Fonction dérivée.

Dans cet leçon l'intervalle I est supposé non vide et non réduit à un point.

I Nombre et fonction dérivés.

Définition 1

Soient :

. I un intervalle,

. $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

S'il est possible de calculer le nombre dérivé de f en $x_0 \in I$, *i.e.* $f'(x_0)$, nous dirons que f est *dérivable en x_0*.

Si f dérivable en tous les points de I nous dirons que *f est dérivable sur I* et que sa *fonction dérivée* est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

Remarques.

Remarques.

1. La question de l'ensemble de dérivabilité, pour ceux qui veulent poursuivre des études mathématiques, est importante. Pour les autres, elle peut être survolée.
2. Nous allons voir des procédés pour trouver rapidement et assez simplement des fonctions dérivées. Nous n'utiliserons plus les limites de taux de varaition qu'en de rares occasions (cas difficiles, résultats généraux).

II Fonctions dérivées classiques.

Les fonctions dérivées des fonctions de références vont nous servir un grand nombre d'autres fonctions.

Le formulaire suivant est donc à connaître. Ainsi que les démonstrations pour les fonctions carré et inverse.

- Fonctions constantes.

  $f : x \mapsto b$, avec $b \in \mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0.$$

- Fonction identité.
  $f : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1.$$

- Fonction carré.
  $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x.$$

- Fonction cube.
  $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2.$$

- Fonction inverse.
  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

- Fonction puissance d'un entier relatif.
  $f : x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$, est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ et sur $I = \mathbb{R}^*$ si $n < 0$, et
$$\forall x \in I,\ f'(x) = nx^{n-1}.$$

- Fonction racine carrée.
  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Remarques.

Remarques.

1. Nous avons démontrer la plus part de ces résultats dans la leçon sur les nombres dérivés et les tangentes.
2. Rappelons les notations pour les ensembles : $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$, $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$.
3. Les dérivées des fonctions d'expressions algébriques 1, x, x^2, x^3 sont des cas particuliers de x^n.

4. Il existe une formule générale pour toutes ces dérivées (hormis les fonctions cosinus et sinus).
   Si $f(x) = x^{\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.
   Avec les notations et conventions suivantes : $1 = x^0$, $x = x^1$, $\frac{1}{x} = x^{-1}$ et $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (l'explication de cette dernière notation viendra avec l'introduction de la fonction exponentielle).
5. Les ensembles de dérivabilité coïncident avec les ensembles de définition sauf pour la fonction racine carrée. Nous avons vu dans la leçon Tangente et nombre dérivé. exercice 4) que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en zéro.

Exercice 1. Application.
Exercices 79 et 80 page 123 du manuel Indice.

III Combiner les dérivations.

Les dérivées classiques ci-dessus sont trop peu nombreuses. Afin d'étendre le champ des fonctions que nous saurons dériver nous allons combiner ces fonctions de références ci-dessus par différents procédés.

1 Dérivée d'une somme de fonctions.

Proposition 1

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I alors $u+v$ est dérivable sur I et

$$(u+v)' = u' + v'$$

Remarques.

Remarques.

1. Incidemment dans cette proposition nous définissons une addition, non pas entre des nombres, mais entre des fonctions : la somme des fonctions u et v est une nouvelle fonction notée $u+v$ dont la définition est intuitive. $<$

Exercice 2.
Déterminez la fonction dérivée de $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} + \sqrt{x} \end{array} \right.$.

2 Dérivée d'une fonction multipliée par un nombre.

Proposition 2

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si α est un nombre réel (fixé) alors αu est dérivable sur I et

$$(\alpha u)' = \alpha u'$$

Exercice 3.

Déterminez la fonction dérivée de $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ sur son ensemble de définition dans les cas suivants :

1. $f(x) = 3x^2$ quel que soit x pris dans $\mathbb{R}_+^*$,
2. $f(x) = -x^3$ quel que soit x pris dans $\mathbb{R}_+^*$,
3. $f(x) = \frac{-2}{x}$ quel que soit x pris dans $\mathbb{R}_+^*$,

Exercice 4. Application.

Exercice 81 page 123 du manuel Indice.

3 Dérivée d'une fonction polynomiale.

Corollaire 1

Les fonctions polynomiales $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (avec a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} et a_n des réels) sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et quel que soit le réel x

$$f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$$

Remarques.

1. La formule de la dérivée d'une fonction polynomiale n'est pas à connaître par cœur. Il faut savoir calculer la dérivée dans la pratique (exercice ci-dessous).
2. En mathématique, une somme de termes répétitifs (mais pas égaux), est notée avec la lettre grecque sigma majuscule (Σ). La fonction polynomiale s'écrira donc $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

3. Dorénavant les fonctions polynomiales seront considérées comme des fonctions de références.

Exercice 5.
Déterminez la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

1. $f(x) = -2x + 7$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,
3. $f(x) = -6x^7 - x^5$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Application.
Exercices 49, 50, 51 et 52 page 121 du manuel Indice de première.

Exercice 7. Application.
Exercices 70, 71 et 72 page 122 et 86, 88 et 97 page 123. Dérivation et tangente.

4 Dérivée d'un produit de fonctions.

Que se passe-t-il lorsqu'on veut dériver un produit de deux fonctions ? Nous aimerions qu'il suffise de multiplier les fonctions dérivées, mais hélas ça ne fonctionne pas.

