Nombre dérivé et tangente.

I Sécantes.

2021/09/16 finalement reprendre le point de vue purement graphique avec la position limite des sécantes, et la recherche d'un nombre qui représente l'inclinaison de la courbe (on en connaît déjà un le coefficient directeur mais ...)

Aborder le truc avec les courbes représentatives des fonctions sinus et valeur absolue. Si l'on fait zoom plus (en l'origine) nous remarquons que la courbe représentative de la fonction sinus ressemble à une droite alors que celle de valeur absolue reste toujours avec son piquant.

Ici refaire une introduction en abordant le problème avec l'aspect mathématicien de la question. Tangente et sécante limite.

$$f(x) = 0.5(x+4)(x+1)(x-2)$$

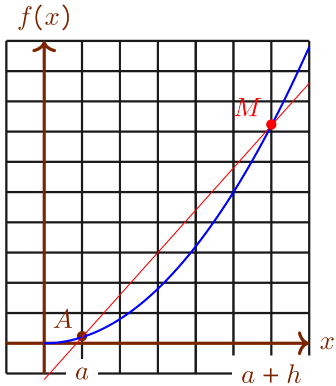
Quel est le lien entre tangente et nombre dérivé ? Déterminons le coefficient directeur d'une sécante et regardons sa valeur limite.

Déterminons graphiquement l'équation de la tangente.

Expliquer l'importance de la fonction affine de la tangente comme valeur approchée de la fonction. Bref le développement limité à l'ordre 1 est dans la pratique souvent utilisé comme approximation de la fonction.

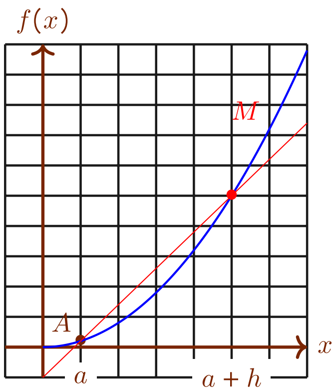
Comme bien souvent en mathématique c'est un point de vue géométrique qui est privilégié pour se représenter les objets. C'est aussi celui qui se généralise le plus simplement

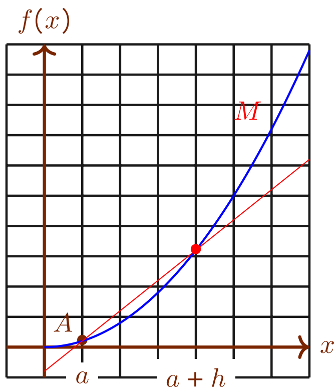
Nous avons rappelé que le taux d'accroissement correspond au coefficient directeur d'une certaine droite. Graphiquement, le taux d'accroissement d'une fonction f entre a et $a+h$ est le coefficient de la droite dessinée en rouge.

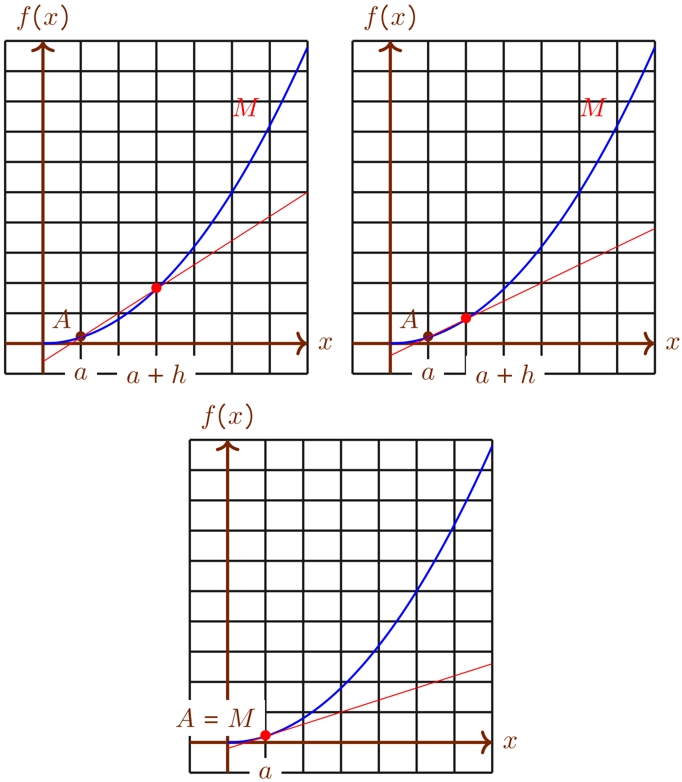


Si nous remplaçons h par 0, alors le deux points sont confondus et parler d'une droite n'a plus aucune sens. Nous retrouvons le problème rencontré avec le taux d'accroissement : nous ne pouvons pas remplacer h par 0.

