Fonction dérivée.

Ajouter encore un exercice avec des fonctions auxiliaires.

Saturne.

Les chapitres I et II peuvent être faits en quarante minutes. Une définition, deux exemples, pas d'exercice et deux démonstrations déjà vues.

Chapitre III 6 formules, 6 exercices types, deux démonstration pas moins de 2 heures.

Chapitre IV pour l'essentiel intuitif donc 30 minutes.

Il faut compter au moins une heure de correction d'exercices en tout genre.

On arrondit à 5 heures.

Dans cet leçon l'intervalle I est supposé non vide et non réduit à un pont.

I Nombre et fonction dérivés.

Définition 1

Soient :

. I un intervalle,

. $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

S'il est possible de calculer le nombre dérivé de f en $x_0 \in I$, *i.e.* $f'(x_0)$, nous dirons que f est *dérivable en x_0*.

Si f dérivable en tous les points de I nous dirons que *f est dérivable sur I* et que sa *fonction dérivée* est

$$\begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$$

Exemples.

1. Considérons la fonction $\ell : x \mapsto 3$ (fonction constante).
   Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminons, si possible, le nombre dérivé de ℓ en a.
   Soit $h \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\tau_\ell(a,h+a) &= \frac{\ell(h+a)-\ell(a)}{h}\\ &= \frac{3-3}{h}\\ &= \frac{0}{h}\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc : $\lim_{h\to 0} \tau_\ell(a,h+a) = 0$.
Autrement dit ℓ est dérivable en tout nombre a et sa dérivée est la fonction constante égale à 0 : $\ell' : x \mapsto 0$.

2. La fonction inverse n'est pas dérivable en 0 puisqu'elle n'est pas même définie en 0.
3. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 alors qu'elle est définie en 0 (revoyez la leçon sur le nombre dérivé).
4. Considérons la fonction $g : x \mapsto x^2 + 3x$ et calculons, si possible, $g'(7)$.
   Soit $h \in \mathbb{R}^*$.

   * D'une part

$$\begin{aligned}g(7+h) &= (7+h)^2 + 3(7+h)\\ &= h^2 + 17h + 70\end{aligned}$$

   * d'autre part

$$\begin{aligned}g(7) &= 7^2 + 3\times 7\\ &= 70\end{aligned}$$

   donc

$$\begin{aligned}\tau_g(7,h+7) &= \frac{\left(h^2+17h+70\right)-(70)}{h}\\ &= \frac{h^2+17h}{h}\\ &= \frac{h(h+17)}{h}\\ &= h+17\end{aligned}$$

Nous pouvons donc passer à la limite :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \tau_g(7,h+7) &= \lim_{h\to 0} h+17 \\ &= 17\end{aligned}$$

Ainsi g est dérivable en 7 et $f'(7) = 17$.

Nous pourrions refaire exactement toutes les mêmes étapes pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque plutôt que 7 et nous aurions obtenu de même que g est dérivable en a et $g'(a) = 2a+3$. Autrement dit g est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $g' : x \mapsto 2x+3$.

5. Pour la fonction $f : x \mapsto 2x+1$ nous pouvons calculer le nombre dérivé en 3 : $f'(3) = 2$. Rappelons que la courbe représentative d'une fonction affine est une droite qui se confond avec ses tangentes donc le nombre dérivé est son coefficient directeur. Donc f est dérivable en 3.

   Nous remarquons que nous pourrions calculer ce nombre dérivé en n'importe quelle valeur réelle x_0 : $f'(x_0) = 2$. Donc f est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto 2$ (fonction constante égale à 2).

Remarques.

1. La question de l'ensemble de dérivabilité, pour ceux qui veulent poursuivre des études mathématiques, est importante. Pour les autres, elle peut être survolée.
2. Une fonction peut être dérivable sur tout son ensemble de définition ou sur une partie de celui-ci voire même nulle part (page Wikipédia).
3. Nous allons voir des procédés pour trouver rapidement et assez simplement des fonctions dérivées. Nous n'utiliserons plus les limites de taux de varaition qu'en de rares occasions (cas difficiles, résultats généraux).

II Fonctions dérivées classiques.

Les fonctions dérivées des fonctions de références vont nous servir un grand nombre d'autres fonctions.

Le formulaire suivant est donc à connaître. Ainsi que les démonstrations pour les fonctions carré et inverse.

- Fonctions constantes.

  $f : x \mapsto b$, avec $b \in \mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0.$$

Exemple.
La fonction constante égale à 0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est 0.

- Fonction identité.
  $f : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1.$$

Démonstration 1
Démontrons la formule pour la fonction identité.
Nous allons démontrer qu'il est toujours possible de trouver le nombre dérivé de la fonction identité et préciser sa valeur.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Calculons le nombre dérivé de f en x_0.

