Polynômes du second degré, forme factorisée.

I Des polynômes.

1 Pseudo définition.

La définition générale des polynômes (suites à supports finis) n'apporte pas grand chose. Contentons-nous de l'idée suivante : un polynôme est une formule de calcul. Par exemple $-2X^3 + X + 1$ est un polynôme. Ce n'est pas la fonction $x \mapsto -2x^3 + x + 1$ et ce n'est pas non plus le nombre $-2x^3 + x + 1$ lorsque x est choisi dans $\mathbb{R}$.

2 Vocabulaire et notation.

Procédons à partir d'un exemple en notant $P(X)$ le polynôme

$$-9X^3 + 8X^2 - 7X + 6.$$

1. X est appelé une *indéterminée*. C'est, pour nous un objet formel qui n'a pas de sens : ni un nombre, ni une inconnue.
2. $-9X^3$, $8X^2$, $-7X$ et 6 sont des *monômes*. $-9X^3$ est un monôme de degré 3. $8X^2$ est un monôme de degré 2. $-7X$ est un monôme de degré 1. 6 est un monôme de degré 0.

   Plutôt que de parler monôme de degré 2 on parle aussi de terme de degré 2. Et 8 sera appelé le coefficient de X^2 dans P.

3. Cette expression développée, réduite et ordonnée du polynôme est appelée *la forme développée* de P. Elle est unique.
   Nous avons bien : $P(X) = X^4 - 9X^3 + 3X^2 + 5X^2 - 7X + 6 - X^4$, mais ce n'est pas la forme développée de P.
4. Nous dirons que P est *polynôme de degré* 3 car c'est le degré le plus grand de ses monômes dans sa forme développée. Cas particulier : un polynôme nul est de degré $-\infty$.
5. -9 est appelé le *coefficient dominant* de P, 6 est appelé le *terme constant*. 8 et -7 sont respectivement les coefficients des monômes de degrés 2 et 1.

   Si très souvent les exemples et exercices font intervenir des entiers relatifs, les coefficients peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle.

Exercice 1.
Donnez le coefficient du monôme de degré 1 dans la forme développée du polynôme $X^3 + 2X - 3X^2 + 4$.

Correction exercice 1

Il n'y a pas de rédaction spéciale il faut être capable de lire le coefficient. Pour ne pas se tromper dans la lecture écrivons le polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite : $X^3 - 3X^2 + 2X + 4$. Le monôme de degré 1 est $2X$ car $2X = 2X^1$.

Le coefficient du terme de degré 1 est 2.

Exercice 2. Application.

Donnez le coefficient du monôme de degré 2 dans la forme développée du polynôme $2X + 1 + 4X^2 + X^5 - 3X^2 + 4$.

Correction exercice 2

La forme développée, ordonnée et réduite du polynôme est : $X^5 + X^2 + 2X + 5$. Le monôme de degré 1 est $X^2 = 1 \times X^2$.

Le coefficient du monôme de degré 2 est 1.

Exercice 3. Application.

Donnez les coefficients des monômes de degré 0 et 4 dans la forme développée du polynôme $X^7 - 3X^2 + X^4 + 4 + 2X^3 - 1$.

Correction exercice 3

La forme développée, ordonnée et réduite du polynôme est : $X^7 + X^4 + 2X^3 - 3X^2 + 3$. Le monôme de degré 0 est $3 = 3X^0$.

Le coefficient du monôme de degré 0 est 3.
Le coefficient du monôme de degré 4 est 1.

3 Égalité de polynômes.

Proposition 1 Égalité de polynômes.

Nous dirons que deux polynômes sont égaux si et seulement si tous les coefficients des monômes de même degré de leur forme développée sont égaux deux à deux.

Remarques.

1. En particulier deux polynômes égaux ont le même degré.
2. Il en découle aussi que l'ensemble des polynômes est intègre : $PQ = 0$ si et seulement si $P = 0$ ou $Q = 0$.

Exercice 4.

