Polynômes de degré deux : cas général.

Redécouper cette leçon en deux peut être car elle semble très longue.

Faire des représentations graphiques à la calculatrice pour tous les trinômes rencontrés pour habituer les élèves à la représentation graphique et à faire le lien entre la forme algébrique et la représentation.

I Recherche des racines : épisode 1.

1 Factoriser, notamment, grâce aux identités remarquables.

Nous avions remarqué dans une précédente leçon que la factorisation pouvait être une façon de trouver des racines. Les identités remarquables sont un outils tout indiqué d'autant qu'elles font intervenir des exposants 2.

Exercice 1.
Résolvez l'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Exercice 2.
Résolvez l'équation $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Exercice 3.
Résolvez l'équation $x^2 - 36 = 0$.

Exercice 4.
Résolvez l'équation $7x^2 - 4 = 0$.

2 Racines simples et coefficients.

Nous avions également la possibilité de rechercher des racines simples pour résoudre une équation polynomiale.

Exercice 5.
Résolvez l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Exercice 6.
Résolvez l'équation $-2x^2 + 4002x - 4000 = 0$.

Exercice 7. ♥
Résolvez l'équation $-12X^2 - 24X + 36 = 0$.

Correction exercice 7

Nous reconnaissons un polynôme de degré deux. Nous essayons de reconnaître une identité remarquable. Cela ne fonctionnant pas nous essayons une racine simple.

Notons P le polynôme de degré deux donnée sous forme développée avec : $a = -12$, $b = -24$ et $c = 36$.

Déterminons les racines de P.

Nous remarquons que $P(1) = 0$ donc $x_1 = 1$ est une racine de P.
Or

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

donc :

$$1 \times x_2 = \frac{36}{-12}$$

Enfin :

$$x_2 = -3$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{1; -3\}$.

Nous pourrions également trouver la forme factorisée de P : $P(x) = -12(X-1)(X+3)$.

II Recherche des racines : épisode 2.

1 Forme canonique.

Nous allons découvrir dans cet exercice une méthode très générale de résolution d'une équation polynomiale de degré deux en complexifiant l'équation étape par étape.

Exercice 8.

1. Résolvez l'équation $x^2 - \frac{4}{9} = 0$.
2. Déduisez-en une résolution de l'équation $(x-2)^2 - \frac{4}{9} = 0$.
3. Déduisez-en une résolution de l'équation : $9(x-2)^2 - 4 = 0$.
4. Déduisez-en une résolution de l'équation : $9x^2 - 36x + 32 = 0$.

La démonstration repose sur la possibilité d'écrire la forme développée $9X^2 - 36X + 32$ sous la forme $9(X-2)^2 - 4$. Cette dernière forme joue un rôle technique important.

Voici une démarche permettant d'obtenir cette expression.

Exercice 9. ♥

Recopiez en complétant par des nombres le raisonnement suivant :

Si $P(X) = 3X^2 - 12X + 22$ alors en essayant de faire apparaître une identité remarquable nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
P(X) &= 3(X^2 - 4X) + 22 \\
&= 3(x^2 - 2 \times X \times 2) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2 + 2^2 - 2^2) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2 + 2^2) + 3 \times (-2^2) + 22 \\
&= 3(X-2)^2 + 10
\end{aligned}$$

Correction exercice 9

$$\begin{aligned}
P(X) &= 3(X^2 - 4X) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2 + 2^2 - 2^2) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2 + 2^2) + 3 \times (-2^2) + 22 \\
&= 3(X-2)^2 + 10
\end{aligned}$$

Cette démarche est celle employée pour déterminer la forme canonique (voir ci-dessous) à partir de la forme développée. Elle est à connaître pour les élèves qui souhaitent poursuivre l'étude des mathématiques.

Proposition 1 - forme canonique.

Soient :

. $a \in \mathbb{R}^*$,

. b, $c \in \mathbb{R}$,

. $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Il est toujours possible d'écrire P sous la forme suivante appelée *forme canonique* de P

$$P(X) = a\left(X - \alpha\right)^2 + \beta$$

avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = P(\alpha).$$

Démonstration 1

Démonstration à la Gauss : il suffit de choisir $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = c - \frac{b^2}{2a}$ et de vérifier que cela fonctionne en substituant.

Démonstration plus naturelle : on part de la forme développée et on essaie de factoriser en faisant apparaître une identité remarquable.

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left[x^2 + 2 \times x \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}\right)\right] + c \end{aligned}$$

Ici on truande pour faire apparaitre une identité remarquable en ajoutant et en soustrayant la même quantité :

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\left[x^2 + 2\times x\times\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[x^2 + 2\times x\times\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
&= a\left[x^2 + 2\times x\times\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
&= a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a(x-\alpha)^2 + \beta
\end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = c - \frac{b^2}{4a}$.

Remarques :

1. La réciproque de cette proposition (toute forme canonique est l'expression d'un polynôme de degré deux) est immédiate en développant.

   Elle permet d'ailleurs de trouver les valeurs de a, b et c en fonction de α et β.

   Démonstration 2

   Développons, réduisons et ordonnons la forme canonique.

$$\begin{aligned}
a(x-\alpha)^2 + \beta &= a[x^2 - 2\times x\times\alpha + \alpha^2] + \beta \\
&= ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta \\
&= ax^2 + (-2a\alpha)x + (a\alpha^2 + \beta)
\end{aligned}$$

La forme canonique est un polynôme de degré deux.

Dorénavant lorsque vous rencontrerez la forme canonique d'un trinôme vous pourrez affirmer sans démonstration qu'il s'agit d'un polynôme de degré deux.

2. La formule $\alpha = -\frac{b}{2a}$ est à connaître car très pratique dans les exercices (et $\beta = f(\alpha)$).

$f(\alpha)$ se calcul en la forme dévéeloppée de f.

Exercice 10. Application.

Donnez la forme canonique de P, puis précisez les valeurs de a, α et β dans les cas suivants.

1. $P(X) = 2X^2 - 12X + 19$
2. $P(X) = X^2 + 1$
3. $P(X) = X^2 - 2X + 1$
4. $P(X) = -7X^2 - 14X + 3$

Correction exercice 10

1. Écrivons P sous forme canonique.

$$\begin{aligned}P(X) &= 2X^2 - 12X + 19\\ &= 2(X^2 - 6X) + 19\\ &= 2(X^2 - 2 \times X \times 3) + 19\\ &= 2(X^2 - 2 \times X \times 3 + 3^2 - 3^2) + 19\\ &= 2(X^2 - 2 \times X \times 3 + 3^2) + 2 \times (-3^2) + 19\\ &= 2(X-3)^2 + 1\end{aligned}$$

$a = 2$, $\alpha = 3$ et $\beta = 1$.

2. Écrivons P sous forme canonique.

$$\begin{aligned}P(X) &= X^2 + 1\\ &= 1(X-0)^2 + 1\end{aligned}$$

Quand $b = 0$ le trinôme est déjà sous forme factorisée.

$a = 1$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

3. Écrivons P sous forme canonique.

$$\begin{aligned}
P(X) &= X^2 - 2X + 1 \\
&= (X^2 - 2 \times X \times 1) + 1 \\
&= (X^2 - 2 \times X \times 1 + 1^2 - 1^2) + 1 \\
&= (X^2 - 2 \times X \times 1 + 1^2) - 1^2 + 1 \\
&= (X - 1)^2
\end{aligned}$$

On pouvait aussi remarquer immédiatement une identité remarquable.

$a = 1$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

4. Écrivons P sous forme canonique.

$$\begin{aligned}
P(X) &= -7X^2 + 4X + 3 \\
&= -7(X^2 + 2X) + 3 \\
&= -7(X^2 + 2 \times X \times 1) + 3 \\
&= -7(X^2 + 2 \times X \times 1 + 1^2 - 1^2) + 3 \\
&= -7(X^2 + 2 \times X \times 1 + 1^2) - 7 \times (-1^2) + 3 \\
&= -7(X + 1)^2 + 10
\end{aligned}$$

$a = -7$, $\alpha = -1$ et $\beta = 10$.

Exercice 11. ♥

Donnez la forme canonique de $P(X) = -2x^2 - 4x - 14$ (en utilisant les formules pour α et β).

Correction exercice 11

P est un polynôme de degré deux donné sous forme développée avec $a = -2$, $b = -4$ et $c = -14$.

Déterminons les coefficients de la forme canonique.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \times (-2)} = -1$$

et

$$\beta = P(\alpha)$$

Pour calculer $P(\alpha)$ on utilise la forme développée

$$\begin{aligned} &= -2\alpha^2 - 4 \times \alpha - 14 \\ &= -2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) - 14 \\ &= -12 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} P(X) &= a(X-\alpha)^2 + \beta \\ &= -2(X-(-1))^2 + (-12) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X) = -2(X+1)^2 - 12.}$$

Exercice 12. Application.

2 Les racines grâce à la forme canonique.

La rédaction que nous allons voir dans les deux exercices qui suivent n'est pas belle et ne doit pas être reproduite notamment la fin du raisonnement qui devrait se faire avec une identité remarquable.

