Polynômes de degré deux : cas général.

Nous allons ici présenter une étude complète (en restant dans $\mathbb{R}$) de tous les polynômes de degré deux. Il s'agit des polynômes admettant une forme développée $aX^2 + bX + c$ ou une forme factorisée $a(X - x_1)(X - x_2)$. Nous allons voir une nouvelle forme appelée forme canonique : $a(x - \alpha)^2 + \beta$ qui permet de démontrer les résultats importants de cette leçon.

Du point de vu algébrique nous allons compléter les résultats que nous avions déjà établis sur les racines.

Du point de vue analytique nous allons présenter une étude des variations des fonctions polynomiales de degré deux grâce à l'outil algébrique.

I Recherche des racines : épisode 1.

Rappelons ici des méthodes déjà vues pour trouver des racines.

1 Factoriser, notamment, grâce aux identités remarquables.

La factorisation permet parfois de trouver des racines. Les identités remarquables notamment sont tout indiquées puisque nous considérons des polynômes de degré deux.

Exercice 1.
Résolvez l'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Correction de l'exercice 1 ....

Résolvons l'équation.

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{3\}$.

Remarquons que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 - 6x + 9$ est tangente à l'axe des abscisses en l'abscisse 3.

.... fin de la correction de l'exercice 1.

Exercice 2. Application.
Résolvez l'équation $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Correction de l'exercice 2 . . . .

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}(2x)^2 + 2 \times x \times 2 + 1^2 &= 0\\ (2x+1)^2 &= 0\\ 2x + 1 &= 0\\ 2x &= -1\\ x &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathscr{S} = \left\{-\tfrac{1}{2}\right\}.}$$

Remarquons que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 4x^2 + 4x + 1$ est tangente à l'axe des abscisses en l'abscisse $-\frac{1}{2}$.
. . . . fin de la correction de l'exercice 2.

Exercice 3.
Résolvez l'équation $x^2 - 36 = 0$.

Correction de l'exercice 3 . . . .

$$x^2 - 36 = 0$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}x^2 - 6^2 &= 0\\ (x-6)(x+6) &= 0\\ x - 6 = 0 \quad &\text{ou} \quad x + 6 = 0\\ x = 6 \quad &\text{ou} \quad x = -6\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{-6; 6\}$.

Remarquons que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 - 36$ coupe l'axe des abscisses en les abscisses -6 et 6.

.... fin de la correction de l'exercice 3.

Exercice 4. Application.

Résolvez l'équation $7x^2 - 4 = 0$.

Correction de l'exercice 4 ....

$$7x^2 - 4 = 0$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{7}x\right)^2 - 2^2 &= 0 \\ \left(\sqrt{7}x - 2\right)\left(\sqrt{7}x + 2\right) &= 0 \\ \sqrt{7}x - 2 = 0 \quad &\text{ou} \quad \sqrt{7}x + 2 = 0 \\ \sqrt{7}x = 2 \quad &\text{ou} \quad \sqrt{7} = -2 \\ x = \frac{2}{\sqrt{7}} \quad &\text{ou} \quad x = -\frac{2}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

Rappelons que la présentation classique en mathématique de tels nombres consiste à ne pas laisser de radical au dénominateur. Pour cela : $\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{-\frac{2}{7}\sqrt{7}; \frac{2}{7}\sqrt{7}\right\}$.

Remarquons que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 7x^2 - 4$ coupe l'axe des abscisses en les abscisses $-\frac{2}{7}\sqrt{7}$ et $\frac{2}{7}\sqrt{7}$.

.... fin de la correction de l'exercice 4.

2 Racines simples et coefficients.

Nous avions également la possibilité de rechercher des racines simples pour résoudre une équation polynomiale.

Exercice 5. ♥

Résolvez l'équation $-12X^2 - 24X + 36 = 0$.

Correction de l'exercice 5. . . . .

Nous reconnaissons un polynôme de degré deux. Nous essayons de reconnaître une identité remarquable. Cela ne fonctionnant pas nous essayons une racine simple.

Notons P le polynôme de degré deux donnée sous forme développée avec : $a = -12$, $b = -24$ et $c = 36$.

Déterminons les racines de P.

Nous remarquons que $P(1) = 0$ donc $x_1 = 1$ est une racine de P.
Or

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

donc :

$$1 \times x_2 = \frac{36}{-12}$$

Enfin :

$$x_2 = -3$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{1; -3\}$.

Nous pourrions également trouver la forme factorisée de P : $P(x) = -12(X - 1)(X + 3)$.

. . . . fin de la correction de l'exercice 5.

Exercice 6.
Résolvez l'équation $x^2 + 326x - 327 = 0$.

Correction de l'exercice 6. . . . .

Résolvons l'équation.

*

. . . . fin de la correction de l'exercice 6.

Exercice 7.
Résolvez l'équation $-2x^2 + 4002x - 4000 = 0$.

II Recherche des racines : épisode 2.

1 Forme canonique.

Dans l'exercice suivant nous voyons comment résoudre des équations polynomiales de degré deux de plus en plus complexes.

Exercice 8.

1. Résolvez l'équation $x^2 - \frac{4}{9} = 0$.
2. Déduisez-en une résolution de l'équation $(x-2)^2 - \frac{4}{9} = 0$.
3. Déduisez-en une résolution de l'équation : $9(x-2)^2 - 4 = 0$.
4. Déduisez-en une résolution de l'équation : $9x^2 - 36x + 32 = 0$.

La résolution, dans l'exercice précédent, repose sur la possibilité d'écrire la forme développée $9X^2 - 36X + 32$ sous la forme d'une identité remarquable, $9(X-2)^2 - 4$. Cette dernière forme, que nous appellerons forme canonique joue un rôle technique important.

Voici une démarche permettant d'obtenir cette forme canonique à partir d'une forme développée.

Exercice 9. ♥

Recopiez en complétant par des nombres le raisonnement suivant :

Si $P(X) = 3X^2 - 12X + 22$ alors en essayant de faire apparaître une identité remarquable nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
P(X) &= 3(X^2 - 4X) + 22 \\
&= 3(x^2 - 2 \times X \times 2) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2 + 2^2 - 2^2) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2 + 2^2) + 3 \times (-2^2) + 22 \\
&= 3(X-2)^2 + 10
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9 . . . .

$$\begin{aligned}
P(X) &= 3(X^2 - 4X) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2 + 2^2 - 2^2) + 22 \\
&= 3(X^2 - 2 \times X \times 2 + 2^2) + 3 \times (-2^2) + 22 \\
&= 3(X - 2)^2 + 10
\end{aligned}$$

Cette démarche est celle employée pour déterminer la forme canonique (voir ci-dessous) à partir de la forme développée. Elle est à connaître pour les élèves qui souhaitent poursuivre l'étude des mathématiques.

.... fin de la correction de l'exercice 9.

Proposition 1 - forme canonique.

