Nombre dérivé et tangente.

I Sécantes.

Sécantes et tangente : illustration avec geogebra (télécharger le fichier : lien).

II Vitesse.

III Nombre dérivé.

1 Taux de variation.

Exercice 1.

Soit $f : x \mapsto (x+2)^2$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.
Exprimez le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ pour $h \in \mathbb{R}$. Vous simplifierez la fraction rationnelle obtenue.

Exercice 2.

Soient $f : x \mapsto x^3$ et $a = 3$.
Déterminez pour tout $h \in \mathbb{R}$ le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$.

Il faut s'armer de courage pour développer l'expression $(3+h)^2$. *Vous pouvez aussi utiliser la formule généralisant l'identité remarquable :*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Exercice 3.

Exercice 11 page 118, 29, 30, 31 page 120.

2 Fonction dérivable et nombre dérivé.

Exercice 4.

Soient $f : x \mapsto x^2$ la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ et $a = 2$.
Calculez, si possible, $f'(a)$.

Exercice 5. ♥

Soient $g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $a = 0$.
Calculez, si possible $g'(a)$.

Exercice 6.

Calculez le nombre dérivé de f en a, lorsque cela est possible, dans les cas suivants

1. $f(x) = 2$ et $a = 4$.
2. $f(x) = -3x$ et $a = 11$.
3. $f(x) = -3x^2 + 7$ et $a = 3$.
4. $f(x) = x^3$ et $a = 2$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 5$.
6. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 4$.

Indication. Pour le 5. vous pourrez utiliser le fait que $\left(\sqrt{5+h} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5+h} + \sqrt{5}\right) = h$ (identité remarquable).

Exercice 7.

Calculez, si possible, le nombre dérivé de f en $a \in \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & c \end{array} \right.$ avec $c \in \mathbb{R}$ une constante.
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$.
3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$.
4. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$, avec $a > 0$.
5. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$, avec $a \neq 0$.
6. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right.$.
7. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array} \right.$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}$.

Exercice 8.

Une entreprise fabrique des granules de bois pour poêles de chauffage. Sa capacité de production quotidienne ne peut pas dépasser 70 tonnes. le coût total de fabrication, en dizaines de milliers d'euros, réalisé par la fabrication de x tonnes de granulés est donné par :

$$C(x) = 0{,}02x^2 + 0{,}08x + 5{,}08,$$

avec $x \in [0;70]$.
En économie le *coût marginal* représente le coût supplémentaire engendré par la production de la dernière tonne produite lorsqu'on en a fabriqué x tonnes. Ainsi $C_m(x) = C(x) - C(x-1)$.

1. Montrez que la fonction coût marginal correspond au taux d'accroissement de la fonction coût total entre les réels $x-1$ et x.
2. Montrez que pour tout $x \in [0;70]$:

$$C_m(x) = 0{,}04x + 0{,}06.$$

3. Déterminez le sens de variation de la fonction C_m. Interprétez la réponse obtenue.

Exercice 9.

Exercices 31 et 39 page 120, 40 et 41 page 121.

IV Tangente.

Exercice 10.

Nous avons remarqué que $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en 2 et son nombre dérivé est $f'(2) = 4$.
Déduisez-en l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse $a = 2$ a pour équation

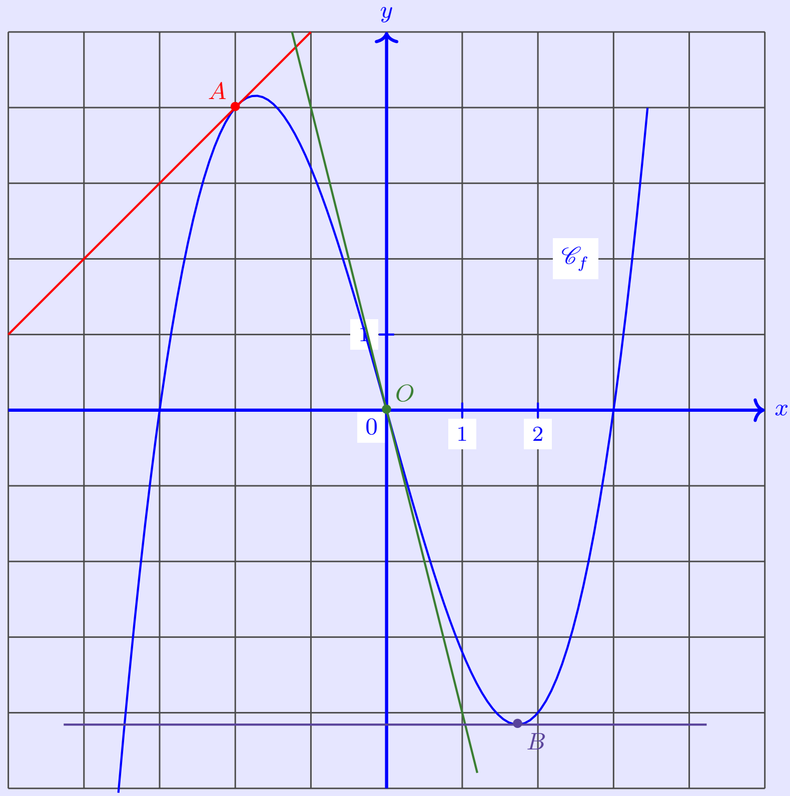
Exercice 11.