De la même façon nous allons rendre h de plus en plus petit. Graphiquement cela revient à dire que nous rapprochons le point M de A.







Nous obtenons une droite qui semble posée sur la courbe représentative de la fonction. Cette droite sera appelée une *tangente* de la courbe.

Son coefficient directeur est le taux d'accroissement limite obtenu lorsque h se rapproche de 0. Autrement dit e coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé.

La courbe et la tangente semblent se confondre au voisinage du point A. Ceci correspond à un outil classique en mathématique, le développement limité. Ici, la fonction f, pour des valeurs de x pas trop loin de a, est semblable à une fonction affine : "$f(x) \approx ax+b$". Cette approximation est extrêmement riche en applications notamment dans l'ingénierie.

Sécante et tangente : illustration avec geogebra (télécharger le fichier : lien).

II Vitesse.

Nous aurions pu aborder la question par la construction mathématique des objets mais une façon de donner du sens à des objets mathématiques c'est de montrer ce qu'ils peuvent modéliser en physique (ou dans une autre science expérimentale). Ainsi les objets définis paraissent moins abstraits.

De plus, historiquement, les nombres dérivés furent développés dans le cadre de cette modélisation de la mécanique.

Une transition entre tangente et vitesse. Une approche supplémentaire à envisager en physique les élèves ont appris à dessiner des vecteurs instantané pour représenter une vitesse. or en mathématique qui dit vecteur, dit vecteur directeur et donc droite.

Dans cette partie nous considérons un skieur glissant sur une pente.

1 Vitesse moyenne.

Faire un schéma représentant la pente et la trajectoire du skieur. Indiquer distance et temps mis.

Le procédé est à reprendre et à adapter pour chaque calcul.

Si le skieur descend une pente de 500 m en 10 s, à quelle vitesse a-t-il descendu la pente ?

D'après le cours de physique nous savons que sa vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{t} \\ &= \frac{500 \text{ m}}{10 \text{ s}} \\ &= 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Peut-on se satisfaire de ce résultat ? En réalité une simple observation permet de constater que la vitesse du skieur n'a cessé d'augmenter.

Un relevé montre que le skieur avait parcouru les 125 premiers mètres en 5 s. À quelle vitesse cela correspond-t-il ?

En reprenant le précédant calcul nous obtenons maintenant : $v = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les différences de vitesses s'expliquent par le fait que nous calculons des vitesses moyennes or la vitesse du skieur n'est pas constante (les physiciens diront que le mouvement n'est pas uniforme mais accéléré).

2 Vers une vitesse instantanée.

Nous voulons obtenir une vitesse instantanée, *i.e.* qui représente la vitesse du skieur en chaque instant.

Faire un schéma représentant la pente et la trajectoire du skieur. Éventuellement avec des points de plus en plus rapproché pour indiquer l'aspect trajectoire uniformément accéléré.

Par exemple : quelle est la vitesse au bout de 5 secondes ? Attention la question n'est pas quelle est la vitesse moyenne entre l'instant 0 (départ) et l'instant 5 s, mais quelle est sa vitesse instantanée 5 secondes après le départ. Autrement dit si le skieur était, à la façon d'une voiture automobile équipé d'un compteur de vitesse, quelle serait la vitesse affichée au bout de 5 secondes de descente ?

Si l'on essaie d'utiliser la formule usuelle de vitesse nous tombons sur un os. À un instant précis la distance parcourue est nulle et le temps mis pour parcourir cette distance est aussi nul et nous obtenons l'absurdité $\frac{0}{0}$.

Nous allons ruser en calculant la vitesse entre 5 s et $5 + h$ s avec h un nombre infiniment petit. h étant très petit c'est presque comme si les deux instants étaient confondus. Le temps qui s'est écoulé entre ces deux instants est évidemment h s.