Soient :

. $a \in \mathbb{R}^*$,

. b, $c \in \mathbb{R}$,

. $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Il est toujours possible d'écrire P sous la forme suivante appelée *forme canonique* de P

$$P(X) = a\,(X - \alpha)^2 + \beta$$

avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = P(\alpha).$$

Démonstration 1 ....

Démonstration à la Gauss : il suffit de choisir $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = c - \frac{b^2}{2a}$ et de vérifier que cela fonctionne en substituant.

Démonstration plus naturelle : on part de la forme développée et on essaie de factoriser en faisant apparaître une identité remarquable.

$$\begin{aligned}
P(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left[x^2 + 2 \times x \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}\right)\right] + c
\end{aligned}$$

Ici on truande pour faire apparaitre une identité remarquable en ajoutant et en soustrayant la même quantité :

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\left[x^2 + 2\times x\times\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c\\
&= a\left[x^2 + 2\times x\times\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c\\
&= a\left[x^2 + 2\times x\times\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c\\
&= a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a} + c\\
&= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c\\
&= a(x-\alpha)^2 + \beta
\end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = c - \frac{b^2}{4a}$. .... Fin de la démonstration

Remarques.

1. La réciproque de cette proposition (toute forme canonique est l'expression d'un polynôme de degré deux) est immédiate en développant.

   Démonstration 2..
   Développons, réduisons et ordonnons la forme canonique.

$$\begin{aligned}
a(x-\alpha)^2 + \beta &= a[x^2 - 2\times x\times\alpha + \alpha^2] + \beta\\
&= ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta\\
&= ax^2 + (-2a\alpha)x + (a\alpha^2 + \beta)
\end{aligned}$$

   La forme canonique est un polynôme de degré deux.

   .... Fin de la démonstration

   Dorénavant lorsque vous rencontrerez la forme canonique d'un trinôme vous pourrez affirmer sans démonstration qu'il s'agit d'un polynôme de degré deux.

2. La formule $\alpha = -\frac{b}{2a}$ est à connaître car très pratique dans les exercices (et $\beta = f(\alpha)$).

Exercice 10. Application.

Donnez la forme canonique de P, puis précisez les valeurs de a, α et β dans les cas suivants.

1. $P(X) = 2X^2 - 12X + 19$
2. $P(X) = X^2 + 1$
3. $P(X) = X^2 - 2X + 1$
4. $P(X) = -7X^2 - 14X + 3$

Exercice 11. ♥

Donnez la forme canonique de $P(X) = -2x^2 - 4x - 14$ (en utilisant les formules pour α et β).

Correction de l'exercice 11 ....

P est un polynôme de degré deux donné sous forme développée avec $a = -2$, $b = -4$ et $c = -14$.

Déterminons les coefficients de la forme canonique.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \times (-2)} = -1$$

et

$$\beta = P(\alpha)$$

Pour calculer $P(\alpha)$ on utilise la forme développée

$$\begin{aligned} &= -2\alpha^2 - 4 \times \alpha - 14 \\ &= -2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) - 14 \\ &= -12 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} P(X) &= a(X - \alpha)^2 + \beta \\ &= -2(X - (-1))^2 + (-12) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X) = -2(X + 1)^2 - 12.}$$

.... fin de la correction de l'exercice 11.

Exercice 12. Application.

2 Les racines grâce à la forme canonique.

La rédaction que nous allons voir dans les deux exercices qui suivent n'est pas belle et ne doit pas être reproduite, notamment la fin du raisonnement qui devrait se faire avec une identité remarquable.

Exercice 13. Recherche.

Recherchez les racines du trinôme $P(X) = -3(X-1)^2 + 12$ en résolvant l'équation $P(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -3(x-1)^2 + 12 &= 0 \\ -3(x-1)^2 + 12 \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -3(x-1)^2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{-3(x-1)^2}{\ldots\ldots\ldots\ldots} &= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ (x-1)^2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

donc :

$x - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$x - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$x - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$x - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$x = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Conclusion :

Exercice 14. Recherche.

Recherchez les racines du trinôme $P(X) = 2(X+3)^2 + 8$ en résolvant l'équation $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2(x+3)^2 + 8 &= 0 \\ 2(x+3)^2 + 8 \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2(x+3)^2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Conclusion :

La démarche vue dans les deux exercices précédents se généralise.
La forme canonique de la fonction $P(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$$P(X) = a\left(X - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

En résolvant l'équation comme on l'a fait précédemment :

$$\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Pour pouvoir prendre la racine carré des deux côtés de l'égalité il faut d'abord s'assurer qu'il s'agit de nombres positifs.

Pour cela je cherche le signe du nombre $b^2 - 4ac$ qui est appelé *discriminant* et est noté Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

S'il existe des racines elles sont alors données par les formules :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exercice 15. ♥

Déterminez les solutions réelles de l'équation $-3x^2 - 6x + 24 = 0$.

Correction de l'exercice 15 .... ♡

Déterminons les solutions de l'équation.

1. Nature de l'équation.
   $P(X) = -3X^2 - 6X + 24$ est un polynôme du second degré : $a = -3$, $b = -6$ et $c = 24$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \times (-3) \times 24 \\ &= 324\end{aligned}$$

Comme Δ est strictement positif l'équation admet deux solutions distinctes.

3. Calcul des solutions.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-(-6)-\sqrt{324}}{2\times(-3)}$$
$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-(-6)+\sqrt{324}}{2\times(-3)}$$
$$x_2 = -4$$

4. Conclusion.

L'ensemble des solutions de l'équation $-3x^2-6x+24=0$ est $\mathcal{S}=\{-4;2\}$.

.... fin de la correction de l'exercice 15.

Exercice 16. ♥

Déterminez, si possible, la forme factorisée de $P(X) = 2X^2 + 24X + 72$.

Correction de l'exercice 16..

Déterminons les racines de f.

1. Nature de la fonction.
   Il s'agit d'un polynôme de degré deux avec : $a = 2$, $b = 24$ et $c = 72$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 24^2 - 4\times 2\times 72\\ &= 0\end{aligned}$$

   Comme Δ est nul l'équation admet une solution (double).
3. Calcul de la solution.

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$
$$x_0 = \frac{-24}{2\times 2}$$
$$x_0 = -6$$

4. Conclusion.

La forme factorisée de P est donc

$$P(X) = 2(X+6)^2.$$

.... fin de la correction de l'exercice 16.

Exercice 17. ♥

Déterminez les éventuels zéros de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.

Correction de l'exercice 17..

1. Nature de la fonction.
   $X^2 + X + 1$ est un polynôme de degré deux avec : $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &= -3\end{aligned}$$

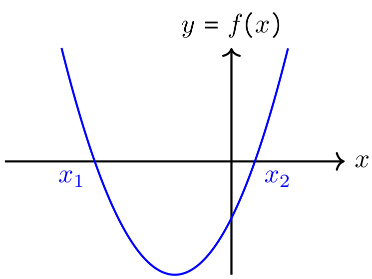
   Comme Δ est strictement négatif le polynôme n'admet aucune racine.
3. Conclusion.