Soient $P(X) = -2X^2 + 3X + 7$ et $Q(X) = (2 + a)X^2 - 3bX + 7$ ou a et b désignent des nombres réels.
Les polynômes P et Q peuvent-ils être égaux ? Si oui, pour quelles valeurs de a et b ?

Correction exercice 4

Vérifions par analyse-synthèse si P et Q peuvent être égaux.

* Analyse : supposons qu'effectivement $P = Q$ et voyons les conséquences pour P et Q.
D'après l'énoncé $P(X) = Q(X)$ équivaut à dire que $-2X^2+3X+7 = (2+a)X^2-3bX+7$.
Les deux polynômes apparaissant étant donnés sous forme développée, ordonnée et réduite, d'après la proposition précédente leurs coefficients sont égaux deux à deux :

$$\begin{cases} -2 = 2 + a & (1) \\ 3 = -3b & (2) \\ 7 = 7 \end{cases}$$

La troisième équation qui est toujours vraie est sans intérêt pour nous.

- L'équation (1) est une équation linéaire du premier degré pour la résoudre il suffit d'isoler l'inconnue. Faisons-le en détaillant.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow -2-2 = 2 + a-2 \\ &\Leftrightarrow -4 = a\end{aligned}$$

- De même pour l'équation (2).

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \frac{3}{-3} = \frac{-3b}{-3} \\ &\Leftrightarrow -1 = b\end{aligned}$$

À l'issue de cette phase de synthèse nous voyons que, forcément, pour que P et Q soient égaux il faut que : $a = -4$ et $b = -1$. Il nous reste à vérifier que si l'on choisit ces valeurs pour a et b cela fonctionne effectivement.

* Synthèse : vérifions que si $a = -4$ et $b = -1$ alors nous obtenons bien $P = Q$.
Le résultat est immédiat :

$$\begin{aligned}Q(X) &= (2 + a)X^2 - 3bX + 7 \\ &= (2 + (-4))X^2 - 3 \times (-1)X + 7 \\ &= -2X^2 + 3X + 7 \\ &= P(X)\end{aligned}$$

Nous avons démontré par analyse-synthèse que $P = Q$ si et seulement si $a = -4$ et $b = -1$.

Comme souvent dans un raisonnement par analyse-synthèse il est possible de ne pas écrire la phase d'analyse et de se contenter de la phase de synthèse. En effet la phase d'analyse correspond à une démarche de recherche qui montre bien comment obtenir le résultat mais n'est pas indispensable.

Pour cet exercice la phase d'analyse est extrêmement simple : on peut deviner le résultat et réduire la rédaction comme suit.

Démontrons que P peut être égale à Q.

Si $a = -4$ et $b = -1$ alors

$$\begin{aligned} Q(X) &= (2+a)X^2 - 3bX + 7 \\ &= (2+(-4))X^2 - 3\times(-1)X + 7 \\ &= -2X^2 + 3X + 7 \\ &= P(X) \end{aligned}$$

Si $a = -4$ et $b = -1$, alors nous avons bien $P(X) = Q(X)$.

Exercice 5. Application.

Soient $P(X) = \frac{1}{3}X^3 + 2X^2 + X - 2$ et $Q(X) = 3aX^3 + 2X^2 + bX + \frac{c}{2}$ où a, b et c désignent des nombres réels.

Les polynômes P et Q peuvent-ils être égaux ? Si oui, pour quelles valeurs de a, b et c ?

Correction exercice 5

$P = Q$ si et seulement si $a = \frac{1}{9}$, $b = 1$ et $c = -4$.

Exercice 6. Application.

Soient $P(X) = -8X^3 + 3X^2 - \frac{2}{3}X + \pi$ et $Q(X) = a^3X^3 + (b-\pi)X^2 + X + \sqrt{c^2}$ où a, b et c désignent des nombres réels.

Les polynômes P et Q peuvent-ils être égaux ? Si oui, pour quelles valeurs de a, b et c ?

Correction exercice 6

Si $P = Q$ alors $a = -\sqrt[3]{8}$, $b = 3 + \pi$, $-\frac{2}{3} = 1$ et $c = \pi$ ou $c = -\pi$.