Il reste à déterminer la distance parcourue entre ces deux instants.

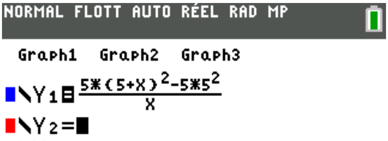
Des relevés permettent de déterminer que la distance parcourue, (depuis le début de la pente), exprimée en mètre, au bout de t secondes est donnée par $d(t) = 5t^2$.

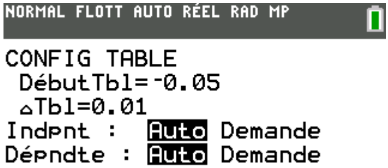
Par conséquent la distance parcourue entre l'instant 5 s et l'instant $5+h$ s est : $d(5 + h) - d(5)$.

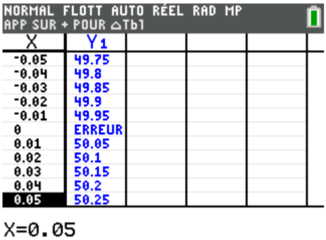
La vitesse entre les instants 5 s et $5 + h$ s.

$$\begin{aligned} v(5; 5+h) &= \frac{d(5+h) - d(5)}{h} \\ &= \frac{5 \times (5+h)^2 - 5 \times 5^2}{h} \end{aligned}$$

Notre vitesse instantanée dépend de la valeur de h ce qui n'est pas satisfaisant. Autrement dit nous avons une fonction de h. Entrons cette fonction dans la calculatrice et regardons ce qu'il se passe lorsque h est très petit (par exemple $h \approx 0{,}01$).







Le tableau de valeur est très explicite et nous donne envie de dire que la vitesse instantanée est de 50 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 5 secondes après le départ.

Ce résultat expérimental peut être obtenu de façon algébrique en simplifiant l'expression de départ.

$$\begin{aligned}
v(5;5+h) &= \frac{d(5+h)-d(5)}{h} \\
&= \frac{5\times(5+h)^2-5\times 5^2}{h} \\
&= \frac{5\times\left(5^2+2\times 5\times h+h^2\right)-125}{h} \\
&= \frac{5\times\left(25+10h+h^2\right)-125}{h} \\
&= \frac{5\times 25+5\times 10h+5\times h^2-125}{h} \\
&= \frac{125+50h+5h^2-125}{h} \\
&= \frac{50h+5h\times h}{h} \\
&= \frac{h(50+5h)}{h} \\
&= 50+5h
\end{aligned}$$

Avec cette simplification d'écriture nous pouvons remplacer h par 0 (sans que ce soit absurde) pour avoir une vitesse instantanée : $v(5;5+0)=50+5\times 0=50$.

Remarquons que la vitesse instantanée se calcule en utilisant un taux d'accroissement.

III Nombre dérivé.

1 Taux de variation.

Rappelons la définition du taux de variation (ou taux d'accroissement).

Définition 1

Si f est une fonction définie sur un intervalle I, alors le *taux d'accroissement* de f entre a et $a+h$ est

$$\tau_f(a,h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

avec a et $a+h$ pris dans I.

Exemples.

1. Pour $x \mapsto x^3$ entre 1 et $1+h$.

Exercice 1.

Soit $f : x \mapsto (x+2)^2$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.
Exprimez le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ pour $h \in \mathbb{R}$. Vous simplifierez la fraction rationnelle obtenue.

Correction exercice 1

Le taux d'accroissement de $f : x \mapsto (x+2)^2$ entre 1 et $1+h$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ est successivement égale à :

$$\tau_f(a,h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Il faut remplacer par les différentes valeurs dont nous disposons, le h seul, restant inconnu.

* Il s'agit du taux d'accroissement entre 1 et $1+h$ donc $a=1$.
* Puisque $f(x) = (x+2)^2$, $f(1) = (1+2)^2 = 9$.
* Puisque $f(x) = (x+2)^2$, $f(1+h) = (1+h+2)^2$

$$\begin{aligned}
\tau_f(1,h) &= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \frac{(1+h+2)^2-(1+2)^2}{h} \\
&= \frac{(3+h)^2-3^2}{h} \\
&= \frac{3^2+2\times3\times h+h^2-9}{h} \\
&= \frac{h^2+6h}{h} \\
&= \frac{h\times h+6\times h}{h} \\
&= \frac{(h+6)\times h}{h} \\
&= \frac{(h+6)\times h}{h}
\end{aligned}$$

$$\tau_f(a;h) = h + 6 \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}.$$

Cette méthode de simplification du taux d'accroissement sera valable pour toutes les expressions polynomiales.