   L'ensemble des zéros de f est $\mathcal{S} = \varnothing$.

.... fin de la correction de l'exercice 17.

III Application à l'étude du signe d'une fonction polynomiale de degré deux.

Pour étudier le signe d'une fonction polynomiale de degré deux nous privilégierons la forme factorisée. Si $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ alors x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses.



1 Utiliser la forme factorisée.

Exercice 18.
Étudiez le signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -2(x-2)(x+3)$.

Correction de l'exercice 18. . . . .

Dressons le tableau de signe de f.

f est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme factorisée avec $a = -2$, $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$.

f est donc du signe de $a < 0$ sauf entre ses racines.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

. . . . fin de la correction de l'exercice 18.

Exercice 19.
Étudiez le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7(x+3)^2$.

Correction de l'exercice 19. . . . .

Dressons le tableau de signe de g.

g est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme factorisée avec $a = 7$, $x_1 = -3$ et $x_2 = -3$.

g est donc du signe de $a > 0$ sauf entre ses racines.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

. . . . fin de la correction de l'exercice 19.

Exercice 20.
Dressez le tableau de signe de la fonction h définie par $h(x) = -x^2 - 1$ pour tout x réel.

Correction de l'exercice 20. . . . .

Démontrons que h est strictement négative.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Nous avons successivement

$$\begin{aligned} x^2 &\geqslant 0 \\ -x^2 &\leqslant 0 \\ -x^2 - 1 &< 0 \\ h(x) &< 0 \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) < 0$.

h est strictement négative.

.... fin de la correction de l'exercice 20.

2 Signe du trinôme dans le cas général.

L'observation géométrique sur geogebra (en ligne ou en téléchargement) fait apparaître la formule mnémotechnique déjà vue reste valable : un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre les éventuelles racines.

Nous avons déjà justifié ce résultat lorsqu'il existe une forme factorisée. Justifions brièvement pourquoi ce résultat reste valable lorsque le trinôme n'a pas de racines.

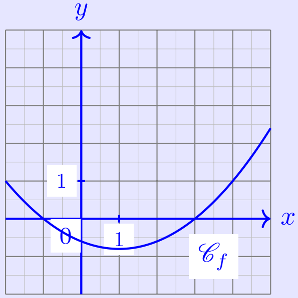
La forme canonique pour un trinôme f est

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \\ &= a\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Si $\Delta < 0$, alors $\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et donc f est du signe de a.

Exercice 21. ♥

Que pouvez-vous dire des coefficients a, x_1 et x_2 de la forme factorisée de la fonction f polynomiale de degré deux représentée ci-contre.



Correction de l'exercice 21 ....

* Comme nous l'avons déjà remarqué (sans démonstration) puisque la parabole est orientée vers le haut, le coefficient dominant est strictement positif.

  Sans calculs il est impossible d'en dire plus.

* Les zéros de la fonction sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses donc :

$$x_1 = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = 3.$$

  On pouvait tout aussi bien choisir $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$.

* Si nous souhaitons obtenir une valeur pour a il nous faut des informations supplémentaires. Pour cela utilisons les coordonnées d'un point de la courbe.

  D'après ce qui précède la forme factorisée de f sera : $f(x) = a(x+1)(x-3)$.

  Comme $A(4;1) \in \mathscr{C}_f$,

$$f(4) = 1$$

  ce qi équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} a(4+1)(4-3) &= 1 \\ 5a &= 1 \\ a &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

.... fin de la correction de l'exercice 21.

Exercice 22. Application.

Dressez le tableau de signe de

1. la fonction ℓ définie sur $[-10;10]$ par $\ell(x) = x+1$ pour tout $x \in [-10;10]$,
2. la fonction f définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = 3x^2 - 24x + 48$ pour tout $x \in [-10;10]$,
3. la fonction g définie sur $[-5;3]$ par $g(x) = x^2 + x - 2$ pour tout $x \in [-5;3]$,
4. la fonction h trinôme définie pour tout $x \in [-2;2]$ par $h(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Correction de l'exercice 22. . . . .

1. Dressons le tableau de signe de ℓ.

   Ce n'est pas parce que vous avez un marteau qu'il y a des clous partout : il ne s'agit pas d'une fonction polynomiale de degré deux.

   $\ell : x \mapsto x+1$ est une fonction affine avec $m = 1$ et $p = 1$. $m > 0$ donc ℓ est strictement croissante. ℓ s'annule en $-\frac{p}{m} = -\frac{1}{1} = -1$.

x	-10		-1		10
$\ell(x)$		$-$	0	$+$	

2. Dressons le tableau de signe de f.

   * f est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 3$, $b = -24$ et $c = 48$.
   *
$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-24)^2 - 4 \times 3 \times 48\\ &= 0\end{aligned}$$

     $\Delta = 0$ donc f admet une racine double.
   *
$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$
$$x_0 = \frac{-(-24)}{2 \times 3}$$
$$x_0 = 4$$
   * Le trinôme f est du signe de $a > 0$ sauf entre ses racines.

x	-10		4		10
$f(x)$		$+$	0	$+$	

3. Dressons le tableau de signe de g.

   * g est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -2$.
   *

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) \\ &= 9\end{aligned}$$

   $\Delta > 0$ donc g admet deux racines distinctes.

   * $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1}$, $x_1 = -2$ | $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1}$, $x_2 = 1$

   * Le trinôme g est du signe de $a > 0$ sauf entre ses racines.

x	-5		-2		1		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Étudions le signe de h sur $[-2; 2]$.

   * $h(X)$ est un polynôme de degré deux, donné sous forme développée avec : $a = -1$, $b = 4$ et $c = -3$.

     $x_1 = 1$ est clairement racine de $h(X)$. Nous en déduisons par équivalences successives :

$$\begin{aligned}x_1 x_2 &= \frac{c}{a} \\ 1 \times x_2 &= \frac{-3}{-1} \\ x_2 &= 3\end{aligned}$$

* Le trinôme h est du signe de son coefficient dominant $a < 0$ saut entre ses racines donc

x	-2				2
			1		
$h(x)$		$-$	0	$-$	

Si vous avez du mal à voir ce qui ses passe voici une présentation alternative dans laquelle on considère que h est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
h		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

.... fin de la correction de l'exercice 22.

Exercice 23. Application.

Soit $f : x \mapsto -2x^2 - 4x + 6$ définie sur $[-7; 10]$.

1. Déterminez les racines de f.
2. Étudiez le signe de f sur $[-7; 10]$.
3. Résolvez dans $[-7; 10]$ l'inéquation

$$(E) : \quad -2x^2 - 4x + 6 > 0.$$

Correction de l'exercice 23..

1. déterminons les racines de $f(X)$.