Exercice 13.

Recherchez les racines du trinôme $P(X) = -3(X-1)^2 + 12$ en résolvant l'équation $P(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
-3(x-1)^2 + 12 &= 0 \\
-3(x-1)^2 + 12 \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \\
-3(x-1)^2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{-3(x-1)^2}{\ldots\ldots\ldots\ldots} &= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
(x-1)^2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

donc :

$$
\begin{aligned}
x-1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x-1 \ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x &= \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
x-1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x-1 \ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x &= \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Conclusion :

Regarder la forme de la courbe avec la calculatrice.

Exercice 14.

Recherchez les racines du trinôme $P(X) = 2(X+3)^2 + 8$ en résolvant l'équation $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
2(x+3)^2 + 8 &= 0 \\
2(x+3)^2 + 8 \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \\
2(x+3)^2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Conclusion :

Là encore on regarde sur la calculatrice la forme de la courbe et surtout les racines.

La démarche vue dans les deux exercices précédents se généralise.
La forme canonique de la fonction $P(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$$P(X) = a\left(X - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

En résolvant l'équation comme on l'a fait précédemment :

$$\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Pour pouvoir prendre la racine carré des deux côtés de l'égalité il faut d'abord s'assurer qu'il s'agit de nombres positifs.

Pour cela je cherche le signe du nombre $b^2 - 4ac$ qui est appelé *discriminant* et est noté Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

S'il existe des racines elles sont alors données par les formules :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exercice 15. ♥
Déterminez les solutions réelles de l'équation $-3x^2 - 6x + 24 = 0$.

Correction exercice 15 ♡

Déterminons les solutions de l'équation.

1. Nature de la fonction.
   $P(X) = -3X^2 - 6X + 24$ est un polynôme du second degré : $a = -3$, $b = -6$ et $c = 24$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \times (-3) \times 24 \\ &= 324\end{aligned}$$

   Comme Δ est strictement positif l'équation admet deux solutions distinctes.
3. Calcul des solutions.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{324}}{2 \times (-3)}$	$x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{324}}{2 \times (-3)}$
$x_1 = 2$	$x_2 = -4$

4. Conclusion.

L'ensemble des solutions de l'équation $-3x^2 - 6x + 24 = 0$ est $\mathcal{S} = \{-4; 2\}$.

Exercice 16. ♥

Déterminez, si possible, la forme factorisée de $P(X) = 2X^2 + 24X + 72$.

Correction exercice 16

Déterminons les racines de f.

1. Nature de la fonction.

   Il s'agit d'un polynôme de degré deux avec : $a = 2$, $b = 24$ et $c = 72$.

2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 24^2 - 4 \times 2 \times 72 \\ &= 0\end{aligned}$$

   Comme Δ est nul l'équation admet une solution (double).

3. Calcul de la solution.

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{-b}{2a} \\ x_0 &= \frac{-24}{2 \times 2} \\ x_0 &= -6\end{aligned}$$

4. Conclusion.

La forme factorisée de P est donc

$$P(X) = 2(X + 6)^2.$$

Exercice 17. ♥

Déterminez les éventuels zéros de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.

Correction exercice 17

1. Nature de la fonction.
   $X^2 + X + 1$ est un polynôme de degré deux avec : $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &= -3\end{aligned}$$

   Comme Δ est strictement négatif le polynôme n'admet aucune racine.
3. Conclusion.

   L'ensemble des zéros de f est $\mathcal{S} = \varnothing$.

III Les fonctions polynomiales de degré deux.

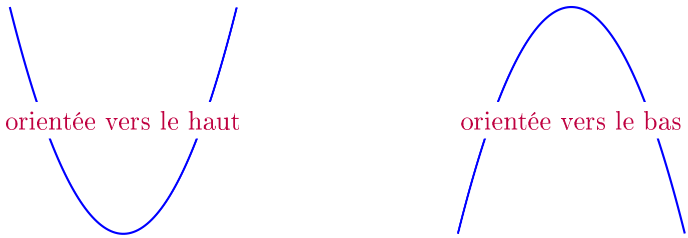
Définition 1

Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *polynomiale de degré deux* s'il existe $a \in \mathbb{R}^*$, b, $c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Remarques.

1. Plutôt que « fonction polynomiale de degré deux » nous dirons plus simplement « trinôme ».
2. La courbe représentative d'une fonction trinôme est appelée une *parabole*.
3. Nous dirons que la parabole est



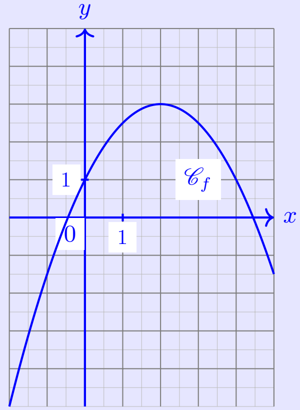
Nous démontrerons plus loin que la parabole est orientée vers le haut lorsque $a > 0$ et qu'elle est orientée vers le bas lorsque $a < 0$.

4. Le rôle de la forme développée sera d'identifier le trinôme via ses trois coefficients a (dominant), b et c (terme constant).
5. Le terme c est semblable à l'ordonnée à l'origine de la fonction affine ($f(0) = c$).

Exercice 18. ♥

Sachant que la parabole dessinée ci-contre est la courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré deux, f, que pouvez-vous dire

— de son coefficient dominant,
— du coefficient b,
— du terme constant ?



Correction exercice 18 ♡

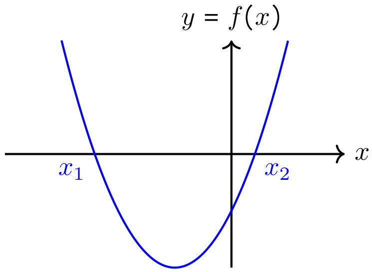
La parabole est orientée vers le bas donc son coefficient dominant a est strictement négatif : $a < 0$.

Nous ne pouvons rien dire (sans calculs) pour le coefficient b.

Le terme constant est l'ordonnée à l'origine de la courbe : $c = 1$.

IV Application à l'étude du signe d'une fonction polynomiale de degré deux.

Pour étudier le signe d'une fonction polynomiale de degré deux nous privilégierons la forme factorisée. Si $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ alors x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses.



Exercice 19.

Cas deux racines distinctes.

Étudiez le signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -2(x-2)(x+3)$.

Exercice 20.

Cas une racine double.

Étudiez le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7(x+3)^2$.

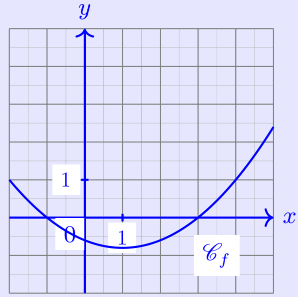
Exercice 21.

Cas pas de racines.

Dressez le tableau de signe de la fonction h définie par $h(x) = -x^2 - 1$ pour tout x réel.

Exercice 22. ♥

Que pouvez-vous dire des coefficients a, x_1 et x_2 de la forme factorisée de la fonction polynomiale de degré deux représentée ci-contre.



Le signe du trinôme peut s'obtenir en cherchant les racines et en construisant un tableau de de variation comme dans les exercices précédents. Cependant l'observation géométrique sur geogebra (en ligne ou en téléchargement) fait apparaître une règle générale.

Nous pourrons retenir la formule mnémotechnique suivante : un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre les éventuelles racines.

Exercice 23. Application.

Dressez le tableau de signe de

1. la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = 3x^2 - 24x + 48$ pour tout $x \in [-10; 10]$,
2. la fonction g définie sur $[-5; 3]$ par $g(x) = x^2 + x - 2$ pour tout $x \in [-5; 3]$,
3. la fonction h trinôme définie pour tout $x \in [-2; 2]$ par $h(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Correction exercice 23

Dressons le tableau de variation de f.

* $h : x \mapsto x - 2$ est une fonction affine avec $m = 1$ et $p = -2$. $m > 0$ donc h est strictement croissante. h s'annule en $-\frac{p}{m} = -\frac{-2}{1} = 2$.

x	-10		-3		2		$+10$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dressons le tableau de variation de f.

f est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme factorisée avec $a = -2$, $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$.

f est donc du signe de $a < 0$ sauf entre ses racines.

x	-10		-3		2		$+10$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut remarquer que x_1 n'est pas forcément plus petit que x_2. Il faut donc faire attention à les mettre dans l'ordre croissant dans le tableau.

Exercice 24. Application.

Soit $f : x \mapsto -2x^2 - 4x + 6$ définie sur $[-7; 10]$.

1. Déterminez les racines de f.
2. Étudiez le signe de f sur $[-7; 10]$.
3. Résolvez dans $[-7; 10]$ l'inéquation

$$(E) \quad -2x^2 - 4x + 6 > 0.$$

Exercice 25. ♥

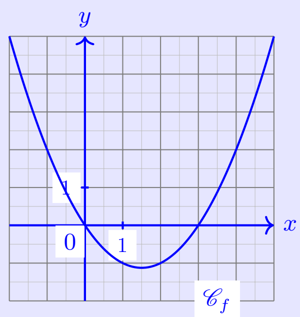
Résolvez l'inéquation $2x^2 - 220x + 2000 > 0$ dans $\mathbb{R}$.