Ainsi, pour $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 1$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, nous avons $f' : x \mapsto 2x$, $g' : x \mapsto 0$ et $(f \times g)' : x \mapsto 2x$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) \times g'(x) = 0 \quad \text{alors que} \quad (f \times g)'(x) = 2x.$$

Il faudra donc connaître le résultat suivant :

Proposition 3

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I alors uv est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Exercice 8.

Déterminez la dérivée de la fonction f en précisant l'ensemble de dérivabilité dans les cas suivants.

1. $f(x) = x^2\sqrt{x}$,
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$,
3. $f(x) = (2x^2 + 3x - 1)(5x^3 - 7x)$,
4. $f(x) = 4(x + \sqrt{x})x^3$.
5. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.

Exercice 9. Application.

Exercices 55, 56, 57 et 58 page 122 du manuel Indice de première.

5 Dérivée d'un quotient de fonctions.

Proposition 4

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et si v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Remarques.

1. Une des principales utilisations des fonctions dérivées en première nécessite d'étudier leur signe. Le dénominateur, v^2, est toujours positif. Le signe de la fonction dérivée est donc celui du numérateur.

Exercice 10.

Déterminez les fonctions dérivées des fonctions de la variable x suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,
2. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 2x + 1}{x - 1}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^3}$.
4. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Exercice 11. Application.
Exercices 60 jusqu'à 69 page 122.

Exercice 12. Application.
Exercice 89 page 124 du manuel Indice.

6 Dérivée de fonctions composées.

Proposition 5

Soient :
. a et b des réels.
. I un intervalle de $\mathbb{R}$,
. J un intervalle tel que J contient toutes les images des éléments de I par $x \mapsto ax+b$,
. $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction f définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = g(ax+b)$ est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$f'(x) = ag'(ax+b).$$

Remarques.

1. Contrairement à ce que nous faisions pour les précédentes formule des dérivation, dans ce cas, nous ne nous préoccuperons pas de l'ensemble de dérivabilité. Dans les rédactions nous ne justifierons pas l'ensemble de dérivabilité.
2.
3. Ce résultat se généralise à d'autres fonctions que les fonctions affines. En notant $g \circ h$ la fonction en appliquant la fonction h puis le fonction g :

$$(g \circ h)' = g' \circ h \times h'.$$

Exercice 13.
Déterminez les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x-4}$ sur $]2; +\infty[$.
2. $g : x \mapsto (-2x+9)^{237}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h : x \mapsto \frac{1}{x+\pi}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\pi\}$.
4. $l : x \mapsto x^2\sqrt{-x+4}$ sur $]-\infty, 4[$.

Exercice 14. Application.
Exercice 77 et 78 page 123 du manuel Indice.

IV Étude de la fonction valeur absolue.

1 Définition.

Définition 2

Nous appellerons *fonction valeur absolue* et nous noterons $|\cdot|$ la fonction numérique définie pour tout x réel par

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

Remarques.

1. Cette définition correspond à l'idée intuitive de la valeur absolue : si c'est un nombre négatif on prend l'opposé.
2. Le lien avec la définition vue au collège à savoir la distance entre 0 et x est peut être moins évident.

2 Caractérisations.

Proposition 6

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(i) $|x| = \max(x, -x)$,

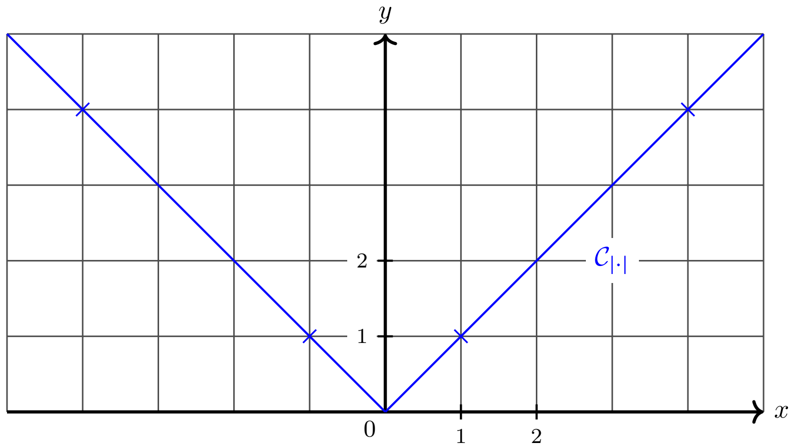
(ii) $|x| = \sqrt{x^2}$.

Remarques.

1. Quand, en mathématique, on donne plusieurs formulation d'un même résultat (nous appellerons cela des caractérisations) c'est pour mettre en évidence différents aspects d'un même objet.

3 Étude de la fonction valeur absolue.

Sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+$, $|\cdot|$ coïncide avec des fonctions affines, donc sa courbe représentative est formée de deux demi-droites.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert\cdot\rvert$		+	0	+	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert\cdot\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

4 Dérivabilité de la fonction valeur absolue.

Nous allons établir que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Proposition 7

$|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

V Exercices.

Exercice 15.

Exercices 90, 91 et 92 page 124 du manuel Indice : vitesse instantanée.