   * $f(X)$ est un trinôme de de degré deux donné sous forme développée avec $a = -2$, $b = -4$ et $c = 6$.
   * Clairement 1 et -3 sont des racines de $f(X)$.

   $$\boxed{\text{l'ensemble des racines de } f(X) \text{ est } \{1; -3\}.}$$

2. Étudions le signe de f sur $[-7; 10]$.

   f est une fonction polynomiale de degré deux donc elle est du signe de son coefficient dominant $a < 0$ sauf entre ses racines donc :

x	-7		-3		1		10
f		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. D'après le précédent tableau de signe :

   l'ensemble des solutions de (E) est $\mathscr{S} =]-3; 1[$.

.... fin de la correction de l'exercice 23.

Exercice 24. ♥

Résolvez l'inéquation $2x^2 - 220x + 2000 > 0$ dans $\mathbb{R}$.

Se ramener à l'étude du signe d'une fonction judicieusement choisie.

Correction de l'exercice 24..

$\Delta = 32400$, $x_1 = 10$, $x_2 = 100$.

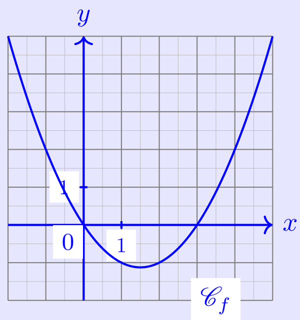
x	$-\infty$		10		100		$+\infty$
f		+	0	−	0	+	

$\mathscr{S} =]-\infty; 10[\cup]100; +\infty[$.

.... fin de la correction de l'exercice 24.

Exercice 25. Application.

Sachant que le coefficient dominant de la fonction polynomiale de degré deux f, représentée ci-contre, est $\frac{1}{2}$, donnez sans justification la forme factorisée de f.



Correction de l'exercice 25..

$f(X) = \frac{1}{2}X(X-3)$.

.... fin de la correction de l'exercice 25.

IV Application à l'étude des variations d'une fonction polynomiale de degré deux.

Exercice 26.

Rappelons la définition suivante : une fonction définie sur un intervalle I (non vide) est strictement croissante si et seulement si : quelque soient x et y choisis dans I on a $f(x) < f(y)$. Ce que l'on exprime parfois en disant que les fonctions croissantes conservent l'ordre.

On étudie le sens de variation sur $]-\infty;3]$ de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 - 5$.
Recopier et compléter en justifiant chaque étape.
Soient a et b deux réels tels que $a < b \leqslant 3$.

$$a - 3 \dots b - 3 \dots 0$$
$$(a-3)^2 \dots (b-3)^2$$
$$(a-3)^2 - 5 \dots (b-3)^2 - 5$$
$$f(a) \dots f(b)$$
$$\text{Donc } f \text{ est } \dots \text{sur } \dots$$

Correction de l'exercice 26 ....

$$a - 3 < b - 3 \leqslant 0$$
$$(a-3)^2 > (b-3)^2 \text{ car la fonction carré est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_-.$$
$$(a-3)^2 - 5 > (b-3)^2 - 5$$
$$f(a) > f(b)$$
$$\text{Donc } f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty;3].$$

.... fin de la correction de l'exercice 26.

Proposition 2

Soient :

. $a \in \mathbb{R}^*$,

. α, $\beta \in \mathbb{R}$,

. $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$ alors le tableau de variation de f est

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\searrow$	β	$\nearrow$

Démonstration 3. . . . .

Supposons $a > 0$.

Nous allons raisonner par disjonction des cas en démontrant d'abord que f est strictement décroissante sur $]-\infty,\alpha]$.

Soient x et y des nombres pris dans $]-\infty,\alpha]$ avec $x < y$.

Nous voulons montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty,\alpha]$ il faut donc montrer que f interverti l'ordre sur cet ensemble.

Démontrons que $f(x) > f(y)$.

$$x < y$$

implique successivement

$$\begin{aligned}
x-\alpha &< y-\alpha \\
(x-\alpha)^2 &> (y-\alpha)^2 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_- \\
a(x-\alpha)^2 &> a(y-\alpha)^2 \quad \text{car } a > 0 \\
a(x-\alpha)^2+\beta &> a(y-\alpha)^2+\beta \\
f(x) &> f(y)
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons démontré que quelque soient x e y choisis dans $]-\infty,\alpha]$, dès que $x < y$ alors forcément $f(x) > f(y)$.

Autrement dit

f est strictement décroissante sur $]-\infty,\alpha]$.

De la même façon nous démontrerions que f est strictment croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

. . . . Fin de la démonstration

Démonstration 4 . . . .

Voici une autre démonstration du même résultat.

Montrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$.

Soient $x < y$ deux nombres choisis dans $]-\infty\ ;\ \alpha[$.
Montrons donc que $f(y) - f(x) < 0$.
Pour déterminer le signe d'une quantité il faut essayer de la factoriser.

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= a(y-\alpha)^2 + \beta - [a(x-\alpha)^2 + \beta] \\ &= a(y-\alpha)^2 - a(x-\alpha)^2 \end{aligned}$$

On factorise par a :

$$f(y) - f(x) = a[(y-\alpha)^2 - (x-\alpha)^2]$$

On reconnaît une identité remarquable qui permet de factoriser :

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= a\left([(y-\alpha) - (x-\alpha)] \times [(y-\alpha) + (x-\alpha)]\right) \\ &= a\left([y-x] \times [y+x-2\alpha]\right) \end{aligned}$$

Par hypothèse $a > 0$ et $y - x > 0$ donc $f(y) - f(x)$ est du même signe que $y + x - 2\alpha$.
Or x et y appartiennent à $]-\infty\ ;\ \alpha[$, donc :

$$\begin{cases} x - \alpha < 0 \\ y - \alpha < 0 \end{cases}$$

et donc $x + y - 2\alpha < 0$.

Ainsi $f(y) - f(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$. Fin de la démonstration

Remarques.

1. On déduit du tableau de variation que, si $a > 0$, les fonctions polynomiales de degré 2 admettent sur $\mathbb{R}$ un minimum absolu égal à β qui est atteint pour $x = \alpha$.

2. Si $a < 0$, alors les variations de f sont contraires.
3. Les fonctions polynomiales de degré 2 admettent toujours un extremum. Si $a < 0$, alors β est un maximum.
4. L'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = \alpha$.
5. Nous avons un résultat symétrique lorsque $a < 0$.
6. Ce résultat illustre l'efficacité de la forme canonique qui permet de trouver le tableau de variation d'une fonction polynomiale de degré deux.
7. Nous remarquons en particulier que le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ de la parabole, que nous appellerons *le sommet de la parabole*, correspond à un minimum ou à un maximum de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.
8. Le résultat théorique étant démontré voyons maintenant comment, dans la pratique, trouver le tableau de variation en raisonnant géométriquement.
   — Le signe de a nous indique si la parabole est orientée vers le haut ou vers le bas donc le sens des flèches dans le tableau de variation.
   — La valeur de α correspond à la valeur de x pour laquelle la fonction change de sens de variation.
   — β est l'image de α par f.