Le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$ est

$$\tau_f(x_0,h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Comme f est la fonction identité $\left\{ \begin{array}{l} f(x_0+h) = x_0 + h \\ f(x_0) = x_0 \end{array} \right.$.
Donc le taux d' accroissement s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_f(x_0,h) &= \frac{x_0 + h - x_0}{h} \\ &= \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et clairement : $\lim_{h \to 0} 1 = 1$.
Ainsi

quelque soit x_0 choisi dans $\mathbb{R}$, le nombre dérivé de f est 1.

- Fonction carré.
  $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x.$$

Démonstration 2 ★ ♥

Nous allons tout simplement calculer le nombre dérivé en a. Nous ne remplaçons pas a par une valeur particulière car nous voulons être sûr que le résultat fonctionnera pour n'importe quel nombre.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Démontrons que f est dérivable en a et que $f'(a) = 2a$.

Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Déterminons $\tau_f(a,a+h)$.
D'une part :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (a+h)^2 \\ &= a^2 + 2ah + h^2 \end{aligned}$$

d'autre part

$$f(a) = a^2$$

et

$$\tau_f(a,a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

donc

$$\begin{aligned} &= \frac{(a^2 + 2ah + h^2) - (a^2)}{h} \\ &= \frac{h^2 + 2ah}{h} \\ &= \frac{h(h+2a)}{h} \\ &= h + 2a \end{aligned}$$

En passant à la limite :

$$\lim_{h \to 0} \tau_f(a,a+h) = \lim_{h \to 0} h + 2a = 2a.$$

Par conséquent f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

La démonstration étant valable pour tout $a \in \mathbb{R}$,

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$ pour tout x réel.

- Fonction cube.
  $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2.$$

- Fonction inverse.
  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Démonstration 3 ★ ♥

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

Démontrons que f est dérivable en a et que $f'(a) = 2a$.

Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Déterminons $\tau_f(a,a+h)$.

D'une part :

$$f(a+h) = \frac{1}{a+h}$$

d'autre part

$$f(a) = \frac{1}{a}$$

et

$$\tau_f(a,a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

donc

$$= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{h}}{h}$$

Diviser par h c'est multiplier par son inverse :

$$\begin{aligned}\tau_f(a,a+h) &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}\right)\\ &= \frac{-h}{h(a+h)a}\\ &= \frac{-1}{a^2+ha}\end{aligned}$$

En passant à la limite :

$$\lim_{h\to 0}\tau_f(a,a+h) = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{a^2+ha} = -\frac{1}{a^2}.$$

Par conséquent f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

> f est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ pour tout x réel.

- Fonction puissance d'un entier relatif.
  $f : x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$, est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ et sur $I = \mathbb{R}^*$ si $n < 0$, et

$$\forall x \in I,\ f'(x) = nx^{n-1}.$$

Exemples.

(a) Si $f : x \mapsto x^4$ alors $f' : x \mapsto 4x^3$.

(b) Si $f : x \mapsto x^{-3}$ alors $f' : x \mapsto -3x^{-4}$. Autrement dit : $f' : x \mapsto -\frac{3}{x^4}$

(c) Nous retrouvons pour $n = 0$ le cas de la fonction constante égale à 1.

(d) Nous retrouvons pour $n = 1$ le cas de la fonction identité.

(e) Nous retrouvons pour $n = -1$ le résultat de la fonction inverse.

Nous ne démontrons pas pour l'instant ce résultat pour $n < 1$ car nous verrons plus loin un résultat pour le faire.

- Fonction racine carrée.
  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
  $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
- Fonction cosinus. Nous ne l'avons pas encore introduite, ce résultat est donc rétroactif.
  $f : x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin(x).$$
- Fonction sinus. Nous ne l'avons pas encore introduite, ce résultat est donc rétroactif.
  $f : x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x).$$

Faites-vous un petit tableau comme celui-ci et apprenez-le.

Fonction f	Ensemble de dérivabilité	Dérivée f'
c avec $c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
x^n avec $n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$

Remarques.

1. Nous avons démontrer la plus part de ces résultats dans la leçon sur les nombres dérivés et les tangentes.

2. Rappelons les notations pour les ensembles : $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$, $\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$.
3. Les dérivées des fonctions d'expressions algébriques 1, x, x^2, x^3 sont des cas particuliers de x^n.
4. Il existe une formule générale pour toutes ces dérivées (hormis les fonctions cosinus et sinus).
   Si $f(x) = x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
   Avec les notations et conventions suivantes : $1 = x^0$, $x = x^1$, $\frac{1}{x} = x^{-1}$ et $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (l'explication de cette dernière notation viendra avec l'introduction de la fonction exponentielle).
5. Les ensembles de dérivabilité coïncident avec les ensembles de définition sauf pour la fonction racine carrée. Nous avons vu dans la leçon Tangente et nombre dérivé. exercice 4) que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en zéro.

