Polynômes de degré deux : cas général.

Nous allons ici présenter une étude complète (en restant dans $\mathbb{R}$) de tous les polynômes de degré deux. Il s'agit des polynômes admettant une forme développée $aX^2 + bX + c$ ou une forme factorisée $a(X - x_1)(X - x_2)$. Nous allons voir une nouvelle forme appelée forme canonique : $a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta$ qui permet de démontrer les résultats importants de cette leçon.

Du point de vu algébrique nous allons compléter les résultats que nous avions déjà établis sur les racines.

Du point de vue analytique nous allons présenter une étude des variations des fonctions polynomiales de degré deux grâce à l'outil algébrique.

I Recherche des racines : épisode 1.

Rappelons ici des méthodes déjà vues pour trouver des racines.

1 Factoriser, notamment, grâce aux identités remarquables.

La factorisation permet parfois de trouver des racines. Les identités remarquables notamment sont tout indiquées puisque nous considérons des polynômes de degré deux.

Exercice 1.

Résolvez l'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Exercice 2. Application.

Résolvez l'équation $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Exercice 3.

Résolvez l'équation $x^2 - 36 = 0$.

Exercice 4. Application.

Résolvez l'équation $7x^2 - 4 = 0$.

2 Racines simples et coefficients.

Nous avions également la possibilité de rechercher des racines simples pour résoudre une équation polynomiale.

Exercice 5. ♥
Résolvez l'équation $-12X^2 - 24X + 36 = 0$.

Exercice 6.
Résolvez l'équation $x^2 + 326x - 327 = 0$.

Exercice 7.
Résolvez l'équation $-2x^2 + 4002x - 4000 = 0$.

II Recherche des racines : épisode 2.

1 Forme canonique.

Dans l'exercice suivant nous voyons comment résoudre des équations polynomiales de degré deux de plus en plus complexes.

Exercice 8.

1. Résolvez l'équation $x^2 - \frac{4}{9} = 0$.
2. Déduisez-en une résolution de l'équation $(x-2)^2 - \frac{4}{9} = 0$.
3. Déduisez-en une résolution de l'équation : $9(x-2)^2 - 4 = 0$.
4. Déduisez-en une résolution de l'équation : $9x^2 - 36x + 32 = 0$.

La résolution, dans l'exercice précédent, repose sur la possibilité d'écrire la forme développée $9X^2 - 36X + 32$ sous la forme d'une identité remarquable, $9(X-2)^2 - 4$. Cette dernière forme, que nous appellerons forme canonique joue un rôle technique important.

Voici une démarche permettant d'obtenir cette forme canonique à partir d'une forme développée.

Exercice 9. ♥

Recopiez en complétant par des nombres le raisonnement suivant :

Si $P(X) = 3X^2 - 12X + 22$ alors en essayant de faire apparaître une identité remarquable nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
P(X) &= 3(X^2 - 4X) + 22 \\
&= 3(x^2 - 2 \times X \times 2) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2 + 2^2 - 2^2) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2 + 2^2) + 3 \times (-2^2) + 22 \\
&= 3(X - 2)^2 + 10
\end{aligned}$$

Proposition 1 - forme canonique.

Soient :

. $a \in \mathbb{R}^*$,

. b, $c \in \mathbb{R}$,

. $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Il est toujours possible d'écrire P sous la forme suivante appelée *forme canonique* de P

$$P(X) = a\,(X - \alpha)^2 + \beta$$

avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = P(\alpha).$$

Remarques.

1. La réciproque de cette proposition (toute forme canonique est l'expression d'un polynôme de degré deux) est immédiate en développant.

   Dorénavant lorsque vous rencontrerez la forme canonique d'un trinôme vous pourrez affirmer sans démonstration qu'il s'agit d'un polynôme de degré deux.

2. La formule $\alpha = -\frac{b}{2a}$ est à connaître car très pratique dans les exercices (et $\beta = f(\alpha)$).

Exercice 10. Application.

Donnez la forme canonique de P, puis précisez les valeurs de a, α et β dans les cas suivants.