Exercice 2.

Soient $f : x \mapsto x^3$ et $a = 3$.
Déterminez pour tout $h \in \mathbb{R}$ le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$.

Il faut s'armer de courage pour développer l'expression $(3+h)^2$. *Vous pouvez aussi utiliser la formule généralisant l'identité remarquable :*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Correction exercice 2

$$\begin{aligned}
\tau_f(a,h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
&= \frac{(3+h)^3 - 3^3}{h} \\
&= \frac{(3+h)(3+h)^2 - 27}{h} \\
&= \frac{(3+h)(3^2 + 2\times 3\times h + h^2) - 27}{h} \\
&= \frac{(3+h)(9 + 6h + h^2) - 27}{h} \\
&= \frac{3\times 9 + 3\times 6h + 3\times h^2 + h\times 9 + h\times 6h + h\times h^2 - 27}{h} \\
&= \frac{27 + 18h + 3h^2 + 9h + 6h^2 + h^3 - 27}{h} \\
&= \frac{h^3 + 9h^2 + 27h}{h} \\
&= \frac{h(h^2 + 9h + 27)}{h} \\
&= h^2 + 9h + 27
\end{aligned}$$

$$\tau_f(3,h) = h^2 + 9h + 27.$$

Exercice 3.

Exercices du manuel.

Exercice 11 page 118, 29, 30, 31 page 120.

2 Fonction dérivable et nombre dérivé.

Définition 2

Soient

. I un intervalle non trivial,

. f une fonction définie sur I,

. $a \in I$.

Nous dirons que f est *dérivable en a* si et seulement si le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, lorsque h se rapproche de 0, tend vers un nombre réel.

Si f est dérivable en a alors la valeur limite du taux d'accroissement est appelée *nombre dérivé de f en a* et est noté $f'(a)$.

Lorsque le nombre dérivé existe nous noterons

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarques.

1. $f'(a)$ s'interprète comme un nombre représentant la vitesse à laquelle la fonction f varie lorsque x varie en restant très proche de a.
2. Pourquoi ne pas remplacer simplement h par 0 dans la formule du taux d'accroissement pour avoir le nombre dérivé, pourquoi passer par la limite ? Car il est impossible de diviser par 0.
3. Pour certaines fonctions il n'est pas possible de trouver le nombre dérivé en a car le taux d'accroissement ne se rapproche pas d'un nombre limite. Dans ce cas nous dirons que *la fonction n'est pas dérivable en a*.

4. Une autre notation, inspirée de la physique, est couramment utilisée pour désigner le nombre dérivé
$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}_{|x=a}.$$
Elle reprend l'idée du taux d'accroissement : une petite variation (infinitésimale) de f, notée $\mathrm{d}f(x)$, divisée par une petite variation (là encore infinitésimale) de x, notée $\mathrm{d}x$.
5. En physique le nombre dérivé servira notamment à modéliser la vitesse, le débit et toutes les variations instantanées en fonction du temps. Lorsqu'il s'agit de vitesse (dérivée de fonction dépendant du temps) les physiciens préfèrent la notation $\dot{f}(a)$.
6. I est non trivial car il faut pouvoir choisir a et d'autres valeurs se rapprochant de a.
7. La définition sous-entend que les valeurs de h sont choisies de façon à ce que $a + h \in I$.

Exemples.

1. Avec les fonctions de référence en quelques valeurs.

Exercice 4.

Soient $f : x \mapsto x^2$ la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ et $a = 2$.
Calculez, si possible, $f'(a)$.