Exercice 1. Application.
Exercices 79 et 80 page 123 du manuel Indice.

III Combiner les dérivations.

Les dérivées classiques ci-dessus sont trop peu nombreuses. Afin d'étendre le champ des fonctions que nous saurons dériver nous allons combiner ces fonctions de références ci-dessus par différents procédés.

Il faudra donc, pour trouver la fonction dérivée d'une fonction f, reconnaître dans son expression algébrique, les fonctions de références.

Ainsi dans

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{x}}{3x^2 + 4x + 7},$$

nous reconnaissons les fonctions racine carrée, inverse, carrée, identité, constante (voire un trinôme).

Pas d'exemple pour les différentes formules car les exercices sont des exemples. Donc il faut les faire ensemble. Donc pas noté exercice d'application.

1 Dérivée d'une somme de fonctions.

Proposition 1

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I alors $u+v$ est dérivable sur I et
$$(u+v)' = u' + v'$$

Démonstration 4

Ce résultat découle du fait que $\tau_{f+g}(a,h) = \tau_f(a,h) + \tau_g(a,h)$ et le passage à la limite, lui aussi, respecte l'addition lorsque les limites existent.

Remarques.

1. Incidemment dans cette proposition nous définissons une addition, non pas entre des nombres, mais entre des fonctions : la somme des fonctions u et v est une nouvelle fonction notée $u+v$ dont la définition est intuitive. $<$

Exercice 2.

Déterminez la fonction dérivée de $f : \left\{ \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} + \sqrt{x} \end{array} \right.$.

Correction exercice 2

Déterminons f'.

* Identification de fonctions de références.
  $f = u + v$ avec $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
* Détermination de l'ensemble de dérivabilité (pour ceux qui veulent poursuivre les maths).
  Or u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f = u + v$ est dérivable sur $\mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^*$.
* Formule de f' avec des fonctions :
$$f' = u' + v'$$
* Rappel des formules de u' et v'.
  Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$u'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
* Détermination de l'expression algébrique de f'.
  donc

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En plus d'être encombrée d'explications méthodologiques la rédaction ci-dessus est très lourde pour la dérivation d'une simple somme. Voici un rédaction très allégée possible :

Déterminons f'.

f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2 Dérivée d'une fonction multipliée par un nombre.

Proposition 2

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si α est un nombre réel (fixé) alors αu est dérivable sur I et

$$(\alpha u)' = \alpha u'$$

Démonstration 5

Ce résultat découle du fait que $\tau_{\alpha f}(a,h) = \alpha\tau_f(a,h)$ et que le passage à la limite, lui aussi, respecte la multiplication par une constante lorsque la limites existe.

Exercice 3.

Déterminez la fonction dérivée de $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ sur son ensemble de définition dans les cas suivants :

1. $f(x) = 3x^2$ quelque soit x pris dans $\mathbb{R}_+^*$,
2. $f(x) = -x^3$ quelque soit x pris dans $\mathbb{R}_+^*$,
3. $f(x) = \frac{-2}{x}$ quelque soit x pris dans $\mathbb{R}_+^*$,

Correction exercice 3

1. Déterminons f'.

* Identification de fonctions de références.
  $f = \alpha u$ avec $\alpha = 3$ et $u : x \mapsto x^2$.
* Détermination de l'ensemble de dérivabilité (pour ceux qui veulent poursuivre les maths).
  Or u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f = \alpha u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
* Formule de f' avec des fonctions :

$$f' = \alpha u'$$

* Rappel de formule de u'.
  Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$.
* Détermination de l'expression algébrique de f'.
  donc

$$f'(x) = 3 \times 2x.$$

$$\boxed{f'(x) = 6x, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

2. Déterminons f'.

Remarquons que $-x^3 = -1 \times x^3$.
$f = \alpha u$ avec $\alpha = -1$ et $u : x \mapsto x^3/$
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f' = \alpha u'$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -1 \times 3x^2.$$

Finalement

$$\boxed{f'(x) = -3x^2 \text{ quelque soit } x \in \mathbb{R}.}$$

3. Déterminons f'.

Remarquons que $\frac{-2}{x} = -2 \times \frac{1}{x}$.
$f = \alpha u$ avec $\alpha = -2$ et $u : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$f' = \alpha u'$$

Donc :

$$f'(x) = -2 \times \frac{-1}{x^2}$$

Finalement

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{x^2} \text{ quelque soit } x \in \mathbb{R}^*.}$$

Exercice 4. Application.

Exercice 81 page 123 du manuel Indice.

3 Dérivée d'une fonction polynomiale.

Corollaire 1

Les fonctions polynomiales $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (avec a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} et a_n des réels) sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et quelque soit le réel x

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

Démonstration 6

Il s'agit d'un corollaire des deux précédentes propositions. C'est en itérant ces derniers qu'on obtient ce résultat.