Correction exercice 25

$\Delta = 32400$, $x_1 = 10$, $x_2 = 100$.

Exercice 26. Application.

Sachant que le coefficient dominant de la fonction polynomiale de degré deux f, représentée ci-contre, est $\frac{1}{2}$, donnez sans justification la forme factorisée de f.



V Application à l'étude des variations d'une fonction polynomiale de degré deux.

Rappel de la définition analytique de la croissance d'une fonction et son interprétation graphique.

Exercice 27.

Rappelons la définition suivante : une fonction définie sur un intervalle I (non vide) est strictement croissante si et seulement si : quelque soient x et y choisis dans I on a $f(x) < f(y)$. Ce que l'on exprime parfois en disant que les fonctions croissantes conservent l'ordre.

On étudie le sens de variation sur $]-\infty;3]$ de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 - 5$.
Recopier et compléter en justifiant chaque étape.
Soient a et b deux réels tels que $a < b \leqslant 3$.
$a - 3 \ldots b - 3 \ldots 0$
$(a-3)^2 \ldots (b-3)^2$
$(a-3)^2 - 5 \ldots (b-3)^2 - 5$
$f(a) \ldots f(b)$
Donc f est ...sur ...

Proposition 2

Soient :

. $a \in \mathbb{R}^*$,

. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

. $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$ alors le tableau de variation de f est

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\searrow$	β	$\nearrow$

Démonstration 3

Supposons $a > 0$.

Nous allons raisonner par disjonction des cas en démontrant d'abord que f est strictement décroissante sur $]-\infty{,}\alpha]$.

Soient x et y des nombres pris dans $]-\infty{,}\alpha]$ avec $x < y$.
Nous voulons montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty{,}\alpha]$ il faut donc montrer que f interverti l'ordre sur cet ensemble.

Démontrons que $f(x) > f(y)$.

$$x < y$$

implique successivement

$$\begin{aligned}
x-\alpha &< y-\alpha \\
(x-\alpha)^2 &> (y-\alpha)^2 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_- \\
a(x-\alpha)^2 &> a(y-\alpha)^2 \quad \text{car } a > 0 \\
a(x-\alpha)^2+\beta &> a(y-\alpha)^2+\beta \\
f(x) &> f(y)
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons démontré que quelque soient x e y choisis dans $]-\infty{,}\alpha]$, dès que $x < y$ alors forcément $f(x) > f(y)$.
Autrement dit

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty{,}\alpha].}$$

De la même façon nous démontrerions que f est strictment croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

Démonstration 4
Voici une autre démonstration du même résultat.

Montrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$.

Soient $x < y$ deux nombres choisis dans $]-\infty\ ;\ \alpha[$.
Montrons donc que $f(y) - f(x) < 0$.
Pour déterminer le signe d'une quantité il faut essayer de la factoriser.

$$\begin{aligned}
f(y)-f(x) &= a(y-\alpha)^2+\beta-[a(x-\alpha)^2+\beta] \\
&= a(y-\alpha)^2-a(x-\alpha)^2
\end{aligned}$$

On factorise par a :

$$f(y)-f(x) = a[(y-\alpha)^2-(x-\alpha)^2]$$

On reconnaît une identité remarquable qui permet de factoriser :

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= a\left([(y-\alpha)-(x-\alpha)]\times[(y-\alpha)+(x-\alpha)]\right) \\ &= a\left([y-x]\times[y+x-2\alpha]\right) \end{aligned}$$

Par hypothèse $a>0$ et $y-x>0$ donc $f(y)-f(x)$ est du même signe que $y+x-2\alpha$. Or x et y appartiennent à $]-\infty\ ;\ \alpha[$, donc :

$$\begin{cases} x-\alpha<0 \\ y-\alpha<0 \end{cases}$$

et donc $x+y-2\alpha<0$.

Ainsi $f(y)-f(x)<0$. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$.

Remarques :

1. On déduit du tableau de variation que, si $a>0$, les fonctions polynomiales de degré 2 admettent sur $\mathbb{R}$ un minimum absolu égal à β qui est atteint pour $x=\alpha$.
2. Si $a<0$, alors les variations de f sont contraires.
3. Les fonctions polynomiales de degré 2 admettent toujours un extremum. Si $a<0$, alors β est un maximum.
4. L'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x=\alpha$.

Remarques.

1. Nous avons un résultat symétrique lorsque $a<0$.
2. Ce résultat illustre l'efficacité de la forme canonique qui permet de trouver le tableau de variation d'une fonction polynomiale de degré deux.
3. Nous remarquons en particulier que le point de coordonnées $(\alpha;\beta)$ de la parabole, que nous appellerons *le sommet de la parabole*, correspond à un minimum ou à un maximum de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.
4. Le résultat théorique étant démontré voyons maintenant comment, dans la pratique, trouver le tableau de variation en raisonnant géométriquement.
   — Le signe de a nous indique si la parabole est orientée vers le haut ou vers le bas donc le sens des flèches dans le tableau de variation.
   — La valeur de α correspond à la valeur de x pour laquelle la fonction change de sens de variation.
   — β est l'image de α par f.
5.

Exercice 28. ♥

Donnez les tableaux de variation sur l'intervalle I des fonctions définies par leur expression algébrique et précisez leurs éventuels extrema.

1. Pour tout x de $I = \mathbb{R}$, $f(x) = -3(x+4)^2 - 7$.
2. Quelque soit x choisi dans $I = [-5\ ;\ 5]$, $g(x) = -8x + 4x^2 + 7$.
3. $I =]-\infty\ ;\ 4]$ et : $\forall x \in I$, $h(x) = (x+3)^2 - (x-5)^2$.

Correction exercice 28

1. Déterminons le tableau de variation de f.

   f est une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous forme canonique avec $a = -3$, $\alpha = -4$ et $\beta = -7$.
   Comme $a < 0$ la parabole est orientée vers le bas.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	-7	$\searrow$	

   D'après le tableau f admet un maximum absolu égale à -7 obtenu pour $x = -4$.

2. La fonction g est polynomiale de degré 2 donnée sous forme développée.

   Recherchons la forme canonique de g.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \times 4} = 1$$

   et

$$\beta = g(\alpha) = g(1) = 3$$

   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = 4(x-1)^2 + 3$.

   Tableau de variation.

   Comme $a > 0$ la parabole est orientée vers le haut et

x	-5		1		5
Variations de g	147	$\searrow$	3	$\nearrow$	67

car $g(-5) = 147$ et $g(5) = 67$.

D'après le tableau

g admet un minimum absolu égale à -7 obtenu pour $x = -4$ et g admet un maximum absolu égale à 147 qui est atteint pour $x = -5$.

3. h n'est *a priori* pas une fonction polynomiale de degré deux puisque n'est donnée ni sous forme développée ni sous forme canonique.

   Identifions la nature de h.

   En développant on obtient, pour tout $x \in I$: $h(x) = 16x + 36$.

h est une fonction affine.

   Tableau de variation.

   h est une fonction affine dont le coefficient directeur est $a = 16 > 0$ donc :

x	$-\infty$	4
Variations de h	$\nearrow$	100

   car $h(4) = 100$.

h admet un maximum absolu égale à 100 qui est atteint pour $x = 4$.

VI Exercices.

Exercice 29. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = 49x^2 - 4$.
2. $f_2(x) = -3x^2 + 3x$.
3. $f_3(x) = 4x^2 - 8x$.
4. $f_4(x) = 3x^2 + 30x + 75$.
5. $f_5(x) = (4x-1)+(4x-1)(x+2)$.
6. $f_6(x) = x^2 - 4x + 4$.

Correction exercice 29

1. $f_1(x) = (7x-2)(7x+2) = 49\left(x-\frac{2}{7}\right)\left(x+\frac{2}{7}\right)$.
2. $f_2(x) = -3x(x-1)$.
3. $f_3(x) = 4x(x-2)$.
4. $f_4(x) = 3(x+5)^2$.
5. $f_5(x) = (4x-1)(x+3) = 4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+3)$.
6. $f_6(x) = (x-2)^2$.

Exercice 30. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = 6x - 3x^2$.
2. $f_2(x) = -9x^2 + 36$.
3. $f_3(x) = 4x^2 - 8x + 8$.
4. $f_4(x) = -x^2 - 2x - 1$.
5. $f_5(x) = 2(x-3)-(x-4)(x-3)$.
6. $f_6(x) = (x+2)^2 - 8$.

Correction exercice 30

1. $f_1(x) = -3x(x-3)$.
2. $f_2(x) = (6-3x)(6+3x) = -9(x-2)(x+2)$.
3. $f_3(x) = 2(x-2)(x+2)$.
4. $f_4(x) = -(x+1)^2$.
5. $f_5(x) = -(x-3)(x-6)$.
6. $f_6(x) = (x-2)(x+6)$.