1. $P(X) = 2X^2 - 12X + 19$
2. $P(X) = X^2 + 1$
3. $P(X) = X^2 - 2X + 1$
4. $P(X) = -7X^2 - 14X + 3$

Exercice 11. ♥

Donnez la forme canonique de $P(X) = -2x^2 - 4x - 14$ (en utilisant les formules pour α et β).

Exercice 12. Application.

2 Les racines grâce à la forme canonique.

La rédaction que nous allons voir dans les deux exercices qui suivent n'est pas belle et ne doit pas être reproduite, notamment la fin du raisonnement qui devrait se faire avec une identité remarquable.

Exercice 13. Recherche.

Recherchez les racines du trinôme $P(X) = -3(X-1)^2 + 12$ en résolvant l'équation $P(x) = 0$.

$$-3(x-1)^2 + 12 = 0$$

$$-3(x-1)^2 + 12 \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-3(x-1)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{-3(x-1)^2}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$(x-1)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc :

$$x - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Conclusion :

Exercice 14. Recherche.

Recherchez les racines du trinôme $P(X) = 2(X+3)^2+8$ en résolvant l'équation $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2(x+3)^2+8 &= 0 \\ 2(x+3)^2+8\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2(x+3)^2 &= \ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Conclusion :

La démarche vue dans les deux exercices précédents se généralise.

La forme canonique de la fonction $P(x) = ax^2+bx+c$ est :

$$P(X) = a\left(X - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

En résolvant l'équation comme on l'a fait précédemment :

$$\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Pour pouvoir prendre la racine carré des deux côtés de l'égalité il faut d'abord s'assurer qu'il s'agit de nombres positifs.

Pour cela je cherche le signe du nombre b^2-4ac qui est appelé *discriminant* et est noté Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

S'il existe des racines elles sont alors données par les formules :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exercice 15. ♥

Déterminez les solutions réelles de l'équation $-3x^2-6x+24=0$.

Exercice 16. ♥

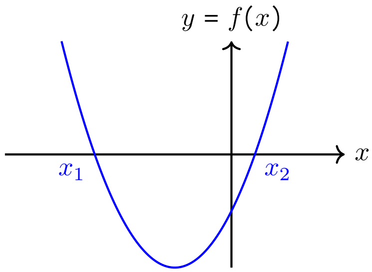
Déterminez, si possible, la forme factorisée de $P(X) = 2X^2+24X+72$.

Exercice 17. ♥

Déterminez les éventuels zéros de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2+x+1$.

III Application à l'étude du signe d'une fonction polynomiale de degré deux.

Pour étudier le signe d'une fonction polynomiale de degré deux nous privilégierons la forme factorisée. Si $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ alors x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses.



1 Utiliser la forme factorisée.

Exercice 18.
Étudiez le signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -2(x - 2)(x + 3)$.

Exercice 19.
Étudiez le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7(x + 3)^2$.

Exercice 20.
Dressez le tableau de signe de la fonction h définie par $h(x) = -x^2 - 1$ pour tout x réel.

2 Signe du trinôme dans le cas général.

L'observation géométrique sur geogebra (en ligne ou en téléchargement) fait apparaître la formule mnémotechnique déjà vue reste valable : un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre les éventuelles racines.

Nous avons déjà justifié ce résultat lorsqu'il existe une forme factorisée. Justifions brièvement pourquoi ce résultat reste valable lorsque le trinôme n'a pas de racines.

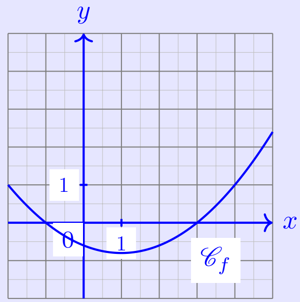
La forme canonique pour un trinôme f est

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \\ &= a\left[\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Si $\Delta<0$, alors $\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ et donc f est du signe de a.

Exercice 21.

Que pouvez-vous dire des coefficients a, x_1 et x_2 de la forme factorisée de la fonction f polynomiale de degré deux représentée ci-contre.



Exercice 22. Application.