Remarques.

1. La formule de la dérivée d'une fonction polynomiale n'est pas à connaître par cœur. Il faut savoir calculer la dérivée dans la pratique (exercice ci-dessous).
2. En mathématique, une somme de termes répétitifs (mais pas égaux), est notée avec la lettre grecque sigma majuscule (Σ). La fonction polynomiale s'écrira donc $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.
3. Dorénavant les fonctions polynomiales seront considérées comme des fonctions de références.

Exercice 5.

Déterminez la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

1. $f(x) = -2x + 7$, quelque soit $x \in \mathbb{R}$,
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$, quelque soit $x \in \mathbb{R}$,
3. $f(x) = -6x^7 - x^5$, quelque soit $x \in \mathbb{R}$.

Correction exercice 5

1. Déterminons f'.

   f est une fonction polynomiale (et même affine) donc elle dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée quelque soit $x \in \mathbb{R}$ par

   $$f'(x) = -2 \times 1 + 0.$$

   $$\boxed{f'(x) = -2}$$

2. Déterminons f'.

   f est une fonction polynomiale donc elle dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée,quelque soit $x \in \mathbb{R}$, est

   $$f'(x) = 3x^2 - 6 \times 2x + 0$$

   $$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 12x}$$

3. Déterminons f'.♥

   f est une fonction polynomiale donc elle dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée,quelque soit $x \in \mathbb{R}$, s'obtient par

   $$f'(x) = -6 \times 7x^6 - 1 \times 5x^4$$

   $$\boxed{f'(x) = -42x^6 - 5x^4}$$

Exercice 6. Application.

Exercices 49, 50, 51 et 52 page 121 du manuel Indice de première.

Correction exercice 6

Exercice 49 page 121.
$f'(x) = 6x^2 - x$ et $g(x) = -6x^2 - 6x + 4$.

Exercice 50 page 121.
$f'(x) = 8x - 2$ et $g'(x) = -3x^2 - 14x + \frac{1}{7}$.

Exercice 51 page 121.
$f'(x) = -2x^2 + 2x + 7$ et $g'(x) = 4x - 9x^2$.

Exercice 52 page 121.
$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g'(x) = x^2 - x + \frac{4}{x^2}$.

Exercice 7. Application.

Exercices 70, 71 et 72 page 122 et 86, 88 et 97 page 123. Dérivation et tangente.

Correction exercice 7

Exercice 70 page 122.

(a) $f'(x) = 4x - 4$.

(b) $f'(-1) = -8$ donc $y = -x + 4$.

Exercice 71 page 122.

(a) $f'(x) = 36x^5 + 25x^4 + 16x^3 + 9x^3 + 4x + 1$.

(b) $f'(0) = 1$.

Exercice 72 page 122.

(a) $f'(x) = 2x - 4$ donc $f'(1) = -2$.
$g'(x) = -4x + 2$ donc$g'(1) = -2$.
$f'(1) = g'(1)$ donc $T \parallel \mathscr{D}$.

(b) $f(1) = -3$ et $g(1) = -3$ donc elles sont confondues.

Exercice 86 page 123.

(a) Pour $x \in]-\infty; 2]$ la courbe est en-dessous de T et pour $x \in]2; +\infty[$ elle est au-dessus.

(b) $f'(x) = 3x^2$, $f'(-1) = 3$ et $f(-1) = -1$.

(c)

$$\begin{aligned}(x-2)(x+1)^2 &= (x-2)(x^2+2x+1)\\ &= x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2\\ &= x^3-3x-2\\ &= x^3-(3x+2)\end{aligned}$$

(d) $x^3 - (3x + 2) = 0 \Longleftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$. Donc : (2,8).

(e) Tableau de signe de $x \mapsto (x + 1)^2(x - 2) =$ puis interprétation.

Exercice 88 page 123.

(a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(1) = -3$ et $f(1) = -1$ donc $y = -x + 2$.

(b)

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

et

$$x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Par transitivité :

$$x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = (x-1)^3$$

(c)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^3$		$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{C}$ au-dessous de T sur $]-\infty;1]$ et au dessus- sur $[1;+\infty[$.

Exercice 97 page 126.

(a) $g'(-5)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -5 de la courbe représentative, $\mathscr{C}$, de la fonction g.
Autrement dit $g'(-5)$ est le coefficient directeur de T.
Par lecture graphique : $g'(-5) = 2$.

(b) $g'(x) = -x - 3$ donc $g'(-5) = 2$.

(c) $g'(-1) = -2$ donc la tangente cherchée passera par les points de coordonnées $(-1{,}0)$ et $(0,-2)$.

