leqslant f(x_0).$$

Remarques.

1. Dans les cas des extrema absolus on omet parfois le terme « absolu ». Nous parlerons donc de maximum ou de minimum sans préciser absolu.
2. Contrairement aux extrema locaux, un extremum absolu peut être atteint pour les bornes de l'ensemble de définition.

2 Une condition nécessaire.

Théorème 2 - Théorème de Fermat.

Soient :

. $a < b$ deux réels,

. $x_0 \in]a;b[$,

. $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a;b[$.

Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques.

1. Ainsi les zéros de la fonction dérivée nous indiquent les valeurs potentiels où chercher des extrema locaux.
2. Attention lors d'une recherche d'extrema absolu de ne pas oublier de tester les éventuelles bornes de l'ensemble de définition. Le théorème n'envisage pas ce cas puisque l'intervalle est ouvert.
3. Graphiquement : s'il y a un extremum local en x_0 alors la tangente en x_0 à la courbe est horizontale.

Exercice 8.

3 Une condition suffisante.

Proposition 1

Soient :

. $a < b$ deux réels,

. $x_0 \in]a;b[$,

. $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a;b[$.

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe dans le voisinage de x_0, alors f admet un extremum local en x_0.

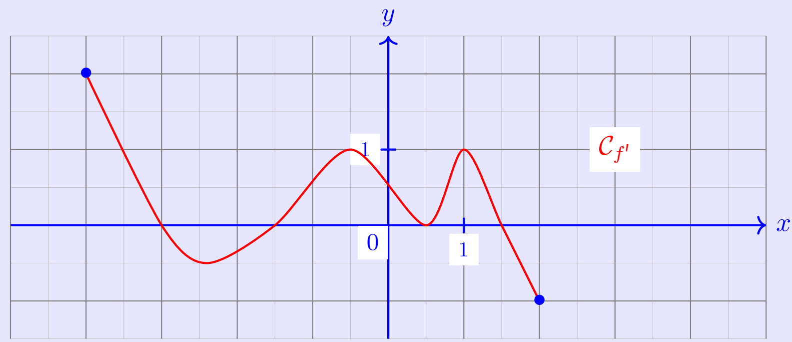
Remarques.

1. Ce résultat peut être utilisé si on a pas au préalable construit le tableau de variation de la fonction f et notamment dans des cas de lecture graphique.

2. Il faut impérativement que la dérivée change de signe, le fait que la dérivée s'annule ne suffisant pas. Il suffit, pour s'en convaincre de considérer la fonction cube dont la dérivée s'annule en zéro et qui n'admet pas d'extremum local.
3. Graphiquement : s'il y a une tangente horizontale et que la courbe de la fonction est, au moins au voisinage du point de tangence, toute entière dans l'un des demi-plans délimités par la tangente, alors la fonction admet un extremum local.

Exercice 9.

La dérivée f' d'une fonction f est représentée ci-contre. Par lecture graphique précisez les extrema locaux de f et pour quelles valeurs de x ils sont atteints.



Exercice 10.

Exercices 64 à 67 pages 150 et 151 du manuel Indice de première.

III Exercices.

Exercice 11.

Étudiez les variations de

1. sin sur $[0,\pi]$.
2. cos sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
3. $x \mapsto \cos^2 x + \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$.
4. $x \mapsto \cos(2x)$ sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice 12.

Obtenir des inégalités : exercices 71 à 73 page 151 du manuel Indice de première.

Exercice 13.

Position relative de deux courbes : exercices 78 à 81 pages 151 et 152 du manuel Indice de première.

Exercice 14.

Optimisation : exercice 85 page 153 du manuel Indice de première.

Exercice 15.

Un responsable d'un service comptable souhaite présenter, en réunion, l'estimation des bénéfices pour l'année à venir.
Le bénéfice $B(q)$, exprimé en euros, pour q unités produites et vendues est modélisé par la fonction définie par $B(q) = -q^3 + 375q^2 + 105\,000q$ avec $q \geqslant 0$.
Il souhaite trouver comment graduer ses axes pour afficher uniquement la partie de la courbe où le bénéfice est positif. De plus, cette partie doit être entièrement représentée.

1. (a) Calculez $B'(q)$.
   (b) Étudiez le signe de $B'(q)$ et construire de tableau de variations de B pour $q \geqslant 0$.
2. Factorisez $B(q)$ et résolvez $B(q) = 0$.
3. (a) Comment doit-il graduer ses axes ?
   (b) Vérifiez en traçant cette courbe sur la calculatrice.

Exercice 16. Application.

Partie A : étude d'une fonction.

On considère la fonction définie sur $[5\,000; 15\,000]$ par :

$$f(x) = 9 + \frac{63\,000}{x}.$$

1. Calculez $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Étudiez le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[5\,000; 15\,000]$.
3. Résoudre $f(x) = 16$.

Partie B : étude d'un bénéfice.

Un restaurateur propose un menu unique à 16 €.
Il a calculé que :

- les charges fixes s'élèvent à 63 000 € pour une année ;
- la préparation d'un repas coûte 9 €.

On suppose que tous les repas préparés sont vendus. On désigne par x le nombre de repas servis en un an et on suppose que x appartient à $[5\,000; 15\,000]$.

1. On note $C_T(x)$ le coût total annuel de la préparation de x repas. Exprimez $C_T(x)$ en fonction de x.
2. (a) On note $C_M(x)$ le coût moyen d'un repas pour la préparation de x repas. montrez que $C_M(x) = f(x)$.
   (b) Déterminez, à l'aide de la première partie, le seuil de rentabilité du restaurant, c'est-à-dire le nombre de repas qu'il faut servir pour que l'exploitation du restaurant dégage un bénéfice.
3. On note $B(x)$ le bénéfice annuel du restaurant pour x repas.
   (a) Exprimez $B(x)$ en fonction de x.
   (b) Ce restaurateur souhaite pouvoir payer son serveur 1 325 € brut par mois et s'octroyer un salaire de 2 000 €, uniquement à l'aide du bénéfice.
   Sachant que le restaurant est ouvert 300 jours dans l'année, combien de repas faut-il servir en moyenne par jour pour atteindre l'objectif ?

Exercice 17. Application.