Dressez le tableau de signe de

1. la fonction ℓ définie sur $[-10;10]$ par $\ell(x)=x+1$ pour tout $x\in[-10;10]$,
2. la fonction f définie sur $[-10;10]$ par $f(x)=3x^2-24x+48$ pour tout $x\in[-10;10]$,
3. la fonction g définie sur $[-5;3]$ par $g(x)=x^2+x-2$ pour tout $x\in[-5;3]$,
4. la fonction h trinôme définie pour tout $x\in[-2;2]$ par $h(x)=-x^2+4x-3$.

Exercice 23. Application.

Soit $f: x\mapsto -2x^2-4x+6$ définie sur $[-7;10]$.

1. Déterminez les racines de f.
2. Étudiez le signe de f sur $[-7;10]$.
3. Résolvez dans $[-7;10]$ l'inéquation

$$(E): \quad -2x^2-4x+6>0.$$

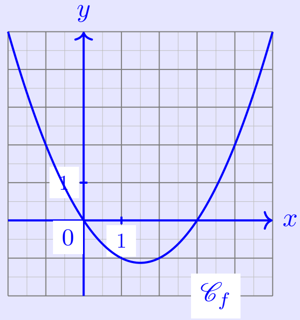
Exercice 24. ♥

Résolvez l'inéquation $2x^2 - 220x + 2000 > 0$ dans $\mathbb{R}$.

Se ramener à l'étude du signe d'une fonction judicieusement choisie.

Exercice 25. Application.

Sachant que le coefficient dominant de la fonction polynomiale de degré deux f, représentée ci-contre, est $\frac{1}{2}$, donnez sans justification la forme factorisée de f.



IV Application à l'étude des variations d'une fonction polynomiale de degré deux.

Exercice 26.

Rappelons la définition suivante : une fonction définie sur un intervalle I (non vide) est strictement croissante si et seulement si : quelque soient x et y choisis dans I on a $f(x) < f(y)$. Ce que l'on exprime parfois en disant que les fonctions croissantes conservent l'ordre.

On étudie le sens de variation sur $]-\infty; 3]$ de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 - 5$.

Recopier et compléter en justifiant chaque étape.

Soients a et b deux réels tels que $a < b \leqslant 3$.

$$a - 3 \ldots b - 3 \ldots 0$$
$$(a-3)^2 \ldots (b-3)^2$$
$$(a-3)^2 - 5 \ldots (b-3)^2 - 5$$
$$f(a) \ldots f(b)$$

Donc f est ... sur ...

Proposition 2

Soient :

. $a \in \mathbb{R}^*$,

. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

. $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$ alors le tableau de variation de f est

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Remarques.

1. On déduit du tableau de variation que, si $a > 0$, les fonctions polynomiales de degré 2 admettent sur $\mathbb{R}$ un minimum absolu égal à β qui est atteint pour $x = \alpha$.
2. Si $a < 0$, alors les variations de f sont contraires.
3. Les fonctions polynomiales de degré 2 admettent toujours un extremum. Si $a < 0$, alors β est un maximum.
4. L'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = \alpha$.
5. Nous avons un résultat symétrique lorsque $a < 0$.
6. Ce résultat illustre l'efficacité de la forme canonique qui permet de trouver le tableau de variation d'une fonction polynomiale de degré deux.
7. Nous remarquons en particulier que le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ de la parabole, que nous appellerons *le sommet de la parabole*, correspond à un minimum ou à un maximum de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.
8. Le résultat théorique étant démontré voyons maintenant comment, dans la pratique, trouver le tableau de variation en raisonnant géométriquement.
   — Le signe de a nous indique si la parabole est orientée vers le haut ou vers le bas donc le sens des flèches dans le tableau de variation.
   — La valeur de α correspond à la valeur de x pour laquelle la fonction change de sens de variation.
   — β est l'image de α par f.

Exercice 27. ♥

Donnez les tableaux de variation sur l'intervalle I des fonctions définies par leur expression algébrique et précisez leurs éventuels extrema.

1. Pour tout x de $I = \mathbb{R}$, $f(x) = -3(x+4)^2 - 7$.
2. Quelque soit x choisi dans $I = [-5 ; 5]$, $g(x) = -8x + 4x^2 + 7$.
3. $I =]-\infty ; 4]$ et : $\forall x \in I$, $h(x) = (x+3)^2 - (x-5)^2$.