4 Dérivée d'un produit de fonctions.

Que se passe-t-il lorsqu'on veut dériver un produit de deux fonctions ? Nous aimerions qu'il suffise de multiplier les fonctions dérivées, mais hélas ça ne fonctionne pas.

Ainsi, pour $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 1$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, nous avons $f' : x \mapsto 2x$, $g' : x \mapsto 0$ et $(f \times g)' : x \mapsto 2x$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) \times g'(x) = 0 \quad \text{alors que} \quad (f \times g)'(x) = 2x.$$

Il faudra donc connaître le résultat suivant :

Proposition 3

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I alors uv est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Démonstration 7 ★

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle et $a \in I$.

Déterminons si possible $(uv)'(a)$

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $a \in I$.

Par définition du taux d'accroissement de uv (qui doit être vue comme une fonction) entre a et $a+h$:

$$\begin{aligned}
\tau_{uv}(a,h) &= \frac{uv(a+h) - uv(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h) \times v(a+h)}{h} - \frac{u(a) \times v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)}{h} \cdot v(a+h) - \frac{u(a) \times v(a)}{h}
\end{aligned}$$

Faisons apparaître le taux d'accroissement de u entre a et $a+h$ en soustrayant et additionnant la même quantité :

$$\begin{aligned}
\tau_{uv}(a,h) &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \cdot v(a+h) + \frac{u(a)}{h} \cdot v(a+h) - \frac{u(a)v(a)}{h} \\
&= \tau_{u(a,h)} \cdot v(a+h) + \frac{u(a)\left[v(a+h) - v(a)\right]}{h} \\
&= \tau_{u(a,h)} \cdot v(a+h) + u(a)\tau_v(a,h)
\end{aligned}$$

Puisque u est dérivable en a : $\lim_{h\to 0} \tau_u(a,h) = u'(a)$.
Puisque v est dérivable en a : $\lim_{h\to 0} \tau_v(a,h) = v'(a)$.
Puisque v est continue en a : $\lim_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$.
Finalement : $\lim_{h\to 0} \tau_{u(a,h)} \cdot v(a+h) + u(a)\tau_v(a,h) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.
Autrement dit uv est dérivable en a et $f'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

Nous avons démontré que $f = uv$ est dérivable en tout $a \in \mathring{I}$ et $f' = u'v + uv'$.

Exercice 8.

Déterminez la dérivée de la fonction f en précisant l'ensemble de dérivabilité dans les cas suivants.

1. $f(x) = x^2\sqrt{x}$,
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$,
3. $f(x) = (2x^2 + 3x - 1)(5x^3 - 7x)$,
4. $f(x) = 4(x + \sqrt{x})x^3$.
5. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.

Correction exercice 8

1. Déterminons f'. ♥

   * Identification de fonctions de références.
     $f = u \times v$ avec $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
   * Détermination de l'ensemble de dérivabilité (pour ceux qui veulent poursuivre les maths).
     Or u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f = uv$ est dérivable sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^*$.
   * Formule de f' avec des nombres :

   $$f' = u'v + uv'$$

   * Rappel des formules de u' et v'.
     Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

   $$u'(x) = 2x \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

   * Détermination de l'expression algébrique de f'.
     donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2x \times \sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

   $$\boxed{f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}, \text{ quelque soit } x \in \mathbb{R}_+^*.}$$

2. Déterminons f'.

   Nous remarquons que $\frac{\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x} \times \frac{1}{x}$.

   $f = uv$ avec $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{x}$.
   Or u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $f = uv$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^*$ et

   $$f' = u'v + uv'.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{-1}{x^2},$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{x} + \sqrt{x} \times \frac{-1}{x^2}$$

Enfin

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x^2}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.}$$

3. Déterminons f'.

$f = uv$ avec $u : x \mapsto 2x^2 + 3x - 1$ et $v : x \mapsto 5x^3 - 7x$.
Or u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $f = uv$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f' = u'v + uv'.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) = 4x + 3 \quad \text{et} \quad v'(x) = 15x^2 - 7,$$

donc

$$f'(x) = (4x + 3) \times (5x^3 - 7x) + (2x^2 + 3x - 1) \times (15x^2 - 7).$$

Enfin en développant, réduisant puis ordonnant

$$\boxed{f'(x) = 50x^4 + 60x^3 - 57x^2 - 42x + 7 \text{ pour tout réel } x.}$$

4. Déterminons f'.

$f = \alpha uv$ avec $\alpha = 4$, $u : x \mapsto x + \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto x^3$.
Or u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f = \alpha uv$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f' = \alpha(u'v + uv').$$

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$u'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad v'(x) = 3x^2,$$

donc

$$\boxed{f'(x) = 4\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times x^3 + 4(x + \sqrt{x}) \times 3x^2, \text{ quelque soit } x \in \mathbb{R}_+^*.}$$

Exercice 9. Application.
Exercices 55, 56, 57 et 58 page 122 du manuel Indice de première.