Exercice 27. ♥

Donnez les tableaux de variation sur l'intervalle I des fonctions définies par leur expression algébrique et précisez leurs éventuels extrema.

1. Pour tout x de $I = \mathbb{R}$, $f(x) = -3(x+4)^2 - 7$.
2. Quelque soit x choisi dans $I = [-5\ ;\ 5]$, $g(x) = -8x + 4x^2 + 7$.
3. $I =]-\infty\ ;\ 4]$ et : $\forall x \in I$, $h(x) = (x+3)^2 - (x-5)^2$.

V Exercices.

Exercice 28. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = 49x^2 - 4$.
2. $f_2(x) = -3x^2 + 3x$.
3. $f_3(x) = 4x^2 - 8x$.
4. $f_4(x) = 3x^2 + 30x + 75$.
5. $f_5(x) = (4x-1) + (4x-1)(x+2)$.
6. $f_6(x) = x^2 - 4x + 4$.

Exercice 29. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = 6x - 3x^2$.
2. $f_2(x) = -9x^2 + 36$.
3. $f_3(x) = 4x^2 - 8x + 8$.
4. $f_4(x) = -x^2 - 2x - 1$.
5. $f_5(x) = 2(x-3)-(x-4)(x-3)$.
6. $f_6(x) = (x+2)^2 - 8$.

Exercice 30. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = (2x+1)^2 - (1-x)^2$.
2. $f_2(x) = x^2 - 20x + 100$.
3. $f_3(x) = 25 - (x+1)^2$.
4. $f_4(x) = 4x^2 + 4 + 8x$.
5. $f_5(x) = 16(x+1)^2 - 25x^2$.
6. $f_6(x) = 16x^2 - 81$.

Exercice 31. Application.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

1. $f_1(x) = x^2-4+(x-2)(x+1)$.
2. $f_2(x) = 3x^2 - 12x + 12$.
3. $f_3(x) = (x+1)(x+2)-(3x+6)$.
4. $f_4(x) = x^2 - 2x + 3x^2$.
5. $f_5(x) = 2x(x+3) + 4x + 12$.
6. $f_6(x) = (x-3)(3x-4)-3x+4$.

Exercice 32. Application.

Donnez la forme canonique de la fonction polynomiale de degré deux, f, lorsque, pour tout x réel,

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$.
2. $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$.
3. $f(x) = 4x^2 + 8x + 7$.
4. $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$.
5. $f(x) = x^2 - 8x + 23$.
6. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.
7. $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$.
8. $f(x) = 3x^2 + 30x$.
9. $f(x) = x^2 - 2$.
10. $f(x) = -4x^2 - 8x - 104$.

Correction de l'exercice 32 ....

1. $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$.
2. $f(x) = -3(x-1)^2 + 4$.
3. $f(x) = 4(x+1)^2 + 3$.
4. $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$.
5. $f(x) = (x-4)^2 + 7$.
6. $f(x) = -(x-2)^2 + 1$.
7. $f(x) = 2(x+2)^2 - 4$.
8. $f(x) = 3(x+5)^2 - 75$.
9. $f(x) = x^2 - 2$.
10. $f(x) = -4(x+1)^2 - 100$.

.... fin de la correction de l'exercice 32.

Exercice 33. Application.

Donnez la forme canonique de la fonction polynomiale de degré deux, f, lorsque, pour tout x réel,

1. $f(x) = -3x^2 - 30x - 102$.
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}$.
3. $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{37}{9}$.
4. $f(x) = -x^2 - 14x - 39$.
5. $f(x) = x^2 - 12x + 38$.
6. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{19}{84}$.
7. $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}x + \sqrt{2}$.
8. $f(x) = 3x^2 + 6\pi + 3\pi^2 + 1$.
9. $f(x) = x^2 - 2$.
10. $f(x) = \sqrt{\pi}x^2 - \frac{4\sqrt{\pi}}{3}x + \frac{4\sqrt{\pi}}{9}$.

Correction de l'exercice 33 ....

1. $f(x) = -3(x+5)^2 - 27$.
2. $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$.
3. $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 4$.
4. $f(x) = -(x+7)^2 + 10$.
5. $f(x) = (x-6)^2 + 2$.
6. $f(x) = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{7}$.
7. $f(x) = \sqrt{2}(x+2)^2 - 3\sqrt{2}$.
8. $f(x) = 3(x+\pi)^2 + 1$.
9. $f(x) = -x^2$.
10. $f(x) = \sqrt{\pi}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$.

.... fin de la correction de l'exercice 33.

Exercice 34. Application.

Résolvez les équations suivantes.

1. $2x^2 + 24x + 72 = 0$.
2. $-x^2 - 12x = 35$.
3. $-2x^2 + 4x - 3 = 0$.
4. $-3x^2 + 3x + 330 = 0$.
5. $-4x^2 + 96x - 576 = 0$.
6. $x^2 - 8x = -23$.
7. $x^2 - 17x + 52 = 0$.
8. $2x^2 - 18x + 40 = 0$.
9. $2x^2 + 28x + 91 = 0$.
10. $-3x^2 + 3x + 126 = 0$.

Exercice 35. Application.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2 + 5x - 6 = 0$.
2. $x^2 + x + 2 = 0$.
3. $-2x^2 + 3x + 4 = 0$.
4. $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
5. $x^2 - 9x + 20 = 0$.
6. $2x^2 - 2x\sqrt{5} + 3 = 0$.
7. $3x^2 + 2x\sqrt{6} - 1 = 0$.
8. $4x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = 0$.
9. $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$.
10. $16x^2 - 8x + 13 = 0$.

Correction de l'exercice 35 . . . .

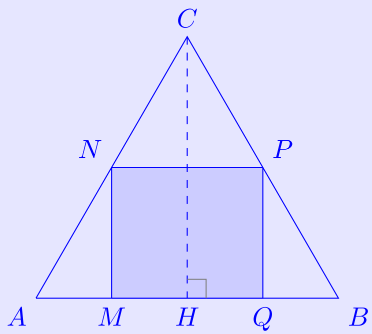
1. $\mathscr{S} = \{1; -6\}$.
2. $\mathscr{S} = \varnothing$.
3. $\mathscr{S} = \left\{\frac{3+\sqrt{41}}{4}; \frac{3-\sqrt{41}}{4}\right\}$.
4. $\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
5. $\mathscr{S} = \{4; 5\}$.
6. $\mathscr{S} = \varnothing$.
7. $\mathscr{S} = \left\{\frac{-3-\sqrt{6}}{3}; \frac{-3+\sqrt{6}}{3}\right\}$.
8. $\mathscr{S} = \varnothing$.
9. $\mathscr{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}$.
10. $\mathscr{S} = \varnothing$.

. . . . fin de la correction de l'exercice 35.

Exercice 36. Application.