Exercice 31. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = (2x+1)^2 - (1-x)^2$.
2. $f_2(x) = x^2 - 20x + 100$.
3. $f_3(x) = 25 - (x+1)^2$.
4. $f_4(x) = 4x^2 + 4 + 8x$.
5. $f_5(x) = 16(x+1)^2 - 25x^2$.
6. $f_6(x) = 16x^2 - 81$.

Correction exercice 31

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $$\begin{aligned} f_1(x) &= [(2x+1)-(1-x)]\times \\ &\quad [(2x+1)+(1-x)] \\ &= 3x(x+2) \end{aligned}$$
2. $f_2(x) = (x-10)^2$.
3. $$\begin{aligned} f_3(x) &= [5-(x+1)][5+(x+1)] \\ &= (-x+4)(x+6) \\ &= -(x-4)(x+6) \end{aligned}$$
4. $f_4(x) = 4(x+1)^2$.
5. $$\begin{aligned} f_5(x) &= [4(x+1)-5x][4(x+1)+5x] \\ &= (-x+4)(9x+4) \\ &= -9\,(x-4)\left(x+\frac{4}{9}\right) \end{aligned}$$
6. $$\begin{aligned} f_6(x) &= (4x-9)(4x+9) \\ &= 16\left(x-\frac{9}{4}\right)\left(x+\frac{9}{4}\right) \end{aligned}$$

Exercice 32. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 - 4 + (x-2)(x+1)$.
2. $f_2(x) = 3x^2 - 12x + 12$.
3. $f_3(x) = (x+1)(x+2) - (3x+6)$.
4. $f_4(x) = x^2 - 2x + 3x^2$.
5. $f_5(x) = 2x(x+3) + 4x + 12$.
6. $f_6(x) = (x-3)(3x-4) - 3x + 4$.

Correction exercice 32

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-2)(x+2) + (x-2)(x+1) \\ &= (x-2)\,[(x+2)+(x+1)] \\ &= (x-2)(2x+3) \\ &= 2(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$
2. $f_2(x) = 3(x-2)^2$.
3. $$\begin{aligned} f_3(x) &= (x+1)(x+2) - 3(x+2) \\ &= (x+2)(x-2) \end{aligned}$$
4. $f_4(x) = 4x\left(x-\frac{1}{2}\right)$.
5. $$\begin{aligned} f_5(x) &= 2x(x+3) + 4x + 12 \\ &= 2x(x+3) + 4(x+3) \\ &= [2x+4]\,(x+3) \\ &= 2(x+2)(x+3) \end{aligned}$$
6. $$\begin{aligned} f_6(x) &= (x-3)(3x-4) - 3x + 4 \\ &= (3x-4)\,[(x-3)-1] \\ &= (3x-4)(x-4) \\ &= 3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-4) \end{aligned}$$

Exercice 33. Application.

Donnez la forme canonique de la fonction polynomiale de degré deux, f, lorsque, pour tout x réel,

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$.
2. $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$.
3. $f(x) = 4x^2 + 8x + 7$.
4. $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$.
5. $f(x) = x^2 - 8x + 23$.
6. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.
7. $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$.
8. $f(x) = 3x^2 + 30x$.
9. $f(x) = x^2 - 2$.
10. $f(x) = -4x^2 - 8x - 104$.

Correction exercice 33

1. $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$.
2. $f(x) = -3(x-1)^2 + 4$.
3. $f(x) = 4(x+1)^2 + 3$.
4. $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$.
5. $f(x) = (x-4)^2 + 7$.
6. $f(x) = -(x-2)^2 + 1$.
7. $f(x) = 2(x+2)^2 - 4$.
8. $f(x) = 3(x+5)^2 - 75$.
9. $f(x) = x^2 - 2$.
10. $f(x) = -4(x+1)^2 - 100$.

Exercice 34. Application.

Donnez la forme canonique de la fonction polynomiale de degré deux, f, lorsque, pour tout x réel,

1. $f(x) = -3x^2 - 30x - 102$.
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}$.
3. $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{37}{9}$.
4. $f(x) = -x^2 - 14x - 39$.
5. $f(x) = x^2 - 12x + 38$.
6. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{19}{84}$.
7. $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}x + \sqrt{2}$.
8. $f(x) = 3x^2 + 6\pi + 3\pi^2 + 1$.
9. $f(x) = x^2 - 2$.
10. $f(x) = \sqrt{\pi}x^2 - \frac{4\sqrt{\pi}}{3}x + \frac{4\sqrt{\pi}}{9}$.

Correction exercice 34

1. $f(x) = -3(x+5)^2 - 27$.
2. $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$.
3. $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 4$.
4. $f(x) = -(x+7)^2 + 10$.
5. $f(x) = (x-6)^2 + 2$.
6. $f(x) = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{7}$.
7. $f(x) = \sqrt{2}(x+2)^2 - 3\sqrt{2}$.
8. $f(x) = 3(x+\pi)^2 + 1$.
9. $f(x) = -x^2$.
10. $f(x) = \sqrt{\pi}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$.

Exercice 35. Application.

Résolvez les équations suivantes.

1. $2x^2 + 24x + 72 = 0$.
2. $-x^2 - 12x = 35$.
3. $-2x^2 + 4x - 3 = 0$.
4. $-3x^2 + 3x + 330 = 0$.
5. $-4x^2 + 96x - 576 = 0$.
6. $x^2 - 8x = -23$.
7. $x^2 - 17x + 52 = 0$.
8. $2x^2 - 18x + 40 = 0$.
9. $2x^2 + 28x + 91 = 0$.
10. $-3x^2 + 3x + 126 = 0$.

Correction exercice 35

1. $2(x+6)^2$.
2. $-(x+5)(x+7)$.
3. $-2(x-1)^2 - 4$.
4. $-3(x+10)(x-11)$.
5. $-4(x-12)^2$.
6. $(x-4)^2 + 7$.
7. $(x-13)(x-4)$.
8. $2(x-5)(x-4)$.
9. $2(x+7)^2 - 7$.
10. $-3(x-7)(x+6)$.

Exercice 36. Application.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2 + 5x - 6 = 0$.
2. $x^2 + x + 2 = 0$.
3. $-2x^2 + 3x + 4 = 0$.
4. $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
5. $x^2 - 9x + 20 = 0$.
6. $2x^2 - 2x\sqrt{5} + 3 = 0$.
7. $3x^2 + 2x\sqrt{6} - 1 = 0$.
8. $4x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = 0$.
9. $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$.
10. $16x^2 - 8x + 13 = 0$.

Exercice 37. Application.

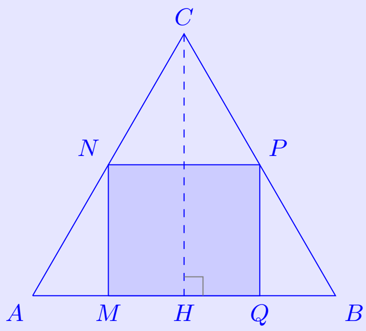
Dressez le tableau de variation de la fonction f sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ dans en reprenant les fonctions de l'exercice 15.

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 4x^2 + 8x + 7$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = x^2 - 8x + 23$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ et $\mathscr{D}_f = [1; 5]$.
7. $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$ et $\mathscr{D}_f = [2; 5]$.
8. $f(x) = 3x^2 + 30x$ et $\mathscr{D}_f =]-10; 5]$.
9. $f(x) = x^2 - 2$ et $\mathscr{D}_f = [-5; 5]$.
10. $f(x) = -4x^2 - 8x - 104$ et $\mathscr{D}_f =]-\infty; 0]$.

Exercice 38.

Exercice page 56 numéro 122 du manuel indice baordas 1ieme 2019.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 8. On inscrit dans ce triangle un rectangle $MNPQ$.
On pose $AM = x$.



1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
2. Calculez CH où H est le pied de la hauteur issue de C.
3. Déduisez-en que $MN = x\sqrt{3}$.
4. Déterminez la valeur de x pour laquelle l'aire de $MNPQ$ est maximale.

Correction exercice 38

1. $x = AM$ et $M \in [AB]$. Or $AB = 8$ donc

$$\boxed{x \in [0; 8].}$$

2. Calculons CH.

   ACH est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

   Nous en déduison successivement :

$$\begin{aligned} 8^2 &= \left(\frac{8}{2}\right)^2 + CH^2 \\ 64 &= 16 + CH^2 \\ 64 - 16 &= CH^2 \end{aligned}$$

   CH désignant une longueur est un nombre podsitif donc :

$$\begin{aligned} CH &= \sqrt{48} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{CH = 4\sqrt{3}.}$$

3. Exprimons MN en fonction de x.

   * Les points A, N, C d'une part et A, M, H d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Puisque $MNPQ$ est un carré et puisque (CH) est la hauteur issue de H, noue avons $(MN) \parallel (HC)$.

   Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{MN}{HC} = \frac{AM}{AH}$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{MN}{4\sqrt{3}} &= \frac{x}{4} \\ MN &= \frac{x}{4} \times 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{MN = x\sqrt{3}.}$$

4. Notons $f(x)$ l'aire de $MNPQ$ en fonction de x.

   Déterminons le maximum de f sur $[0;8]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= MQ \times MN \\ &= (8-2x) \times x\sqrt{3} \\ &= -2\sqrt{3}(x^2-4x) \\ &= -2\sqrt{3}(x-2)^2 + 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

   f est donc une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme canonique avec $a = -\sqrt{3}$, $\alpha = 2$ et $\beta = 8\sqrt{3}$.
   Nous en déduisons

x	0		2		4
f		$\nearrow$	$8\sqrt{3}$	$\searrow$	

$$\boxed{\text{L'aire de } MNPQ \text{ est maximale si } x = 2.}$$

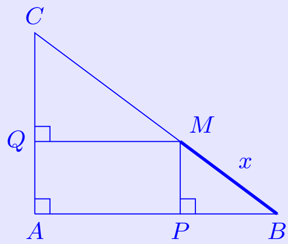
Exercice page 99 numéro 45 du manuel QCM.

Exercice 39.

2ieme nathan hyperbole 2010 page 128 exercice 65

Modifier : ajouter une première question qu'elle sont les valeurs autorisées pour x de façon a créer un ensemble de définition et
Ajouter des questions sur les aires pour qu'il y ait du second degré.

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 8$ et $AC = 6$. M est un point de l'hypoténuse $[BC]$.
Par M, on trace les perpendiculaires à (AB) et (AC). Elles coupent $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en P et Q.
On pose $BM = x$.
On se propose d'étudier quelques propriétés du périmètre du rectangle $APMQ$.



1. Démontrez que $MP = 0{,}6x$ et $MQ = 8 - 0{,}8x$.
2. Exprimez, en fonction de x, le périmètre $p(x)$ du rectangle $APMQ$.
3. Pour quelles positions de M le périmètre est-il supérieur ou égale à 13,5 ?
4. Comparez le périmètre de $AMPQ$ au demi-périmètre du triangle ABC.

Correction exercice 39

1. Exprimons MP en fonction de x.

   * Les points A, P, B d'une part et C, M, B d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * $(AC) \parallel (MP)$ puisque par construction $APMQ$ est un rectangle.

   Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que
   $$\frac{MB}{BC} = \frac{MP}{AC}.$$
   Ce qui équivaut successivement à :
   $$\begin{aligned} \frac{x}{BC} &= \frac{MP}{AC} \\ AC \cdot \frac{x}{BC} &= MP \\ 6 \times \frac{x}{BC} &= MP \quad (1) \end{aligned}$$

ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore, nous avons successivement

$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 + AB^2 \\ &= 6^2 + 8^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

BC étant une longueur donc un nombre positif :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1) :

$$\begin{aligned} MP &= 6 \times \frac{x}{10} \\ &= \frac{6}{10}x \end{aligned}$$

$$\boxed{MP = 0{,}6x.}$$

$APMQ$ est un rectangle donc $MQ = AP$.
De plus, en raisonnant avec la même configuration de Thalès que précédemment nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{PB}{AB} &= \frac{x}{10} \\ \frac{AB - AP}{AB} &= \frac{x}{10} \\ \frac{8 - AP}{8} &= \frac{x}{10} \\ 8 - \frac{8}{10}x &= AP \end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{QM = 8 - 0{,}8x.}$$

2.

$$\begin{aligned} p(x) &= 2(AP + MP) \\ &= 2(8 - 0{,}8x + 0{,}6x) \\ &= 2(8 - 0{,}2x) \end{aligned}$$

$$p(x) = -0{,}4x + 16 \text{ quelque soit } x \in [0;10].$$

3. Résolvons l'équation $p(x) \geqslant 13{,}5$ sur $[0;10]$.

   Soit $x \in [0;10]$.

$$p(x) \geqslant 13{,}5$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} -0{,}4x + 16 &\geqslant 13{,}5 \\ -0{,}4x &\geqslant -2{,}5 \\ x &\leqslant \frac{-2{,}5}{-0{,}4} \\ x &\leqslant 6{,}25 \end{aligned}$$

Le périmètre est supérieur à 13,5 si et seulement si $AM \in [0;6{,}25]$.

4. Études le signe de $\frac{1}{2}(8+10+6) - p(x)$.

$$\begin{aligned} 12 - p(x) &= 12 - (-0{,}4x + 16) \\ &= 0{,}4x - 4 \end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned} 12 - p(x) \geqslant 0 &\Longleftrightarrow 0{,}4x - 4 \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow x \geqslant 10 \end{aligned}$$

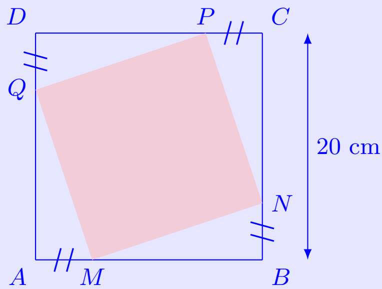
Le périmètre de $AMPQ$ est toujours inférieur ou égale au demi-périmètre de ABC.

Exercice 40.

2ieme nathan transmath 2010 exercice 108 page 88.

Dans un carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-contre.

On pose $x = AM = BN = CP = DQ$ avec $0 \leq x \leq 20$.



Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ dépasse 272 cm^2.

1. Exprimez l'aire en cm^2, $g(x)$ du carré $MNPQ$ en fonction de x, sous forme développée, ordonnée et réduite.
2. Prouvez que $g(x) > 272$ équivaut à

$$2x^2 - 40x + 128 > 0.$$

3. On note $f(x) = 2x^2 - 40x + 128$. Affichez sur votre calculatrice la courbe représentative de f, tracez à main levée la courbe observée puis conjecturez les solutions du problème.

   Pour la fenêtre on utilisera les paramètres d'affichages suivants.

   Axe des abscisses : $0 \leq x \leq 20$.

   Axe des ordonnées : $-100 \leq y \leq 200$.
4. Retrouvez le résultat par le calcul.

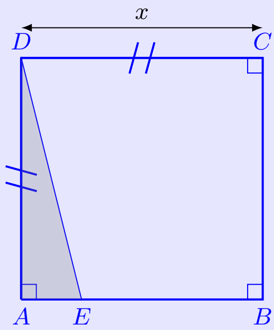
Exercice 41.

2ieme nathan hyperbole 2010 page 123 exercice 37

$ABCD$ est un carré de côté x, exprimé en cm, avec $x > 6$. E est le point du segment $[AB]$ tel que

$$EB = 6 \text{ cm}$$

1. Exprimez en fonction de x, l'aire en cm^2 du triangle AED.
2. Peut-on trouver x pour que l'aire du carré $ABCD$ soit strictement supérieure au triple de l'aire du triangle AED ?

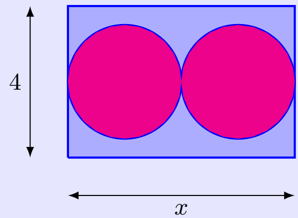


Exercice 42.

2ieme hachette declic 2014 page 129 exercice 57

Rajouter des considérations sur l'ensemble de définition et préciser les positions relatives des disques tangents, etc.

Soit un réel x dans $[0;8]$. On considère un rectangle de dimension 4 cm sur x cm, dans lequel on trace deux disques de même rayon comme sur la figure ci-contre.



On souhaite déterminer les valeurs de x de façon que l'aire bleue (ce qu'il reste du rectangle) soit supérieure à l'aire rose (les deux disques).

1. Montrez que le problème se ramène à la résolution de l'inéquation $\frac{\pi x^2}{8} \leq 2x$ sur $[0;8]$.
2. Montrez que l'ensemble des solutions est $\left[0; \frac{16}{\pi}\right[$.

Correction exercice 42

1. Déterminons l'aire $\mathcal{A}_1$ de la partie en rose.

   $\mathcal{A}_1$ est formée de disque de même rayon $\frac{x}{4}$ donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= 2 \times \pi \left(\frac{x}{4}\right)^2 \\ &= 2\pi \frac{x^2}{4^2} \\ &= \frac{2\pi x^2}{16} \\ &= \frac{2\pi x^2}{2 \times 8} \\ &= \frac{\pi x^2}{8}\end{aligned}$$

Déterminons l'aire en bleue $\mathcal{A}_2$.

$\mathcal{A}_2$ est obtenue en ôtant la surface rose du rectangle donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= 4x - \mathcal{A}_1\\ &= 4x - \frac{\pi x^2}{8}\end{aligned}$$

Retrouvons l'inéquation.

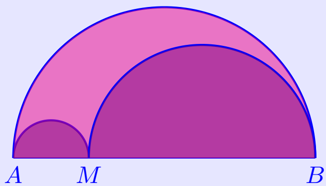
Exerccie page 455 du Déclic

Problème avec géométrie carrés rectangle, ...

Exercice 43.

2ieme didier mathx 2010 page 102 exercice 133

Soit M un point du segment $[AB]$. On considère les demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$ comme représentés ci-contre.