Correction exercice 9

Exercice 55 page 122.

(a) $f = uv$ avec $u : x \mapsto x^3$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
Or u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v sur $]0;+\infty[$ donc $f = uv$ est dérivable sur $\mathbb{R} \cap]0;+\infty[=]0;+\infty[$.

(b) Pour tout $x \in]0;+\infty[$
$u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2\sqrt{x} + x^3\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \end{aligned}$$

Exercice 56 page 122.
$f'(x) = 3x\sqrt{x} + 3x^2\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 57 page 122.
$g'(x) = 2(2x+5)(x^2+5x-1)$.

Créer un exercice général dérivée d'une fonction à une puissance.

Exercice 58 page 122.
$h'(x) = 6(3x-4)$.

5 Dérivée d'un quotient de fonctions.

Proposition 4

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et si v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Démonstration 8

Soient $f = \frac{u}{v}$ et $x_0 \in I$.

Démontrons que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2}$.

Nous commençons à être rodés : nous allons déterminer la limite d'un taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$.

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 \in I$.

$$\begin{aligned}
\tau_f(x_0,x_0+h) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \frac{\frac{u}{v}(x_0+h)-\frac{u}{v}(x_0)}{h} \\
&= \frac{\frac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h} \\
&= \frac{\frac{u(x_0+h)v(x_0)}{v(x_0+h)}-\frac{u(x_0)v(x_0+h)}{v(x_0)v(x_0+h)}}{h} \\
&= \frac{\frac{u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0+h)}{v(x_0)v(x_0+h)}}{h} \\
&= \frac{u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0+h)}{hv(x_0)v(x_0+h)} \\
&= \frac{u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)-u(x_0)v(x_0+h)+u(x_0)v(x_0)}{hv(x_0)v(x_0+h)} \\
&= \frac{[u(x_0+h)-u(x_0)]\,v(x_0)-u(x_0)\,[v(x_0+h)-v(x_0)]}{hv(x_0)v(x_0+h)} \\
&= \frac{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}v(x_0)-u(x_0)\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}{v(x_0)v(x_0+h)}
\end{aligned}$$

Passons maintenant à la limite lorsque h tend vers 0.

- $\lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} = u'(x_0)$, car u est dérivable en x_0.
- $\lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h} = v'(x_0)$, car v est dérivable en x_0.
- $\lim_{x\to 0} v(x_0+h) = v(x_0)$ car v est continue en x_0.

Donc $\lim_{h\to 0} \tau_f(x_0,x_0+h) = \frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$.

Ainsi

f est dérivable en x_0 et $\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$.

Remarques.

1. Une des principales utilisations des fonctions dérivées en première nécessite d'étudier leur signe. Le dénominateur, v^2, est toujours positif. Le signe de la fonction dérivée est donc celui du numérateur.

Exercice 10.

Déterminez les fonctions dérivées des fonctions de la variable x suivantes.

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$,
2. $f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 1}{x - 1}$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x^3}$.
4. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Correction exercice 10

1. Déterminons f'.♥

   $f = \frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto x^2$.
   u est dérivable sur $\mathbb{R}$, v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v s'annule (uniquement) en 0 donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ et

   $$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

   De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

   $$u'(x) = 0 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x,$$

   donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

   $$f'(x) = \frac{0 \times x^2 + 1 \times 2x}{(x^2)^2}.$$

   Donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

   $$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

   Donc

   $$f'(x) = \frac{0 \times x^2 - 1 \times 2x}{(x^2)^2}$$

   Enfin

   $$\boxed{f'(x) = -\frac{2}{x^3} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*.}$$

2. Déterminons f'.

   $f = \frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 2x^3 - 2x + 1$ et $v : x \mapsto x - 1$.
   Or u est dérivable sur $\mathbb{R}$, v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v s'annule en 1 donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et
   $$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$
   De plus pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   $$u'(x) = 6x - 2 \quad \text{et} \quad v'(x) = 1,$$
   donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   $$f'(x) = \frac{(6x-2)(x-1) - (2x^3 - 2x + 1)1}{(x-1)^2}.$$
   Enfin
   $$\boxed{f'(x) = \frac{-2x^3 - 6x^2 - 6x + 3}{x^2 - 2x + 1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*.}$$
3. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}x^3 - (x-1)3x^2}{(x^3)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. $f'(x) = \frac{1}{[\cos(x)]^2} = 1 + [f(x)]^2$.

Exercice 11. Application.

Exercices 60 jusqu'à 69 page 122.

Correction exercice 11

Exercice 60 page 122.
$f'(x) = -\frac{1}{(3x-12)^2}$.

Exercice 61 page 122.
$f'(x) = -\frac{1}{(-5x+2)^2}$.