Exercice 37.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 8. On inscrit dans ce triangle un rectangle $MNPQ$.
On pose $AM = x$.



1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
2. Calculez CH où H est le pied de la hauteur issue de C.
3. Déduisez-en que $MN = x\sqrt{3}$.
4. Déterminez la valeur de x pour laquelle l'aire de $MNPQ$ est maximale.

Correction de l'exercice 37..

1. $x = AM$ et $M \in [AB]$. Or $AB = 8$ donc

$$\boxed{x \in [0;8].}$$

2. Calculons CH.

   ACH est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

   Nous en déduison successivement :

$$\begin{aligned} 8^2 &= \left(\frac{8}{2}\right)^2 + CH^2 \\ 64 &= 16 + CH^2 \\ 64 - 16 &= CH^2 \end{aligned}$$

CH désignant une longueur est un nombre podsitif donc :

$$\begin{aligned} CH &= \sqrt{48} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{CH = 4\sqrt{3}.}$$

3. Exprimons MN en fonction de x.

   * Les points A, N, C d'une part et A, M, H d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Puisque $MNPQ$ est un carré et puisque (CH) est la hauteur issue de H, noue avons $(MN) \parallel (HC)$.

   Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

   $$\frac{MN}{HC} = \frac{AM}{AH}$$

   ce qui équivaut successivement à :

   $$\begin{aligned} \frac{MN}{4\sqrt{3}} &= \frac{x}{4} \\ MN &= \frac{x}{4} \times 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

   $$\boxed{MN = x\sqrt{3}.}$$

4. Notons $f(x)$ l'aire de $MNPQ$ en fonction de x.

   Déterminons le maximum de f sur $[0;8]$.

   $$\begin{aligned} f(x) &= MQ \times MN \\ &= (8-2x) \times x\sqrt{3} \\ &= -2\sqrt{3}(x^2-4x) \\ &= -2\sqrt{3}(x-2)^2 + 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

f est donc une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme canonique avec $a = -\sqrt{3}$, $\alpha = 2$ et $\beta = 8\sqrt{3}$.

Nous en déduisons

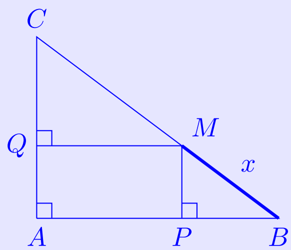
x	0		2		4
f		$\nearrow$	$8\sqrt{3}$	$\searrow$	

L'aire de $MNPQ$ est maximale si $x = 2$.

. . . . fin de la correction de l'exercice 37.

Exercice 38.

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 8$ et $AC = 6$. M est un point de l'hypoténuse $[BC]$.
Par M, on trace les perpendiculaires à (AB) et (AC). Elles coupent $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en P et Q.
On pose $BM = x$.
On se propose d'étudier quelques propriétés du périmètre du rectangle $APMQ$.

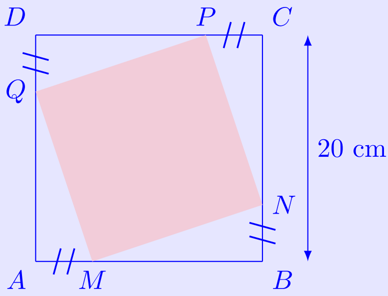


1. Démontrez que $MP = 0{,}6x$ et $MQ = 8 - 0{,}8x$.
2. Exprimez, en fonction de x, le périmètre $p(x)$ du rectangle $APMQ$.
3. Pour quelles positions de M le périmètre est-il supérieur ou égale à 13,5 ?
4. Comparez le périmètre de $AMPQ$ au demi-périmètre du triangle ABC.

Exercice 39.

Dans un carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-contre.

On pose $x = AM = BN = CP = DQ$ avec $0 \leq x \leq 20$.



Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ dépasse 272 cm^2.

1. Exprimez l'aire en cm^2, $g(x)$ du carré $MNPQ$ en fonction de x, sous forme développée, ordonnée et réduite.
2. Prouvez que $g(x) > 272$ équivaut à
$$2x^2 - 40x + 128 > 0.$$
3. On note $f(x) = 2x^2 - 40x + 128$. Affichez sur votre calculatrice la courbe représentative de f, tracez à main levée la courbe observée puis conjecturez les solutions du problème.
Pour la fenêtre on utilisera les paramètres d'affichages suivants.
Axe des abscisses : $0 \leq x \leq 20$.
Axe des ordonnées : $-100 \leq y \leq 200$.
4. Retrouvez le résultat par le calcul.

Correction de l'exercice 39. . . . .

1. $g(x) = x^2 + (20 - x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$.
2. $2x^2 - 40x + 400 > 272 \iff 2x^2 - 40x + 400 - 272 > 0$.
3. Racines 4 et 16 et $a > 0$ donc

x	0		4		16		20
$g(x)$		+	0	−	0	+	

$\mathscr{S} = [0; 4[\cup]16; 20]$.

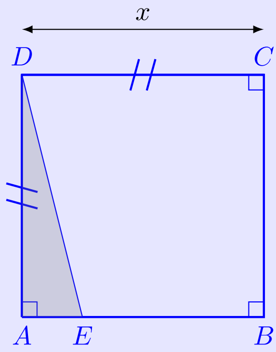
. . . . fin de la correction de l'exercice 39.

Exercice 40.

$ABCD$ est un carré de côté x, exprimé en cm, avec $x > 6$. E est le point du segment $[AB]$ tel que

$$EB = 6 \text{ cm}$$

1. Exprimez en fonction de x, l'aire en cm^2 du triangle AED.
2. Peut-on trouver x pour que l'aire du carré $ABCD$ soit strictement supérieure au triple de l'aire du triangle AED ?



Correction de l'exercice 40. . . . .

1. $\mathscr{D}_f =]6; +\infty[$ et $f(x) = \frac{1}{2}x(x-6)$.
2. On veut résoudre : $x^2 > 3f(x)$.
   Donc : $-\frac{1}{2}x^2 + 9x > 0$.
   Ou : $-\frac{1}{2}x\,(x-18) > 0$.

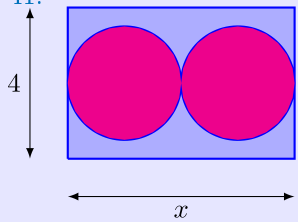
x	6		18		$+\infty$
$x\left(-\frac{1}{2}x+9\right)$		d	$+$	z	$-$

$\mathscr{S} =]6; 18[$.

. . . . fin de la correction de l'exercice 40.

Exercice 41.

Soit un réel x dans $[0;8]$. On considère un rectangle de dimension 4 cm sur x cm, dans lequel on trace deux disques de même rayon comme sur la figure ci-contre.

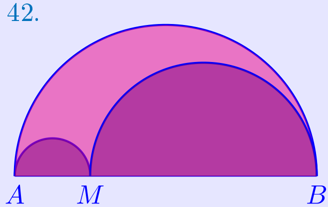


On souhaite déterminer les valeurs de x de façon que l'aire bleue (ce qu'il reste du rectangle) soit supérieure à l'aire rose (les deux disques).