On donne $AB = 8$. Nous noterons $AM = 2x$. $f(x)$ désignera l'aire de la partie colorée en violet (*i.e.* les deux demi-disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$).

1. À quel intervalle appartient x ?
2. Démontrez que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.
3. Les aires des deux parties colorées peuvent-elles être égales ?

Correction exercice 43

1. Déterminons l'intervalle dans lequel varie x.

   * Puisque $2x = AM$ et que AM est une longueur, nécessairement $x \geq 0$.

* $M \in [AB]$ et $AB = 8$ donc $AM \leq 8$.
D'où : $\frac{AM}{2} \leq \frac{8}{2}$.
Autrement dit $x \leq 4$.

Nous avons démontré que $x \in [0; 4]$.

2. Démontrons que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.

* Le rayon du demi-disque de diamètre $[AM]$ est x (car $2x = AM$). Donc l'aire du demi-disque de diamètre $[AM]$ est

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \times \pi x^2$$

* Le rayon du demi-disque de diamètre $[MB]$ est

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MB &= \frac{1}{2}(AB - AM) && \text{car } M \in [AB] \\ &= \frac{1}{2}(8 - 2x) \\ &= 4 - x \end{aligned}$$

Donc l'aire du demi-disque de diamètre $[MB]$ est

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \times \pi (4 - x)^2$$

* Nous déduisons des deux points précédents

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \\ &= \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{2}\pi(4 - x)^2 \end{aligned}$$

En factorisant :

$$f(x) = \frac{1}{2}\pi\left[x^2 + (4 - x)^2\right]$$

En développant l'identité remarquable :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\pi[x^2 + 16 - 8x + x^2] \\ &= \frac{1}{2}\pi(2x^2 - 8x + 16) \\ &= \pi(x^2 - 4x + 8) \end{aligned}$$

Nous avons bien : $f(x)\pi(x^2 - 4x + 8)$.

3. Dire que les deux parties colorées ont la même aire se traduit par

$$\frac{1}{2}\pi 4^2 - f(x) = f(x) \quad (E)$$

Résolvons l'équation (E).

$$\begin{aligned}(E) &\iff 8\pi - 2f(x) = 0\\ &\iff 8\pi - 2\times\pi(x^2 - 4x + 8) = 0\\ &\iff -2\pi\left[-4 + (x^2 - 4x + 8)\right] = 0\\ &\iff -2\pi\left[-4 + x^2 - 4x + 8\right] = 0\\ &\iff -2\pi(x^2 - 4x + 4) = 0\\ &\iff -2\pi(x-2)^2 = 0\\ &\iff x - 2 = 0\\ &\iff x = 2\end{aligned}$$

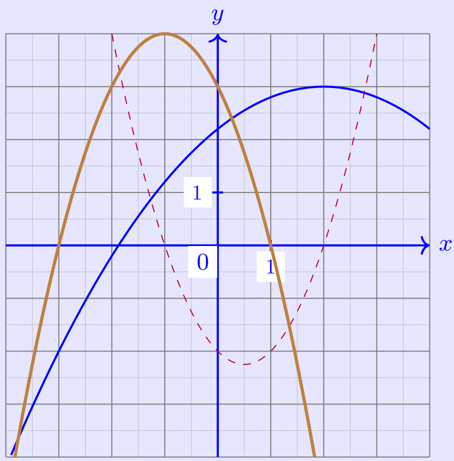
$2 \in [0;4]$, nous pouvons donc conclure.

Les aires des parties colorées ne peuvent être égales que lorsque $x = 2$.

Exercice 44.

Sont tracées ci-contre les courbes représentatives des fonctions polynomiales de degré deux f, g et h.
Nous savons de plus que $f(-3) = -2$.
Recopiez en complétant, sans aucune justification, les expressions algébriques suivantes.

- $f(x) = -0{,}02(x - \dots)^2 + \dots$
- $g(x) = x^2 - x + \dots$
- $h(x) = -(x - \dots)(x - \dots)$



Correction exercice 44

g est la seule fonction dont la parabole est orientée vers le haut (coefficient dominant strictement positif). Son terme constant est obtenu pour $x = 0$. Donc

$$g(x) = x^2 - x - 2.$$

h est donnée sous forme factorisée il faut donc identifier ses racines. Nous pouvons supposer qu'il s'agit donc de la parabole dont les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont lisibles.

$$h(x) = -(x+3)(x-1).$$

Puis en lisant les coordonnées du sommet de la troisième parabole nous obtenons la forme canonique de f.

$$f(x) = -0{,}02(x-2)^2 + 3.$$

Nous pouvons alors contrôler avec la calculatrice que les expressions algébriques ainsi obtenues correspondent bien au graphique.

Exercice 45.

24 page 48 déclic Ieme esl 2015

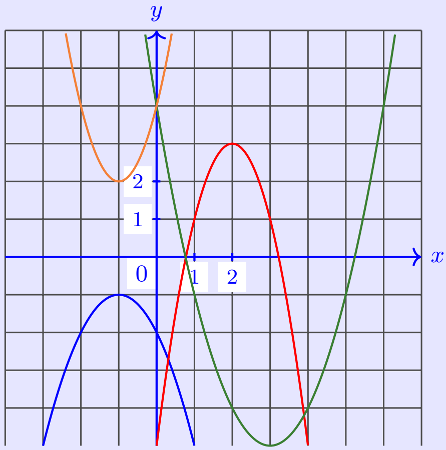
Associez chaque courbe à son trinôme.

$f(x) = -(x+1)^2 - 1$

$g(x) = -2(x-2)^2 + 3$

$h(x) = (x-3)^2 - 5$

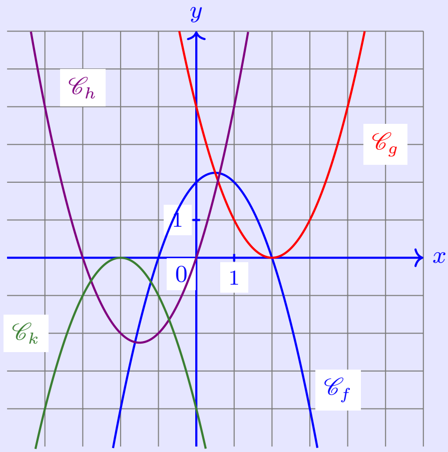
$k(x) = 2(x+1)^2 + 2$



Exercice 46.

1ieme esl hachette barbazo 2015 page 74 exercice 35

Sachant que les fonctions polynomiales de degré deux représentées ci-dessous s'écrivent sous la forme $x \mapsto x^2 + bx + c$ ou $x \mapsto -x^2 + bx + c$, donnez la forme factorisée de chaque fonction.



Correction exercice 46

Pour déterminer la forme factorisée nous devons déterminer les racines des fonctions polynomiales de degré deux. Nous les obtenons graphiquement comme les abscisses des points d'intersections de la parabole et de l'axe des abscisses.

Déterminons la forme factorisée de f.

$\mathcal{C}_f$ est orientée vers le bas donc $f(x) = -x^2 + bx + x$. Ainsi $a = -1$.
Graphiquement : $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.
Finalement

$$\boxed{f(x) = -(x+1)(x-2).}$$

Déterminons la forme factorisée de g.

$\mathcal{C}_g$ est orientée vers le haut donc $g(x) = x^2 + bx + x$. Ainsi $a = 1$.
Graphiquement nous voyons qu'il y a une racine double : $x_0 = 2$.
Finalement

$$\boxed{g(x) = (x-2)^2.}$$

Déterminons la forme factorisée de h.

$\mathcal{C}_h$ est orientée vers le haut donc $h(x) = x^2 + bx + x$. Ainsi $a = 1$.
Graphiquement nous voyons qu'il y a deux racines distinctes : $x_1 = -3$ et $x_2 = 0$.
Finalement

$$h(x) = x(x+3).$$

Déterminons la forme factorisée de k.

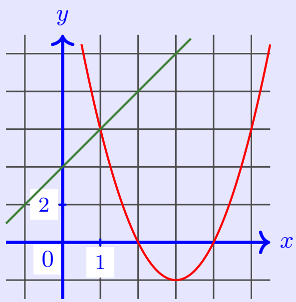
$\mathcal{C}_k$ est orientée vers le bas donc $k(x) = -x^2 + bx + x$. Ainsi $a = -1$.
Graphiquement nous voyons qu'il y a une racine double : $x_0 = -2$.
Finalement

$$k(x) = -(x+2)^2.$$

Exercice 47.

95 page 54 déclic 1ieme esl 2015.

On considère le polynôme $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ et la fonction affine $g(x) = 2x + 4$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous.



1. (a) Déterminez par lecture graphique, une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
   (b) Vérifiez que cette solution est exacte.
2. Déterminez la seconde solution.

Exercice 48.