Correction exercice 4

Calculons le taux d'accroissement et essayons d'en simplifier l'expression.

$$\begin{aligned}
\tau_f(a,h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\
\tau_f(2,h) &= \frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\
&= \frac{(2+h)^2-2^2}{h}\\
&= \frac{2^2+2\times 2\times h+h^2-4}{h}\\
&= \frac{h^2+4h}{h}\\
&= \frac{h\times h+4\times h}{h}\\
&= \frac{(h+4)\times h}{h}\\
&= \frac{(h+4)\times h}{h}\\
&= h+4
\end{aligned}$$

Lorsque h se rapproche de 0 il est maintenant évident que $h+4$ se rapproche de 4.

$$\lim_{h\to 0} h+4 = 4$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0} \tau_f(2,h) = 4$$

Par conséquent f est dérivable en 2 (puisque nous avons pu trouver une limite réelle au taux d'accroissement de f en 2).

De plus la limite que nous avons trouvé est alors le nombre dérivé.

Donc

$$\boxed{f'(2) = 4.}$$

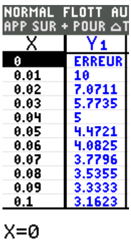
Exercice 5. ♥

Soient $g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $a = 0$.
Calculez, si possible $g'(a)$.

Correction exercice 5

$$\begin{aligned}\tau_g(a,h) &= \frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\ &= \frac{g(0+h)-g(0)}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}\end{aligned}$$

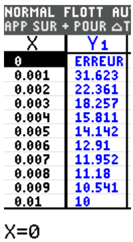
Utilisons la calculatrice pour conjecturer ce qu'il se passe lorsque h se rapproche de 0 (en étant positif, racine carrée oblige) avec des pas de plus en plus petit dans le tableau de valeur.



NORMAL FLOTT AU
APP SUR + POUR ΔT

X	Y1
0	ERREUR
0.01	10
0.02	7.0711
0.03	5.7735
0.04	5
0.05	4.4721
0.06	4.0825
0.07	3.7796
0.08	3.5355
0.09	3.3333
0.1	3.1623

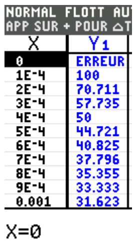
X=0



NORMAL FLOTT AU
APP SUR + POUR ΔT

X	Y1
0	ERREUR
0.001	31.623
0.002	22.361
0.003	18.257
0.004	15.811
0.005	14.142
0.006	12.91
0.007	11.952
0.008	11.18
0.009	10.541
0.01	10

X=0



NORMAL FLOTT AU
APP SUR + POUR ΔT

X	Y1
0	ERREUR
1E-4	100
2E-4	70.711
3E-4	57.735
4E-4	50
5E-4	44.721
6E-4	40.825
7E-4	37.796
8E-4	35.355
9E-4	33.333
0.001	31.623

X=0

Lorsque h se rapproche de 0, en prenant des valeurs positives, $\sqrt{h}$ se rapproche aussi de 0 en prenant des valeurs positives, donc $\frac{1}{\sqrt{h}}$ augmente indéfiniment. Autrement dit $\frac{1}{\sqrt{h}}$ ne se rapproche pas d'un nombre fixe.

Nous ne pouvons pas calculer ce nombre dérivé car il n'y a pas de limite lorsque h tend vers 0.

La fonction racine carré n'est pas dérivable en 0.

Exercice 6.

Faire le premier au tableau pour montrer la démarche attendue.
Utilisation de la calculatrice pour vérifier le résultat.

Calculez le nombre dérivé de f en a, lorsque cela est possible, dans les cas suivants

1. $f(x) = 2$ et $a = 4$.
2. $f(x) = -3x$ et $a = 11$.
3. $f(x) = -3x^2 + 7$ et $a = 3$.
4. $f(x) = x^3$ et $a = 2$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 5$.
6. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 4$.

Indication. Pour le 5. vous pourrez utiliser le fait que $\left(\sqrt{5+h} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5+h} + \sqrt{5}\right) = h$ (identité remarquable).

Correction exercice 6

Il est possible de calculer le nombre dérivé avec la calculatrice, en faisant successivement
$\boxed{\text{alpha}}$, $\boxed{\text{fenêtre}}$, « 3 :nDeriv(»
et en complétant la formule avec l'expression algébrique de f et la valeur numérique de a.