Déterminez la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a dans les cas suivants.

1. $f : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $a = 1$.
2. $f : x \mapsto -3x + 2$ et $a = 7$.
3. $f : x \mapsto (x+2)^2$ et $a = -1$.
4. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $a = 2$.
5. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $a = 2$.

Exercice 12. ♥

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que les tangentes à cette courbe aux points $A(-2;4)$, $O(0{,}0)$ et $B(\sqrt{3};0{,}4\sqrt{3}^3-3{,}6\sqrt{3})$.



1. Déterminez les nombres dérivés de f en -2, en 0 et en $\sqrt{3}$.
2. Déduisez-en, les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ en A, O et B.

Exercice 13. Application.

Exercices 34 et 35 page 120 du manuel Indice de première.

V Exercices.

Exercice 14. Application.

Exercice 91 page 124 du manuel Indice de première.

Exercice 15. Application.

Soit f a fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x - 1$.

1. Calculez le nombre dérivé de f en $a = \frac{1}{3}$.
2. Déterminez l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$.

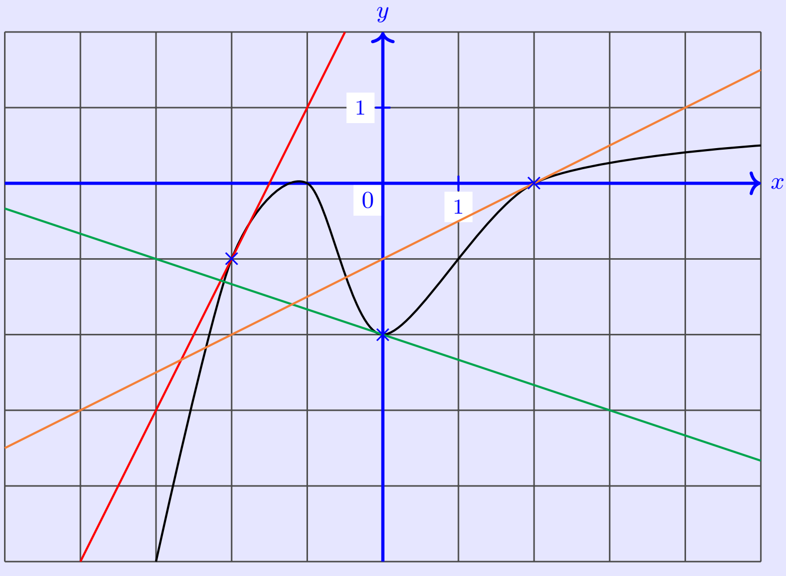
Exercice 16. Application.

Soit f a fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 2x + 3$.

1. Calculez le nombre dérivé de f en $a = \sqrt{2}$.
2. Déterminez l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

Exercice 17. Application.

Dans le repère ci-dessous est dessiné la courbe représentative d'une fonction f ainsi que trois de ses tangentes.



Déterminez les équations réduites des tangentes à la courbe représentative de f au points d'abscisses -2 et 0 et 2.

Exercice 18. Application.

Considérons une fonction f définie sur $[-5;5]$.

1. Dans un repère orthonormé dessinez les points $A(-3,-3)$, $B(0{,}4)$ et $C(4{,}4)$.
2. Tracez les tangentes à $\mathscr{C}_f$ respectivement en A, B et C d'équations réduites respectives $d_A:\ y=2x+3$, $d_B:\ y=-\frac{1}{2}x+4$ et $d_C:\ y:-x+8$.
3. Tracez à main levée une courbe représentative possible pour de f.

Exercice 19. Recherche.

Exercices 32, 33 page 120.