2ieme nathan transmath 2010 exercice 83 page 83

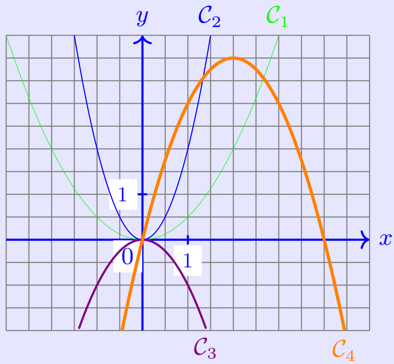
Les fonction indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elle.

$f_1 : x \mapsto -x^2$

$f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

$f_3 : x \mapsto 2x^2$

$f_4 : x \mapsto x(4-x)$



Exercice 49.

2ieme nathan transmath 2010 exercice 84 page 83

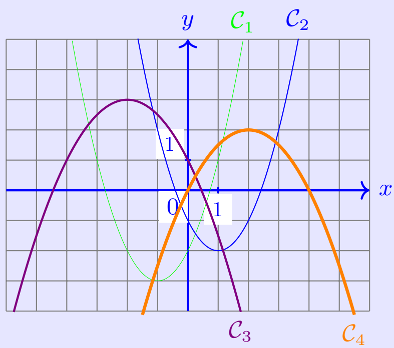
Les fonctions indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elles.

$f_1 : x \mapsto x^2 + 2x - 2$

$f_2 : x \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

$f_3 : x \mapsto (x-1)^2 - 2$

$f_4 : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$



Correction exercice 49

f_1 est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme factorisée. $a = 1 > 0$ donc la parabole est orientée vers le haut. $c = -2$ donc la parabole coupe l'axe des ordonnées à l'ordonné -2. La courbe représentative de f_1 est donc $\mathcal{C}_1$.

f_2 est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme canonique. $a = -\frac{1}{2}$ donc la parabole est orientée vers le bas. $\alpha = 2$ et $\beta = 2$ donc le sommet de la parabole a pour coordonnées $(2;2)$. La courbe représentative de f_2 est $\mathcal{C}_4$.

f_3 est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme canonique. $a = 1$ donc la parabole est orientée vers le haut. $\alpha = 1$ et $\beta = -2$ donc le sommet de la parabole a pour coordonnées $(1;-2)$. La courbe représentative de f_3 est $\mathcal{C}_2$.

Exercice 50.

Parler de la démarche de recherche : pour démontrer l'inégalité on refait l programme de calcul y ayant conduit.

Démontrez que $(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2 + 1 < (\sqrt{3}+\sqrt{4}+1)^2 + 1$.

Exercice 51.

2ieme nathan transmath 2010 exercice 85 page 85

Les fonctions considérées ici sont définies sur $\mathbb{R}$.
Pour chacune d'elles, dressez son tableau de variation.

$f(x) = 5 - 2(x+1)^2$ $\qquad$ $g(x) = 2(1-3x)(1-x)$

$u(t) = \frac{1}{4} - t^2$ $\qquad$ $v(t) = \frac{1}{3}(1-t^2)$

Correction exercice 51

1. Dressons le tableau de variation de f.

   $f(x) = -2(x+1)^2 + 5$ est une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous forme canonique avec $a = -2$, $\alpha = -1$ et $\beta = 5$.

   $a = -2 < 0$ donc la parabole est orientée vers le bas.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

2. g n'est pas une fonction dont nous pouvons donner le tableau de variation. Développons son expression pour essayer de l'identifier.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(1-3x)(1-x) \\ &= 2\left[1\times 1 + 1\times(-x) + (-3x)\times 1 + (-3x)\times(-x)\right] \\ &= 2\left[1 - x - 3x + 3x^2\right] \\ &= 2(1-4x+3x^2) \\ &= 2\times 1 + 2\times(-4x) + 2\times 3x^2 \\ &= 6x^2 - 8x + 2 \end{aligned}$$

Ainsi g est une fonction polynomiale de degré deux dont nous avons la forme développée. Or pour trouver le tableau de variation il nous faut le forme canonique donc

Déterminons la forme canonique de g.

g est une fonction polynomiale de degré deux avec $a = 6$, $b = -8$ et $c = 2$.

(a) $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2\times 6} = \frac{2}{3}$.

(b) $\beta = g(\alpha) = g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$.

La forme canonique de g est

$$g(x) = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}$$

Dressons le tableau de variation de g.

g est une fonction polynomiale de degré eux donnée sous forme canonique avec : $a = 6$, $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = -\frac{2}{3}$.
$a = 6 > 0$ donc la parabole est orientée vers le haut.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	

3. Dressons le tableau de variation de u.

$u(t) = -t^2 + \frac{1}{4} = -1\times(t-0)^2 + \frac{1}{4}$
u est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme canonique avec $a = -1$, $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{4}$.
$a = -1 < 0$ donc la parabole est orientée vers le bas.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$u(t)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

4. Déterminons le tableau de variation de v.

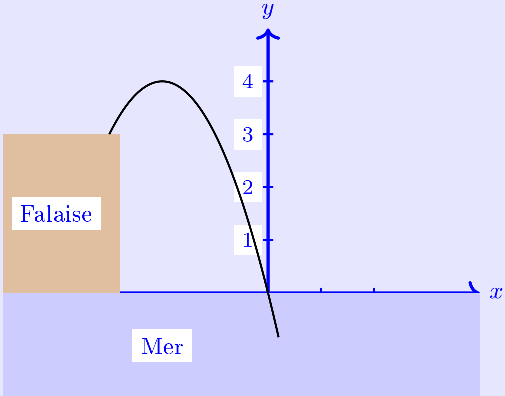
   $v(t) = \frac{1}{3}(1-t^2) = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times(-t^2) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(t-0)^2 + \frac{1}{3}$.
   v est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme canonique avec $a = -\frac{1}{3}$, $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{3}$.
   $a = -\frac{1}{3} < 0$ donc la parabole est orientée vers le bas.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$v(t)$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

Exercice 52.

26 page 49 déclic 1ieme esl 2015.

La trajectoire d'un plongeur est modélisée par la fonction f définie sur $[-3;0]$ par $f(x) = -x(x+4)$. Le plongeur saute de l'abscisse -3.



1. Montrez que f est une fonction polynomiale de degré deux.
2. Montrez que , pour tout x de l'intervalle $[-3;0]$:

$$f(x) = -(x+2)^2 + 4.$$

3. Donnez le tableau de variations complet de f sur l'intervalle $[-3;0]$.
4. (a) Quelle est la hauteur de la falaise ?
   (b) Quelle est la plus grande altitude atteinte par le plongeur ?

Correction exercice 52

1. Justifions que f est une fonction trinôme.

   Deux façons de voir les choses : reconnaître la forme factorisée ou bien développer.
   $f(x) = -x^2 - 4x$
2. Déterminons la forme canonique de f.
3. (a) $f(-3) = 3$.
   (b)

Exercice page 100 numéro 56 du manuel QCM.

Exercice page 101 numéro 60 du manuel QCM.

Exercice 53.

page 56 exercice 112 déclic 1ieme esl 2015

Après la vente de x roses, le bénéfice net d'un fleuriste lors d'une journée s'exprime, en euros, par :

$$B(x) = -0{,}005x^2 + 3{,}2x - 82.$$

1. (a) Dressez le tableau de signe de B sur $[0; 700]$.
   (b) Montrer que $B(x) = -0{,}005(x - 320)^2 + 430$, quelque soit $x \in [0; 700]$.
2. Combien de roses le fleuriste doit-il vendre pour réaliser des bénéfices ($B(x) \geqslant 0$) ?
3. À partir de quelle quantité de roses vendues le bénéfice commence-t-il à décroître ?

Exercice 54.

page 56 exercice 114 déclic 1ieme esl 2015

Une entreprise, dont la production de casques audio varie entre 50 et 250 pièces par jour, estime que le coût de fabrication (en €) est donné par :

$$C(q) = 0{,}08q^2 - 1{,}6q + 108,$$

où q est le nombre de casques produits.
Chaque casque est vendu 15 € l'unité.

1. (a) Combien coûte la fabrication de 80 casques audio ?
   (b) Calculez la recette associée à la vente de 80 casques. L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices pour 80 casques produits et vendus ?
2. (a) Exprimez la recette $R(q)$ exprimée en euros en fonction de la quantité q de casques fabriqués et vendus en un jour.
   (b) Montrez que le bénéfice sur une journée correspondant à la fabrication et à la vente de q casques est :
   $$B(q) = -0{,}08q^2 + 16{,}6q - 108.$$
   (c) Combien faut-il construire et vendre de casques pour que le bénéfice journalier soit supérieur à 400 € ?
   (d) Quel est le bénéfice maximal de l'entreprise ? Pour combien de casques produits ce bénéfice maximum est-il atteint ?

Exercice page 101 numéro 63 du manuel QCM.

Exercice 55.