V Exercices.

Exercice 28. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = 49x^2 - 4$.
2. $f_2(x) = -3x^2 + 3x$.
3. $f_3(x) = 4x^2 - 8x$.
4. $f_4(x) = 3x^2 + 30x + 75$.
5. $f_5(x) = (4x-1) + (4x-1)(x+2)$.
6. $f_6(x) = x^2 - 4x + 4$.

Exercice 29. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = 6x - 3x^2$.
2. $f_2(x) = -9x^2 + 36$.
3. $f_3(x) = 4x^2 - 8x + 8$.
4. $f_4(x) = -x^2 - 2x - 1$.
5. $f_5(x) = 2(x-3) - (x-4)(x-3)$.
6. $f_6(x) = (x+2)^2 - 8$.

Exercice 30. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = (2x+1)^2 - (1-x)^2$.
2. $f_2(x) = x^2 - 20x + 100$.
3. $f_3(x) = 25 - (x+1)^2$.
4. $f_4(x) = 4x^2 + 4 + 8x$.
5. $f_5(x) = 16(x+1)^2 - 25x^2$.
6. $f_6(x) = 16x^2 - 81$.

Exercice 31. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 - 4 + (x-2)(x+1)$.
2. $f_2(x) = 3x^2 - 12x + 12$.
3. $f_3(x) = (x+1)(x+2) - (3x+6)$.
4. $f_4(x) = x^2 - 2x + 3x^2$.
5. $f_5(x) = 2x(x+3) + 4x + 12$.
6. $f_6(x) = (x-3)(3x-4) - 3x + 4$.

Exercice 32. Application.

Donnez la forme canonique de la fonction polynomiale de degré deux, f, lorsque, pour tout x réel,

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$.
2. $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$.
3. $f(x) = 4x^2 + 8x + 7$.
4. $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$.
5. $f(x) = x^2 - 8x + 23$.
6. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.
7. $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$.
8. $f(x) = 3x^2 + 30x$.
9. $f(x) = x^2 - 2$.
10. $f(x) = -4x^2 - 8x - 104$.

Exercice 33. Application.

Donnez la forme canonique de la fonction polynomiale de degré deux, f, lorsque, pour tout x réel,

1. $f(x) = -3x^2 - 30x - 102$.
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}$.
3. $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{37}{9}$.
4. $f(x) = -x^2 - 14x - 39$.
5. $f(x) = x^2 - 12x + 38$.
6. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{19}{84}$.
7. $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}x + \sqrt{2}$.
8. $f(x) = 3x^2 + 6\pi + 3\pi^2 + 1$.
9. $f(x) = x^2 - 2$.
10. $f(x) = \sqrt{\pi}x^2 - \frac{4\sqrt{\pi}}{3}x + \frac{4\sqrt{\pi}}{9}$.

Exercice 34. Application.

Résolvez les équations suivantes.

1. $2x^2 + 24x + 72 = 0$.
2. $-x^2 - 12x = 35$.
3. $-2x^2 + 4x - 3 = 0$.
4. $-3x^2 + 3x + 330 = 0$.
5. $-4x^2 + 96x - 576 = 0$.
6. $x^2 - 8x = -23$.
7. $x^2 - 17x + 52 = 0$.
8. $2x^2 - 18x + 40 = 0$.
9. $2x^2 + 28x + 91 = 0$.
10. $-3x^2 + 3x + 126 = 0$.

Exercice 35. Application.

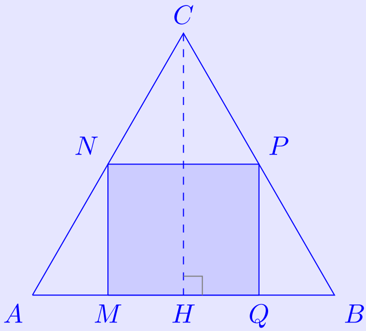
Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2 + 5x - 6 = 0$.
2. $x^2 + x + 2 = 0$.
3. $-2x^2 + 3x + 4 = 0$.
4. $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
5. $x^2 - 9x + 20 = 0$.
6. $2x^2 - 2x\sqrt{5} + 3 = 0$.
7. $3x^2 + 2x\sqrt{6} - 1 = 0$.
8. $4x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = 0$.
9. $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$.
10. $16x^2 - 8x + 13 = 0$.