1. Montrez que le problème se ramène à la résolution de l'inéquation $\dfrac{\pi x^2}{8} \leq 2x$ sur $[0;8]$.
2. Montrez que l'ensemble des solutions est $\left[0; \dfrac{16}{\pi}\right[$.

Exercice 42.

Soit M un point du segment $[AB]$. On considère les demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$ comme représentés ci-contre.



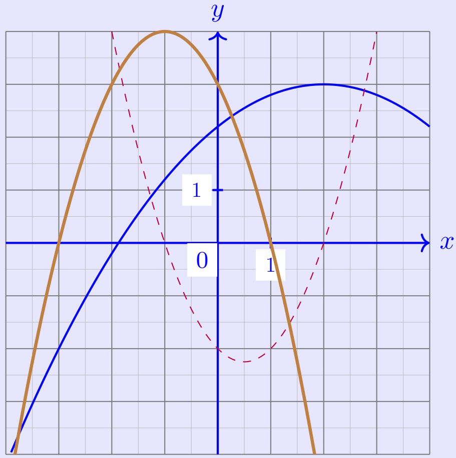
On donne $AB = 8$. Nous noterons $AM = 2x$. $f(x)$ désignera l'aire de la partie colorée en violet (*i.e.* les deux demi-disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$).

1. À quel intervalle appartient x ?
2. Démontrez que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.
3. Les aires des deux parties colorées peuvent-elles être égales ?

Exercice 43.

Sont tracées ci-contre les courbes représentatives des fonctions polynomiales de degré deux f, g et h.
Nous savons de plus que $f(-3) = -2$.
Recopiez en complétant, sans aucune justification, les expressions algébriques suivantes.

- $f(x) = -0{,}02(x - \dots)^2 + \dots$
- $g(x) = x^2 - x + \dots$
- $h(x) = -(x - \dots)(x - \dots)$



Correction de l'exercice 43..

g est la seule fonction dont la parabole est orientée vers le haut (coefficient dominant strictement positif). Son terme constant est obtenu pour $x = 0$. Donc

$$\boxed{g(x) = x^2 - x - 2.}$$

h est donnée sous forme factorisée il faut donc identifier ses racines. Nous pouvons supposer qu'il s'agit donc de la parabole dont les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont lisibles.

$$\boxed{h(x) = -(x + 3)(x - 1).}$$

Puis en lisant les coordonnées du sommet de la troisième parabole nous obtenons la forme canonique de f.

$$\boxed{f(x) = -0{,}02(x - 2)^2 + 3.}$$

Nous pouvons alors contrôler avec la calculatrice que les expressions algébriques ainsi obtenues correspondent bien au graphique.

.... fin de la correction de l'exercice 43.

Exercice 44.

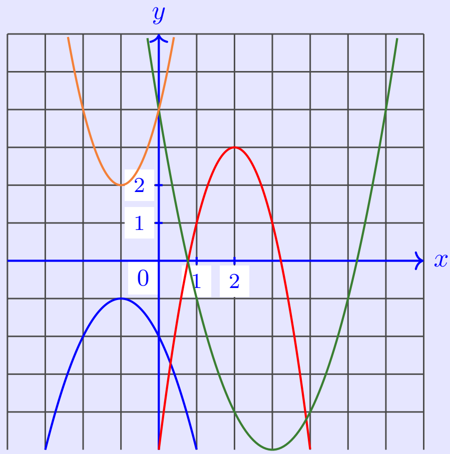
Associez chaque courbe à son trinôme.

$f(x) = -(x+1)^2 - 1$

$g(x) = -2(x-2)^2 + 3$

$h(x) = (x-3)^2 - 5$

$k(x) = 2(x+1)^2 + 2$



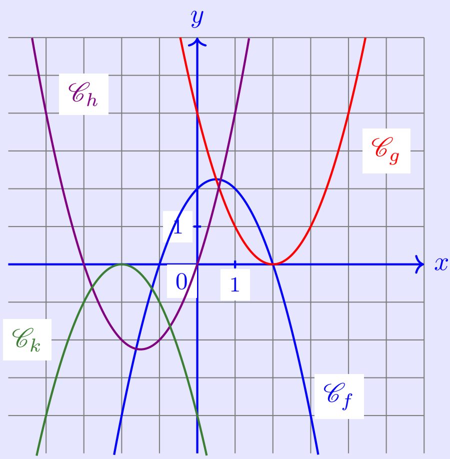
Correction de l'exercice 44 ....

f bleu. g rouge. h vert. k orange.

.... fin de la correction de l'exercice 44.

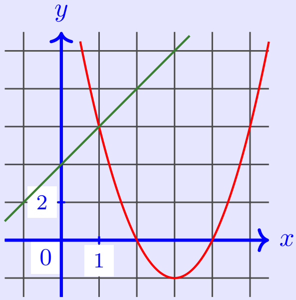
Exercice 45.

Sachant que les fonctions polynomiales de degré deux représentées ci-dessous s'écrivent sous la forme $x \mapsto x^2 + bx + c$ ou $x \mapsto -x^2 + bx + c$, donnez la forme factorisée de chaque fonction.



Exercice 46.

On considère le polynôme $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ et la fonction affine $g(x) = 2x + 4$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous.



1. (a) Déterminez par lecture graphique, une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
   (b) Vérifiez que cette solution est exacte.
2. Déterminez la seconde solution.

Correction de l'exercice 46. . . . .

1. (a) Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g.
   Donc 1 est une solution.
   (b) D'une part $f(1) = 6$, d'autre part $g(1) = 6$ donc 1 est bien une solution de l'équation.
2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 12 = 0$.
   $x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = 6$.

. . . . fin de la correction de l'exercice 46.

Exercice 47.

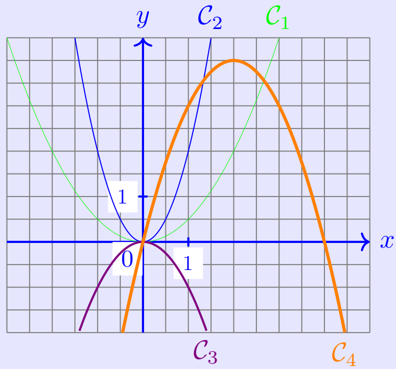
Les fonction indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elle.

$f_1 : x \mapsto -x^2$

$f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

$f_3 : x \mapsto 2x^2$

$f_4 : x \mapsto x(4-x)$



Exercice 48.

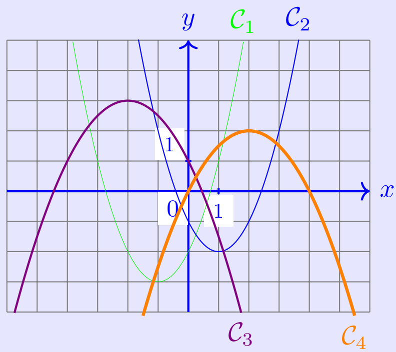
Les fonctions indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elles.