2ieme hachette declic 2014 page 127 exercice 42

Une entreprise fabrique et vend de la pâte à papier. Le coût de production de q tonnes de pâte à papier est donné, en milliers d'euros par

$$C(q) = 0{,}02q^2 + 0{,}1q + 9$$

pour $q \in [0; 80]$.
La recette, en milliers d'euros, engendrée par la vente de q tonnes de pâte à papier est donnée par

$$R(q) = 1{,}2q$$

1. (a) Quel est le coût le fabrication d'une tonne de pâte à papier ?
   (b) Quel est prix de vente d'une tonne de pâte à papier ?
   (c) L'entreprise est-elle bénéficiaire lorsqu'elle vend et produit une tonne de pâte à papier ?
2. Avec la calculatrice conjecturez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.
3. Démontrez que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend q tonnes de pâte à papier est

$$B(q) = -0{,}02q^2 + 1{,}1q - 9$$

4. Démontrez que $B(q) = -0{,}02(q - 45)(q - 10)$ quelque soit $q \in [0; 80]$.
5. Déterminez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.

Correction exercice 55

1. (a) $C(1) = 9{,}12$.

   La fabrication d'une tonne de pâte à papier coûte 9,12 milliers d'euros.

   (b) $R(1) = 1{,}2$.

   La vente d'une tonne de pâte à papier rapporte 0,12 milliers d'euros.

   (c) Étudions le bénéfice pour une tonne.

   Le bénéfice pour une tonne est donné par

$$B(1) = R(1) - C(1) = -7{,}92$$

Pour une tonne produite et vendue l'entreprise ne réalise pas de bénéfice.

2. R et C sont définies sur $[0;80]$: $0 \leq x \leq 80$. D'autre part avec le tableau de valeurs de la calculatrice on remarque que, sur cet intervalle, $C(q) \leq 150$.

   Nous en déduisons un paramétrage possible pour afficher le graphique sur la calculatrice :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 80 \\ 0 \leq y \leq 150 \end{cases}$$

   Procédons à une lecture graphique.

   Analytiquement : il y a bénéfice lorsque la recette est supérieure au coût.

   Géométriquement : il y a bénéfice quand la courbe de la recette est au dessus de la courbe du coût.

   D'après le graphique cela est vrai lorsque l'abscisse appartient à l'intervalle $[10;45]$.

   Par lecture graphique l'entreprise semble réaliser un bénéfice lorsqu'elle produit entre 10 et 45 tonnes de papier.

3. Démontrons que pour tout $q \in [0;80]$: $B(q) = -0{,}02q^2 + 1{,}1q - 9$.

   Soit $q \in [0;80]$.

   Par définition du bénéfice (en mathématique) :

$$\begin{aligned} B(q) &= R(q) - C(q) \\ &= [1{,}2q] - [0{,}02q^2 + 0{,}1q + 9] \end{aligned}$$

   Il s'agit d'une expression polynomiale que nous développons, ordonnons puis réduisons.

$$\begin{aligned} &= 1{,}2q - 0{,}02q^2 - 0{,}1q - 9 \\ &= -0{,}02q^2 + 1{,}2q - 0{,}1q - 9 \\ &= -0{,}02q^2 + 1{,}1q - 9 \end{aligned}$$

   Ainsi

   Nous avons démontré que quelque soit $q \in [0;80]$

$$B(q) = -0{,}02q^2 + 1{,}1q - 9$$

4. Démontrons que quelque soit $q \in [0;80]$: $B(q) = -0{,}02(q-45)(q-10)$.

   La méthode de factorisation d'une fonction polynomiale de degré 2 est au programme de première et donc, provisoirement impossible.

Nous allons donc vérifier que le résultat proposer par l'énoncé convient.
Soit $q \in [0;80]$.
L'expression proposée est une expression polynomiale donnée sous forme factorisée nous allons la développer, l'ordonnée puis la réduire.
Avec la double distributivité :

$$\begin{aligned}-0{,}02(q-45)(q-10) &= -0{,}02[q\times q+q\times(-10)+(-45)\times q+(-45)\times(-10)]\\ &= -0{,}02(q^2-10q-45q+450)\\ &= -0{,}02(q^2-55q+450)\\ &= -0{,}02\times q^2+(-0{,}02)\times(-55q)+(-0{,}02)\times(450)\\ &= -0{,}02q^2+1{,}1q-9\\ &= B(q)\end{aligned}$$

Nous avons démontré que si $q \in [0;80]$ alors $-0{,}02q^2+1{,}1q-9 = B(q)$. Autrement dit :

> Nous avons démontré que quelque soit $q \in [0;80]$
>
> $$B(q) = -0{,}02q^2+1{,}1q-9$$

5. Résolvons l'inéquation $B(q) \geq 0$ sur $[0;80]$.

En effet l'entreprise est bénéficiaire si $B(x) \geq 0$.

* $f(q) = q-45$ est une fonction affine avec : $a = 1$ et $b = -45$.
  Le coefficient directeur est $a = 1 > 0$ et f s'annule clairement pour $x = 45$.
* $g(q) = q-10$ est une fonction affine avec : $a = 1$ et $b = -10$.
  Le coefficient directeur est $a = 1 > 0$ et f s'annule clairement pour $x = 10$.

Nous en déduisons (sans oublier le facteur $-0{,}02$)

q	0		10		45		80
$-0{,}02$		$-$		$-$		$-$	
$q-45$		$-$		$-$	0	$+$	
$q-10$		$-$	0	$+$		$+$	
$B(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ce que nous interprétons sous la forme :

> L'entreprise est bénéficiaire lorsqu'elle produit entre 10 et 45 tonnes de pâte à papier.

Exercice 56.

108 page 5 déclic 1ieme esl 2015.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
$$\frac{2x-3}{-2x^2+9x-4} \geqslant 0.$$

Exercice page 100 numéro 57 du manuel QCM.

Exercice 57.

82 page 53 déclic 1ieme esl 2015.

1. On se propose ici de résoudre l'équation :
$$2x^4 + 3{,}5x^2 - 1 = 0 \quad (E)$$
   (a) Montrez qu'en posant $X = x^2$, l'équation (E) s'écrit
$$2X^2 + 3{,}5X - 1 = 0 \quad (E')$$
   (b) Résolvez l'équation (E') d'inconnue X.
   (c) Déduisez-en les solutions de l'équation (E) en utilisant le fait que $X = x^2$.
2. En vous inspirant de la méthode précédente résolvez dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'équation :
$$12\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - 10\left(\frac{1}{x-1}\right) + 2 = 0 \quad (F)$$

Exercice 58.

35 page 49 déclic 1ieme esl 2015.

Un architecte souhaite construire une arche parabolique. Il a décidé de modéliser sa construction par la représentation graphique du trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}08x^2 + 3{,}2x - 14$ où 1 unité correspond à 1 mètre.

1. Résolvez l'équation $f(x) = 0$.
2. Déduisez-en la longueur de l'arche au sol.

Exercice 59.

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. (a) Développez, ordonnez et réduisez $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$.
   (b) Développez, ordonnez et réduisez $(x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1)$.
   (c) Déduisez-en une expression de la somme $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1$ sous forme fractionnaire et en fonction de x.
   (d) Démontrez que $2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^2 + 2 + 1$ est un entier.
   (e) Calculez $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{12}$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $g : x \mapsto x^n - a^n$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Factorisez $g(x)$ par a^n.
   (b) Utilisez alors le résultat de la question 1 (et éventuellement un changement de variable) pour établir une expression de $g(x)$ dans laquelle vous aurez factorisé par $x - a$.

Correction exercice 59

1. (a) Développons, réduisons et ordonnons l'expression proposée.

$$\begin{aligned}(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) &= x \times x^3 + x \times x^2 + x \times x + x \times 1 \\ &\quad + (-1) \times x^3 + (-1) \times x^2 + (-1) \times x + (-1) \times \times 1 \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + x - x^3 - x^2 - x - 1\end{aligned}$$

Nous observons un télescopage des termes :

$$\begin{aligned}(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) &= x^4 + (x^3 - x^3) + (x^2 - x^2) + (x - x) - 1 \\ &= x^4 - 1\end{aligned}$$

$$\boxed{(x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4-1.}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&(x-1)(x^n+\cdots+x+1)\\
&= x^{n+1}+x^n+\cdots+x^2+x-x^n-\cdots-x-1\\
&= x^{n+1}-1
\end{aligned}$$

(c)

$$(2-1)(2^n+2^{n-1}+\cdots+2^2+2+1) = 2^{n+1}-1$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
2^n+2^{n-1}+\cdots+2^2+2+1 &= \frac{2^{n+1}-1}{2-1}\\
&= 2^{n+1}-1
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{12} &= 2^{12+1}-1\\
&= 4095
\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}
g(x) &= a^n\left(\frac{x^n}{a^n}-1\right)\\
&= a^n\left[\left(\frac{x}{a}\right)^n-1\right]
\end{aligned}$$

(b) Posons $X = \frac{x}{a}$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= a^n(X^n-1)\\
&= a^n\left[(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X+1)\right]\\
&= (aX-a)(a^{n-1}X^{n-1}+\cdots+a^{n-1}x+a^{n-1})\\
&= \left(a\frac{x}{a}-a\right)\left(a^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}}+\cdots+a^{n-1}\frac{x}{a}+a^n\right)\\
&= (x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})
\end{aligned}$$