Exercice 36. Application.

Exercice 37.

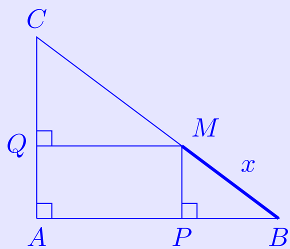
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 8. On inscrit dans ce triangle un rectangle $MNPQ$.
On pose $AM = x$.



1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
2. Calculez CH où H est le pied de la hauteur issue de C.
3. Déduisez-en que $MN = x\sqrt{3}$.
4. Déterminez la valeur de x pour laquelle l'aire de $MNPQ$ est maximale.

Exercice 38.

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 8$ et $AC = 6$. M est un point de l'hypoténuse $[BC]$.
Par M, on trace les perpendiculaires à (AB) et (AC). Elles coupent $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en P et Q.
On pose $BM = x$.
On se propose d'étudier quelques propriétés du périmètre du rectangle $APMQ$.

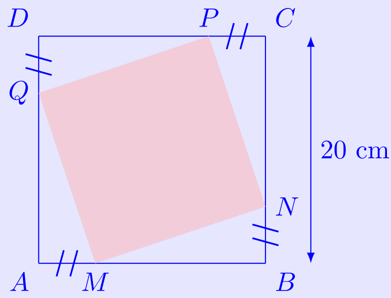


1. Démontrez que $MP = 0{,}6x$ et $MQ = 8 - 0{,}8x$.
2. Exprimez, en fonction de x, le périmètre $p(x)$ du rectangle $APMQ$.
3. Pour quelles positions de M le périmètre est-il supérieur ou égale à 13,5 ?
4. Comparez le périmètre de $AMPQ$ au demi-périmètre du triangle ABC.

Exercice 39.

Dans un carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-contre.

On pose $x = AM = BN = CP = DQ$ avec $0 \leq x \leq 20$.



Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ dépasse 272 cm^2.

1. Exprimez l'aire en cm^2, $g(x)$ du carré $MNPQ$ en fonction de x, sous forme développée, ordonnée et réduite.
2. Prouvez que $g(x) > 272$ équivaut à
$$2x^2 - 40x + 128 > 0.$$
3. On note $f(x) = 2x^2 - 40x + 128$. Affichez sur votre calculatrice la courbe représentative de f, tracez à main levée la courbe observée puis conjecturez les solutions du problème.

   Pour la fenêtre on utilisera les paramètres d'affichages suivants.

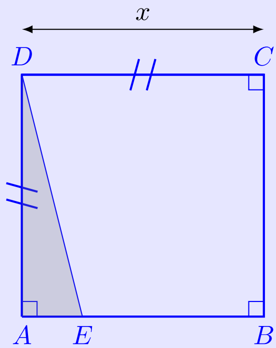
   Axe des abscisses : $0 \leq x \leq 20$.

   Axe des ordonnées : $-100 \leq y \leq 200$.
4. Retrouvez le résultat par le calcul.

Exercice 40.

$ABCD$ est un carré de côté x, exprimé en cm, avec $x > 6$. E est le point du segment $[AB]$ tel que

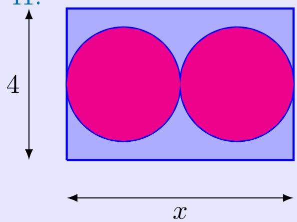
$$EB = 6 \text{ cm}$$



1. Exprimez en fonction de x, l'aire en cm^2 du triangle AED.
2. Peut-on trouver x pour que l'aire du carré $ABCD$ soit strictement supérieure au triple de l'aire du triangle AED ?

Exercice 41.

Soit un réel x dans $[0;8]$. On considère un rectangle de dimension 4 cm sur x cm, dans lequel on trace deux disques de même rayon comme sur la figure ci-contre.

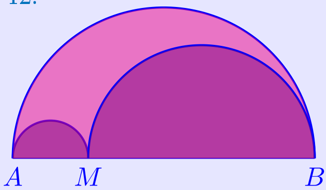


On souhaite déterminer les valeurs de x de façon que l'aire bleue (ce qu'il reste du rectangle) soit supérieure à l'aire rose (les deux disques).