1. Déterminons $f'(1)$.

Étape 1. Exprimons le taux d'accroissement entre 1 et $1 + h$. D'abord la formule de la leçon.

$$\tau_f(a,h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Or $a = 1$ donc

$$\tau_f(1,h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

De plus comme $f(x) = 2$, en remplaçant x :

* $f(1+h) = 2$,
* $f(1) = 2$,

donc

$$\tau_f(1,h) = 0$$

Étape 2. Passage à la limite.
Donc $\lim_{h\to 0} \tau_a(h) = \lim_{h\to 0} 0 = 0$

Étape 3. Conclusion.
Finalement :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = 0.}$$

2. Calculons le taux d'accroissement entre a et $a+h$.

$$\begin{aligned}
\tau_f(a,h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \frac{[-3\times(a+h)]-[-3a]}{h} \\
\tau_f(2,h) &= \frac{[-3\times(2+h)]-[-3\times 2]}{h} \\
&= \frac{-3\times 2+(-3)\times h+6}{h} \\
&= \frac{-3h}{h} \\
&= -3
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0}\tau_f(2,h) = -3$, et enfin

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 2 \text{ et } f'(2) = -3.}$$

Exercice 7.

Calculez, si possible, le nombre dérivé de f en $a \in \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

1. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & c \end{array}\right.$ avec $c \in \mathbb{R}$ une constante.
2. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}\right.$.
3. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}\right.$.
4. $f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$, avec $a > 0$.
5. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}\right.$, avec $a \neq 0$.
6. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}\right.$.
7. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}\right.$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}$.

Correction exercice 7

Profiter de cet exercice pour donner la liste des fonctions dérivées à connaître.

Exercice 8.

Manuel déclic première esl 2015 exercice 47 page 101 : application économique du nombre dérivé, coût marginal.

Une entreprise fabrique des granules de bois pour poêles de chauffage. Sa capacité de production quotidienne ne peut pas dépasser 70 tonnes. le coût total de fabrication, en dizaines de milliers d'euros, réalisé par la fabrication de x tonnes de granulés est donné par :

$$C(x) = 0{,}02x^2 + 0{,}08x + 5{,}08,$$

avec $x \in [0; 70]$.
En économie le *coût marginal* représente le coût supplémentaire engendré par la production de la dernière tonne produite lorsqu'on en a fabriqué x tonnes. Ainsi $C_m(x) = C(x) - C(x-1)$.

1. Montrez que la fonction coût marginal correspond au taux d'accroissement de la fonction coût total entre les réels $x-1$ et x.
2. Montrez que pour tout $x \in [0; 70]$:

$$C_m(x) = 0{,}04x + 0{,}06.$$

3. Déterminez le sens de variation de la fonction C_m. Interprétez la réponse obtenue.

Correction exercice 8

1.
$$C_m(x) = C(x) - C(x-1) = \frac{C(x) - C(x-1)}{x - (x-1)} = \tau_{C_m}(x,h)$$

2.
$$C(x) = 0{,}02x^2 + 0{,}08x + 5{,}08$$

Donc :

$$\begin{aligned}
C(x-1) &= 0{,}02(x-1)^2 + 0{,}08(x-1) + 5{,}08 \\
&= 0{,}02(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) + 0{,}08 \times x + 0{,}08 \times (-1) + 5{,}08 \\
&= 0{,}02(x^2 - 2x + 1) + 0{,}08x - 0{,}08 + 5{,}08 \\
&= 0{,}02x^2 - 0{,}02 \times 2x + 0{,}02 \times 1 + 0{,}08x + 5 \\
&=
\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
C_m(x) &= C(x) - C(x-1) \\
&= 0{,}02x^2 + 0{,}08x + 5{,}08 - [0{,}02x^2 + 0{,}04x + 5{,}02] \\
&= 0{,}02x^2 + 0{,}08x + 5{,}08 - 0{,}02x^2 - 0{,}04x - 5{,}02 \\
&= 0{,}04x + 0{,}06
\end{aligned}$$

Exercice 9.

Exercices du manuel.

Exercices 31 et 39 page 120, 40 et 41 page 121.

IV Tangente.

Définition 3

Soient :

. I un intervalle non trivial,

. f une fonction définie sur un intervalle I,

. $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors nous appellerons *tangente à la courbe représentative de f, $\mathscr{C}_f$, au point $A\,(a,f(a))$*, la droite passant par A et de pente $f'(a)$.