Exercice 62 page 122.
$i'(x) = -\frac{1}{(x^2-3x+5)^2}$.

Exercice 63 page 122.
$j'(x) = \frac{2}{(7x+2)^2}$.

Exercice 64 page 122.
$k'(x) = -\frac{3}{(0{,}5x^2+1)^2}$.

Exercice 65 page 122.
$l'(x) = -4 - \frac{\sqrt{x}}{x^2}$.

Exercice 66 page 122.
$m'(x) = \frac{4(x^2+x)-(4x-3)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{-4x^2-6x+3}{(x^2+x)^2}$.

Exercice 67 page 122.
$n'(x) = \frac{(-6x+4)(x^4+x^2+1)-(-3x^2+4x+1)(4x^3+2x1)}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{6x^5-12x^4+4x^3-4x^2-8x+4}{(x^4+x^2+1)^2}$.

Exercice 68 page 122.
$f(x) = 2x - \frac{4}{3}$ et $g(c) = 8x - 5 + \frac{1}{x}$ donc $f'(x) = 2$ et $g'(x) = 8 - \frac{1}{x^2}$.

Exercice 69 page 122.
$f'(x) = \frac{-9x^3-18x^2-79x+52}{(-3x+4)^2} = -1 + \frac{-8}{(-3x+4)^2}$.

Exercice 12. Application.

Exercice 89 page 124 du manuel Indice.

Correction exercice 12

1. $f'(x) = -\frac{8}{(x-2)^2}$.
2. (a) $2 + \frac{8}{x-2} = \frac{2(x-2)+8}{x-2}$.
   (b) $f'(x) = -\frac{8}{(x-2)^2}$.
3. (a) $f'(3) = -\frac{8}{(3-2)^2} = -8$.
   (b) $y = -8(x-3) + f(3)$.
4. (a) On part du membre de gauche et on met au même dénominateur.
   (b) $f(x) - (-8x + 34) = 8(x-2)$. donc du signe de $x - 2$ donc strictement positif sur I. $\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur I.

6 Dérivée de fonctions composées.

Introduction avec $\sqrt{3x+1}$ pour réfléchir sur les intervalles. Est-ce un fonction classique ? Est-ce un produit ou quotient de fonctions classiques ?

Proposition 5

Soient :

. a et b des réels.

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. J un intervalle tel que J contient toutes les images des éléments de I par $x \mapsto ax + b$,

. $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction f définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = g(ax + b)$ est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$f'(x) = ag'(ax + b).$$

Remarques.

1. Contrairement à ce que nous faisions pour les précédentes formule des dérivation, dans ce cas, nous ne nous préoccuperons pas de l'ensemble de dérivabilité. Dans les rédactions nous ne justifierons pas l'ensemble de dérivabilité.
2.

   Ajustement de modèle très courant dans les sciences expérimentales en remplaçant x par une fonction affine.

3. Ce résultat se généralise à d'autres fonctions que les fonctions affines. En notant $g \circ h$ la fonction en appliquant la fonction h puis le fonction g :

$$(g \circ h)' = g' \circ h \times h'.$$

Exercice 13.

Déterminez les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x - 4}$ sur $]2; +\infty[$.
2. $g : x \mapsto (-2x + 9)^{237}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h : x \mapsto \frac{1}{x+\pi}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\pi\}$.
4. $l : x \mapsto x^2\sqrt{-x + 4}$ sur $]-\infty,4[$.

Correction exercice 13

1. Déterminons f'. ♥

   * Identification de fonctions de références.
     $f(x) = g(ax + b)$ avec $g : x \mapsto \sqrt{x}$, $a = 2$ et $b = -4$.

* Formule de f' :

$$f'(x) = ag'(ax+b)$$

* Rappel de la formule de g'.

Or, pour tout $x \in]2;+\infty[$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

* Détermination de l'expression algébrique de f'.

donc pour tout $x \in]2;+\infty[$, $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-4}}$.

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$, quelque soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. $g'(x) = -474(-2x+9)^{236}$.
3. $h'(x) = -\frac{1}{(x-\pi)^2}$.
4. $l'(x) = 2x\sqrt{-x+1} + x^2 \times \frac{-1}{2\sqrt{-x+4}}$.

Exercice 14. Application.

Exercice 77 et 78 page 123 du manuel Indice.

IV Étude de la fonction valeur absolue.

1 Définition.

Définition 2

Nous appellerons *fonction valeur absolue* et nous noterons $|\cdot|$ la fonction numérique définie pour tout x réel par

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

Remarques.

1. Cette définition correspond à l'idée intuitive de la valeur absolue : si c'est un nombre négatif on prend l'opposé.
2. Le lien avec la définition vue au collège à savoir la distance entre 0 et x est peut être moins évident.

2 Caractérisations.

Proposition 6

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(i) $|x| = \max(x, -x)$,

(ii) $|x| = \sqrt{x^2}$.