1. Montrez que le problème se ramène à la résolution de l'inéquation $\dfrac{\pi x^2}{8} \leq 2x$ sur $[0;8]$.
2. Montrez que l'ensemble des solutions est $\left[0; \dfrac{16}{\pi}\right[$.

Exercice 42.

Soit M un point du segment $[AB]$. On considère les demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$ comme représentés ci-contre.



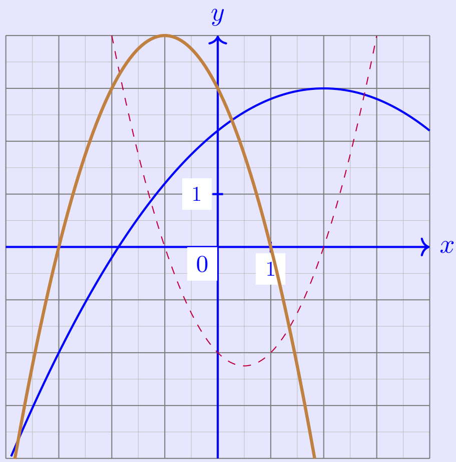
On donne $AB = 8$. Nous noterons $AM = 2x$. $f(x)$ désignera l'aire de la partie colorée en violet (*i.e.* les deux demi-disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$).

1. À quel intervalle appartient x ?
2. Démontrez que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.
3. Les aires des deux parties colorées peuvent-elles être égales ?

Exercice 43.

Sont tracées ci-contre les courbes représentatives des fonctions polynomiales de degré deux f, g et h.
Nous savons de plus que $f(-3) = -2$.
Recopiez en complétant, sans aucune justification, les expressions algébriques suivantes.

- $f(x) = -0{,}02(x - \dots)^2 + \dots$
- $g(x) = x^2 - x + \dots$
- $h(x) = -(x - \dots)(x - \dots)$



Exercice 44.

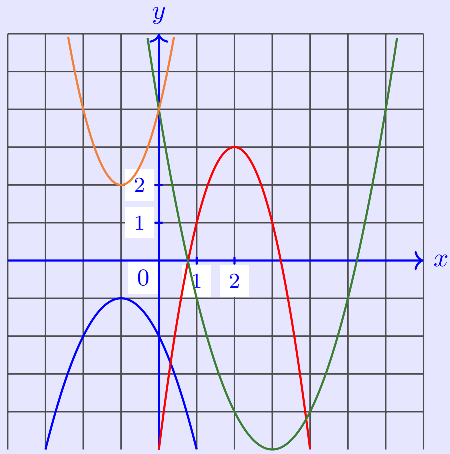
Associez chaque courbe à son trinôme.

$f(x) = -(x+1)^2 - 1$

$g(x) = -2(x-2)^2 + 3$

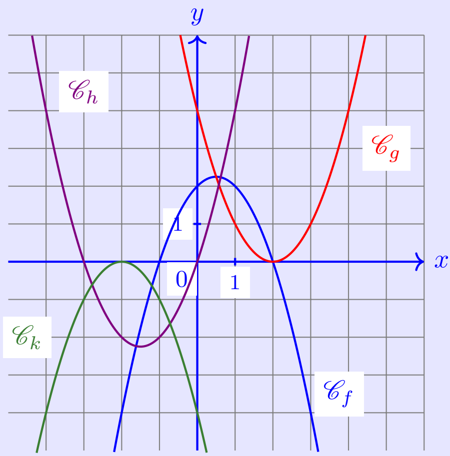
$h(x) = (x-3)^2 - 5$

$k(x) = 2(x+1)^2 + 2$



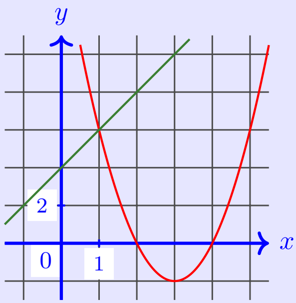
Exercice 45.