Proposition 1

Soient :

. I un intervalle non trivial,

. f une fonction définie sur un intervalle I,

. $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a,f(a))$ a pour équation réduite

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration 1

Soit $M(x,y)$ un

Remarques.

1. Ainsi $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a. Autrement dit localement (en zoomant) en a la courbe représentative de f et sa tangente se confondent.
2. Il est possible de retrouver cette équation en utilisant la formule de calcul du coefficient directeur $f'(a) = \frac{y-f(a)}{x-a}$.
3. La tangente permet une interprétation géométrique du nombre dérivé. *Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.* ♡
4. $f'(a)$ peut donc s'interprété comme un "coefficient directeur" instantané de la fonction en l'abscisse a. Autrement dit il représente la pente de la courbe en cette abscisse. Par exemple, si $f'(a) > 0$, alors f est (localement) strictement croissante.

Reparler du fait que racine carrée n'est pas dérivable en regardant du point de vue de la tangente et de son coefficient directeur qui devrait être infini.

Exercice 10.

Nous avons remarqué que $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en 2 et son nombre dérivé est $f'(2) = 4$.

Déduisez-en l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse $a = 2$ a pour équation

Correction exercice 10

Déterminons l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

puisque $a = 2$, cette équation équivaut successivement à :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
$$y = 4 \times (x-2) + 4$$
$$y = 4x - 4$$

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est : $y = 4x - 4$.

Exercice 11.

Détermination par le calcul de la tangente.

Déterminez la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a dans les cas suivants.

1. $f : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $a = 1$.
2. $f : x \mapsto -3x + 2$ et $a = 7$.
3. $f : x \mapsto (x+2)^2$ et $a = -1$.
4. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $a = 2$.
5. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $a = 2$.

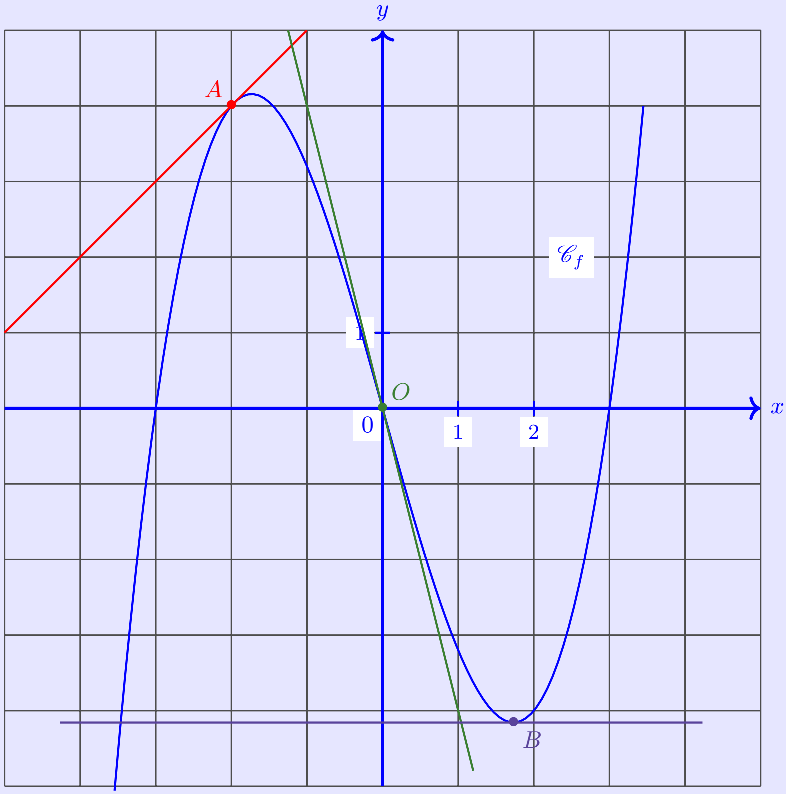
Correction exercice 11

1. $y = 3(x-1) + 4$ ou $y = 3x + 1$.
2. $y = -3x + 2$.
3. $y = 1(x+1) + 1$ ou $y = x + 2$.
4. $y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}$ ou $y = -\frac{1}{4}x + 1$.
5. $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) + \sqrt{2}$ ou $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 12. ♥

Déjà vu dans les rappels donc pas besoin d'insister.