$f_1 : x \mapsto x^2 + 2x - 2$

$f_2 : x \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

$f_3 : x \mapsto (x-1)^2 - 2$

$f_4 : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$



Exercice 49.

Démontrez que $(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2 + 1 < (\sqrt{3}+\sqrt{4}+1)^2 + 1$.

Correction de l'exercice 49..

$f(x) = \left(x+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)^2 + 1$ est strictement croissante sur $\left]-\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right); +\infty\right[\![$ donc $f(0) < f(1)$.

.... fin de la correction de l'exercice 49.

Exercice 50.

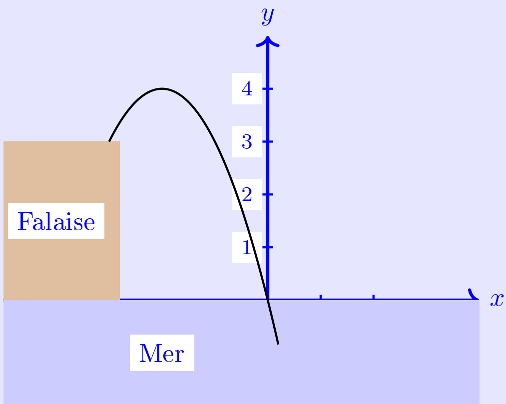
Les fonctions considérées ici sont définies sur $\mathbb{R}$.
Pour chacune d'elles, dressez son tableau de variation.

$f(x) = 5 - 2(x+1)^2$ $\qquad$ $g(x) = 2(1-3x)(1-x)$

$u(t) = \frac{1}{4} - t^2$ $\qquad$ $v(t) = \frac{1}{3}(1-t^2)$

Exercice 51.

La trajectoire d'un plongeur est modélisée par la fonction f définie sur $[-3;0]$ par $f(x) = -x(x+4)$. Le plongeur saute de l'abscisse -3.



1. Montrez que f est une fonction polynomiale de degré deux.
2. Montrez que , pour tout x de l'intervalle $[-3;0]$:

$$f(x) = -(x+2)^2 + 4.$$

3. Donnez le tableau de variations complet de f sur l'intervalle $[-3;0]$.
4. (a) Quelle est la hauteur de la falaise ?
   (b) Quelle est la plus grande altitude atteinte par le plongeur ?

Exercice 52.

Après la vente de x roses, le bénéfice net d'un fleuriste lors d'une journée s'exprime, en euros, par :

$$B(x) = -0{,}005x^2 + 3{,}2x - 82.$$

1. (a) Dressez le tableau de signe de B sur $[0;700]$.
   (b) Montrer que $B(x) = -0{,}005(x-320)^2 + 430$, quelque soit $x \in [0;700]$.
2. Combien de roses le fleuriste doit-il vendre pour réaliser des bénéfices $(B(x) \geqslant 0)$?
3. À partir de quelle quantité de roses vendues le bénéfice commence-t-il à décroître ?

Exercice 53.

Une entreprise, dont la production de casques audio varie entre 50 et 250 pièces par jour, estime que le coût de fabrication (en €) est donné par :

$$C(q) = 0{,}08q^2 - 1{,}6q + 108,$$

où q est le nombre de casques produits.
Chaque casque est vendu 15 € l'unité.

1. (a) Combien coûte la fabrication de 80 casques audio ?
   (b) Calculez la recette associée à la vente de 80 casques. L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices pour 80 casques produits et vendus ?
2. (a) Exprimez la recette $R(q)$ exprimée en euros en fonction de la quantité q de casques fabriqués et vendus en un jour.
   (b) Montrez que le bénéfice sur une journée correspondant à la fabrication et à la vente de q casques est :
   $$B(q) = -0{,}08q^2 + 16{,}6q - 108.$$
   (c) Combien faut-il construire et vendre de casques pour que le bénéfice journalier soit supérieur à 400 € ?
   (d) Quel est le bénéfice maximal de l'entreprise ? Pour combien de casques produits ce bénéfice maximum est-il atteint ?

Exercice 54.

Une entreprise fabrique et vend de la pâte à papier. Le coût de production de q tonnes de pâte à papier est donné, en milliers d'euros par

$$C(q) = 0{,}02q^2 + 0{,}1q + 9$$

pour $q \in [0; 80]$.
La recette, en milliers d'euros, engendrée par la vente de q tonnes de pâte à papier est donnée par

$$R(q) = 1{,}2q$$

1. (a) Quel est le coût le fabrication d'une tonne de pâte à papier ?
   (b) Quel est prix de vente d'une tonne de pâte à papier ?
   (c) L'entreprise est-elle bénéficiaire lorsqu'elle vend et produit une tonne de pâte à papier ?
2. Avec la calculatrice conjecturez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.
3. Démontrez que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend q tonnes de pâte à papier est

$$B(q) = -0{,}02q^2 + 1{,}1q - 9$$

4. Démontrez que $B(q) = -0{,}02(q-45)(q-10)$ quelque soit $q \in [0; 80]$.
5. Déterminez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.

Exercice 55.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{2x-3}{-2x^2+9x-4} \geqslant 0.$$

Exercice 56.

1. On se propose ici de résoudre l'équation :

$$2x^4 + 3{,}5x^2 - 1 = 0 \quad (E)$$

   (a) Montrez qu'en posant $X = x^2$, l'équation (E) s'écrit

$$2X^2 + 3{,}5X - 1 = 0 \quad (E')$$

   (b) Résolvez l'équation (E') d'inconnue X.

   (c) Déduisez-en les solutions de l'équation (E) en utilisant le fait que $X = x^2$.

2. En vous inspirant de la méthode précédente résolvez dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ l'équation :

$$12\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - 10\left(\frac{1}{x-1}\right) + 2 = 0 \quad (F)$$

Exercice 57.

Un architecte souhaite construire une arche parabolique. Il a décidé de modéliser sa construction par la représentation graphique du trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}08x^2 + 3{,}2x - 14$ où 1 unité correspond à 1 mètre.

1. Résolvez l'équation $f(x) = 0$.
2. Déduisez-en la longueur de l'arche au sol.

Exercice 58.

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. (a) Développez, ordonnez et réduisez $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$.

   (b) Développez, ordonnez et réduisez $(x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1)$.

   (c) Déduisez-en une expression de la somme $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1$ sous forme fractionnaire et en fonction de x.

   (d) Démontrez que $2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^2 + 2 + 1$ est un entier.

   (e) Calculez $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{12}$.

2. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $g : x \mapsto x^n - a^n$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

   (a) Factorisez $g(x)$ par a^n.

   (b) Utilisez alors le résultat de la question 1 (et éventuellement un changement de variable) pour établir une expression de $g(x)$ dans laquelle vous aurez factorisé par $x - a$.