Sachant que les fonctions polynomiales de degré deux représentées ci-dessous s'écrivent sous la forme $x \mapsto x^2 + bx + c$ ou $x \mapsto -x^2 + bx + c$, donnez la forme factorisée de chaque fonction.



Exercice 46.

On considère le polynôme $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ et la fonction affine $g(x) = 2x + 4$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous.



1. (a) Déterminez par lecture graphique, une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
   (b) Vérifiez que cette solution est exacte.
2. Déterminez la seconde solution.

Exercice 47.

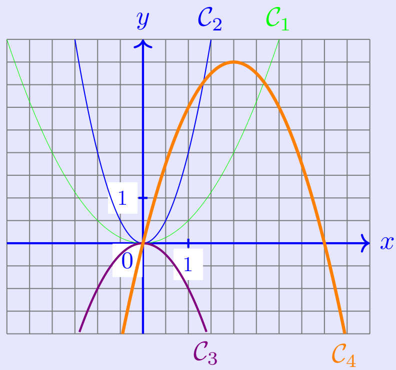
Les fonction indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elle.

$f_1 : x \mapsto -x^2$

$f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

$f_3 : x \mapsto 2x^2$

$f_4 : x \mapsto x(4 - x)$



Exercice 48.

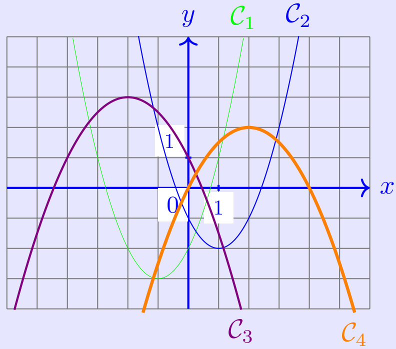
Les fonctions indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elles.

$f_1 : x \mapsto x^2 + 2x - 2$

$f_2 : x \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

$f_3 : x \mapsto (x-1)^2 - 2$

$f_4 : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$



Exercice 49.

Démontrez que $(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2 + 1 < (\sqrt{3}+\sqrt{4}+1)^2 + 1$.

Exercice 50.

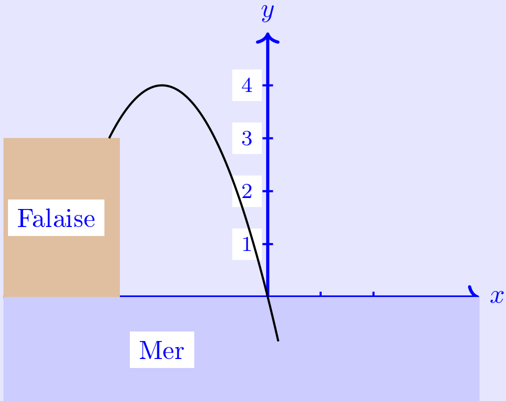
Les fonctions considérées ici sont définies sur $\mathbb{R}$.
Pour chacune d'elles, dressez son tableau de variation.

$f(x) = 5 - 2(x+1)^2$ $\quad$ $g(x) = 2(1-3x)(1-x)$

$u(t) = \frac{1}{4} - t^2$ $\quad$ $v(t) = \frac{1}{3}(1-t^2)$

Exercice 51.

La trajectoire d'un plongeur est modélisée par la fonction f définie sur $[-3;0]$ par $f(x) = -x(x+4)$. Le plongeur saute de l'abscisse -3.



1. Montrez que f est une fonction polynomiale de degré deux.
2. Montrez que , pour tout x de l'intervalle $[-3;0]$:

$$f(x) = -(x+2)^2 + 4.$$

3. Donnez le tableau de variations complet de f sur l'intervalle $[-3;0]$.
4. (a) Quelle est la hauteur de la falaise ?
   (b) Quelle est la plus grande altitude atteinte par le plongeur ?

Exercice 52.

Après la vente de x roses, le bénéfice net d'un fleuriste lors d'une journée s'exprime, en euros, par :

$$B(x) = -0{,}005x^2 + 3{,}2x - 82.$$

1. (a) Dressez le tableau de signe de B sur $[0;700]$.
   (b) Montrer que $B(x) = -0{,}005(x-320)^2 + 430$, quelque soit $x \in [0;700]$.
2. Combien de roses le fleuriste doit-il vendre pour réaliser des bénéfices ($B(x) \geqslant 0$) ?
3. À partir de quelle quantité de roses vendues le bénéfice commence-t-il à décroître ?