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que les tangentes à cette courbe aux points $A(-2;4)$, $O(0{,}0)$ et $B(\sqrt{3}; 0{,}4\sqrt{3}^3 - 3{,}6\sqrt{3})$.



1. Déterminez les nombres dérivés de f en -2, en 0 et en $\sqrt{3}$.
2. Déduisez-en, les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ en A, O et B.

Faire plein de lecture graphique à l'oral en prenant dans n'importe quel manuel le déclic 2015 2Imme esl ou le spécialité déclic 2019.

Exercice 13. Application.
Exercices 34 et 35 page 120 du manuel Indice de première.

V Exercices.

Un problème de mécanique, un problème de cinétique chimique, un problème de position relative de tangente, et peut être un problème de construction comme une suite avec des tangentes.

Exercice 14. Application.
Exercice 91 page 124 du manuel Indice de première.

Exercice 15. Application.

Détermination calculatoire de l'équation réduite de la tangente.
Exercices 34 et 35 page 129 du manuel CQFD.

Soit f a fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x - 1$.

1. Calculez le nombre dérivé de f en $a = \frac{1}{3}$.
2. Déterminez l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$.

Exercice 16. Application.

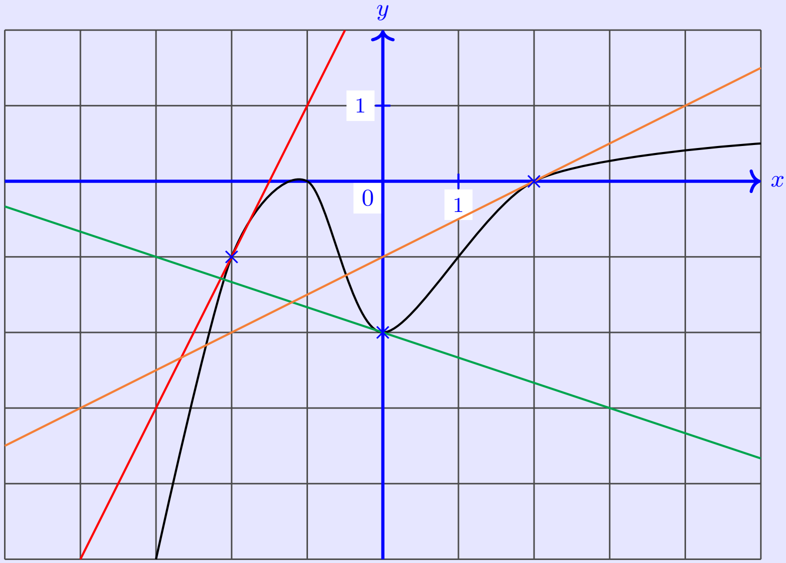
Détermination calculatoire de l'équation réduite de la tangente.
Exercices 34 et 35 page 129 du manuel CQFD.

Soit f a fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 2x + 3$.

1. Calculez le nombre dérivé de f en $a = \sqrt{2}$.
2. Déterminez l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

Exercice 17. Application.

Dans le repère ci-dessous est dessiné la courbe représentative d'une fonction f ainsi que trois de ses tangentes.



Déterminez les équations réduites des tangentes à la courbe représentative de f au points d'abscisses -2 et 0 et 2.

Exercice 18. Application.

Considérons une fonction f définie sur $[-5;5]$.

1. Dans un repère orthonormé dessinez les points $A(-3,-3)$, $B(0{,}4)$ et $C(4{,}4)$.
2. Tracez les tangentes à $\mathscr{C}_f$ respectivement en A, B et C d'équations réduites respectives d_A : $y = 2x+3$, d_B : $y = -\frac{1}{2}x+4$ et d_C : $y : -x+8$.
3. Tracez à main levée une courbe représentative possible pour de f.

Exercice 19. Recherche.

Exercices 32, 33 page 120.

VI Ce qu'il faut retenir.

1. Taux d'accroissement entre x_1 et x_2 et entre x et $x+h$.
2. Limite du taux d'accroissement, nombre dérivé.
3. Nombre dérivé des fonctions classiques.

4. Équation d'une tangente.
5. Dessiner une tangente.
6. Interpréter le nombre dérivé comme les coefficient directeur de la tangente.
7. Retrouver l'équation d'une tangente à partir de sa représentation graphique.