Démonstration 9

(i) Par disjonction des cas : si $x \geqslant 0$ alors $\max(x, -x) = x = |x|$, sinon ...

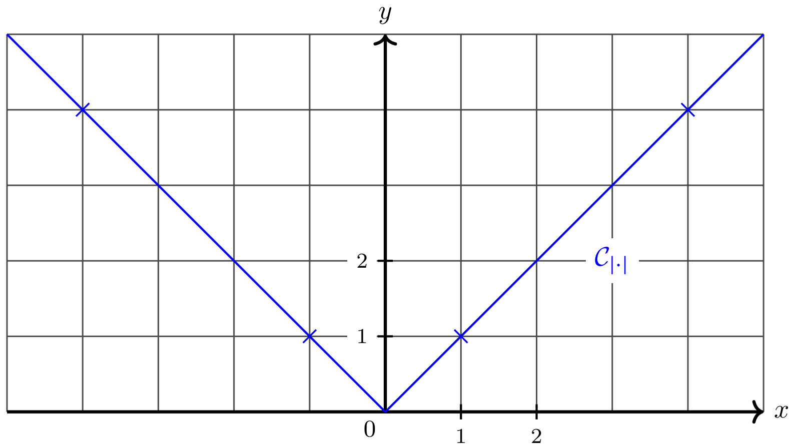
(ii) Car $\sqrt{x^2}$ est l'unique nombre positif qui élevé au carré égale x^2.

Remarques.

1. Quand, en mathématique, on donne plusieurs formulation d'un même résultat (nous appellerons cela des caractérisations) c'est pour mettre en évidence différents aspects d'un même objet.

3 Étude de la fonction valeur absolue.

Sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+$, $|\cdot|$ coïncide avec des fonctions affines, donc sa courbe représentative est formée de deux demi-droites.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$|\cdot|$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert\cdot\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

4 Dérivabilité de la fonction valeur absolue.

Nous nous souvenons que nous avons établi que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en zéro. En effet, pour cette fonction, le taux d'accroissement en 0 augmente (indéfiniment) lorsque h se rapproche de 0. Une demi-tangente verticale en zéro se fait jour.

Nous allons voir une autre situation où une fonction ne peut pas être dérivable.

Nous allons établir que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Essayons de conjecturer graphiquement le résultat avec une calculatrice. Pour cela la formulation la plus simple est la deuxième. Essayons d'agrandir la courbe au voisinage de l'abscisse 0.

Quelque soit l'agrandissement choisi nous ne voyons pas une droite se dessiner. Nous retrouvons indéfiniment la forme en piquant.

Comment expliquer ceci ? Nous savons que la tangente à une fonction affine est la droite représentant cette fonction. Or la fonction valeur absolue est une fonction affine par morceaux. Mais en l'abscisse 0 il semble y avoir deux tangentes. Du côté gauche la tangente semble avoir pour équation $y = -x$ et du côté droit la tangente semble avoir pour équation $y = x$.

Cette situation se produira sur toutes les courbes présentant des piquants.

Vérifions en utilisant la définition du nombre dérivé qu'effectivement la fonction n'est pas dérivable en 0.

Proposition 7

$|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

Démonstration 10

La première expression est trop peu calculatoire pour nous. La seconde qui fait intervenir fonctions carrée et racine carrée rend le calcul d'un taux d'accroissement complexe. La troisième qui ne fait intervenir que des fonctions affines aura donc notre préférence.

Déterminons le taux d'accroissement de $|\cdot|$.

Quelque soit $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \tau_{|\cdot|}(0,h) &= \frac{|0-h|-|0|}{h} \\ &= \frac{|h|}{h} \end{aligned}$$

Nous devons distinguer deux cas car, suivant que h est positif ou non, il y aura deux formules différentes.

(i) Si $h \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{aligned} \tau_{|\cdot|}(0,h) &= \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{h\to 0} = \lim_{h\to 0} \tau_{|\cdot|}(0,h) = 1$.
Par conséquent $|\cdot|$ est dérivable à droite en 0 est son nombre dérivé à droite est 1.

(ii) En procédant de même pour h négatif nus obtenons que $|\cdot|$ est dérivable à gauche et que le nombre dérivé à gauche est -1.

Nous avons pas pu trouver <u>une</u> limite pour le taux d'accroissement donc $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

V Exercices.

Exercice 15.
Exercices 90, 91 et 92 page 124 du manuel Indice : vitesse instantanée.

VI Ce qu'il faut retenir.

1. Connaître toutes les dérivées classiques (y compris les fonctions polynomiales) et leurs ensembles de dérivabilité.
2. Connaître les combinaisons de fonctions pour dériver (somme, produits, quotient, composée).
3. Connaître le contre-exemple typique : valeur absolue.