Exercice 53.

Une entreprise, dont la production de casques audio varie entre 50 et 250 pièces par jour, estime que le coût de fabrication (en €) est donné par :

$$C(q) = 0{,}08q^2 - 1{,}6q + 108,$$

où q est le nombre de casques produits.
Chaque casque est vendu 15 € l'unité.

1. (a) Combien coûte la fabrication de 80 casques audio ?
   (b) Calculez la recette associée à la vente de 80 casques. L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices pour 80 casques produits et vendus ?
2. (a) Exprimez la recette $R(q)$ exprimée en euros en fonction de la quantité q de casques fabriqués et vendus en un jour.
   (b) Montrez que le bénéfice sur une journée correspondant à la fabrication et à la vente de q casques est :

   $$B(q) = -0{,}08q^2 + 16{,}6q - 108.$$

   (c) Combien faut-il construire et vendre de casques pour que le bénéfice journalier soit supérieur à 400 € ?
   (d) Quel est le bénéfice maximal de l'entreprise ? Pour combien de casques produits ce bénéfice maximum est-il atteint ?

Exercice 54.

Une entreprise fabrique et vend de la pâte à papier. Le coût de production de q tonnes de pâte à papier est donné, en milliers d'euros par

$$C(q) = 0{,}02q^2 + 0{,}1q + 9$$

pour $q \in [0; 80]$.
La recette, en milliers d'euros, engendrée par la vente de q tonnes de pâte à papier est donnée par

$$R(q) = 1{,}2q$$

1. (a) Quel est le coût le fabrication d'une tonne de pâte à papier ?
   (b) Quel est prix de vente d'une tonne de pâte à papier ?
   (c) L'entreprise est-elle bénéficiaire lorsqu'elle vend et produit une tonne de pâte à papier ?
2. Avec la calculatrice conjecturez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.
3. Démontrez que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend q tonnes de pâte à papier est

$$B(q) = -0{,}02q^2 + 1{,}1q - 9$$

4. Démontrez que $B(q) = -0{,}02(q - 45)(q - 10)$ quelque soit $q \in [0; 80]$.
5. Déterminez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.

Exercice 55.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{2x - 3}{-2x^2 + 9x - 4} \geqslant 0.$$

Exercice 56.

1. On se propose ici de résoudre l'équation :

$$2x^4 + 3{,}5x^2 - 1 = 0 \quad (E)$$

   (a) Montrez qu'en posant $X = x^2$, l'équation (E) s'écrit

$$2X^2 + 3{,}5X - 1 = 0 \quad (E')$$

   (b) Résolvez l'équation (E') d'inconnue X.

   (c) Déduisez-en les solutions de l'équation (E) en utilisant le fait que $X = x^2$.

2. En vous inspirant de la méthode précédente résolvez dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ l'équation :

$$12\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - 10\left(\frac{1}{x-1}\right) + 2 = 0 \quad (F)$$

Exercice 57.

Un architecte souhaite construire une arche parabolique. Il a décidé de modéliser sa construction par la représentation graphique du trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}08x^2 + 3{,}2x - 14$ où 1 unité correspond à 1 mètre.

1. Résolvez l'équation $f(x) = 0$.
2. Déduisez-en la longueur de l'arche au sol.

Exercice 58.

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. (a) Développez, ordonnez et réduisez $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$.

   (b) Développez, ordonnez et réduisez $(x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1)$.

   (c) Déduisez-en une expression de la somme $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1$ sous forme fractionnaire et en fonction de x.

   (d) Démontrez que $2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^2 + 2 + 1$ est un entier.

   (e) Calculez $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{12}$.

2. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $g : x \mapsto x^n - a^n$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

   (a) Factorisez $g(x)$ par a^n.

   (b) Utilisez alors le résultat de la question 1 (et éventuellement un changement de variable) pour établir une expression de $g(x)$ dans laquelle vous aurez factorisé par $x - a$.