Finalement peut importe les valeurs de a, b et c car de toutes façon ces polynômes ne peuvent pas être égaux puisque $-\frac{2}{3} = 1$ est impossible.

En fait

> nous avons démontré en raisonnant par l'absurde que $P \neq Q$.

4 Polynôme et fonction polynomiale.

Si $P(X)$ est un polynôme alors il est possible de lui associer de façon naturelle la fonction $\tilde{P} : x \mapsto P(x)$, l'ensemble de définition pouvant toujours être $\mathbb{R}$. $\tilde{P}$ est appelée *une fonction polynomiale* mais par abus de langage elle sera également appelée polynôme.

Remarques.

1. Confondre un polynôme et une fonction polynomiale est effectivement un abus : avec un polynôme il n'y a aucune question de possibilité ou d'impossibilité d'un calcul.
   $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+3 \end{array} \right.$ et $P(X) = X^2 + 3$ peuvent être confondus et pourtant $f(-1)$ n'a pas de sens contrairement à $P(-1)$.
2. Si P est polynôme et $\tilde{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale qui lui est associée alors, dans $\tilde{P}(x)$, x est forcément un nombre réel. Par contre nous pourrons remplacer X dans $P(X)$ par à peu près n'importe quoi : des nombres, des fonctions, des tableaux de nombres (matrices).
3. Le polynôme est à la fonction ce que la bactérie est à l'être humain. Le polynôme est une forme simple et extrêmement robuste.

L'exercice qui suit fait partie d'une famille de problèmes mathématiques appelés des problèmes d'interpolation. En physique cela revient à chercher un modèle qui vérifie un certain nombre de contraintes.

Du point de vu des foncions l'exercice qui suit peut être vu comme la recherche d'une fonction polynomiale dont la courbe représentative doit passer par des points dont les coordonnées sont imposées : $(0;0)$, $(1;4)$ et $(2;1)$.

Exercice 7.

Soit $P(X)$ un polynôme de degré 2. Déterminez, si possible, P de façon à ce que

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0) = 0 \\ P(1) = 4 \\ P(2) = 1 \end{array} \right.$$

Correction exercice 7

Nous devons déterminer s'il existe ou non un polynôme vérifiant les conditions imposées. Cette situation correspond à l'utilisation d'un raisonnement par analyse-synthèse.

Déterminons si possible P en raisonnant par analyse-synthèse.

* Analyse.

Nous savons que P est un polynôme de degré deux donc il existe des nombres $a \in \mathbb{R}^*$ et b, $c \in \mathbb{R}$ tels que : $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Chacune des égalités de l'énoncé correspond à une condition imposée à P. Écrivons-les une à une.

- $$\begin{aligned} P(0) = 0 &\iff a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \\ &\iff c = 0 \end{aligned}$$

  Donc maintenant nous savons que c doit être nul.

- $$\begin{aligned} P(1) = 4 &\iff a \times 1^2 + B \times 1 + 0 = 4 \\ &\iff a + b = 4 \end{aligned}$$

  Une équation mais deux inconnues nous ne pourrons pas aller plus loin.

- $$\begin{aligned} P(2) = 1 &\iff a \times 2^2 + b \times 2 + 0 = 1 \\ &\iff 4a + 2b = 1 \end{aligned}$$

Ainsi a et b doivent forcément être solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a & +b & = 4 & (1) \\ 4a & +2b & = 1 & (2) \end{array} \right.$$

Résolvons ce système par la méthode dite « par substitution ».
Isolons a dans (1) : $a = 4 - b$.
En substituant a dans (2) par $4 - b$ nous avons :

$$4 \times (4 - b) + 2b = 1$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
4\times 4-4\times b+2b &= 1\\
16-4b+2b &= 1\\
-2b+16 &= 1\\
-2b+16-16 &= 1-16\\
-2b &= -15\\
\frac{-2b}{-2} &= \frac{-15}{-2}\\
b &= \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

Maintenant que nous avons b nous pouvons trouver la valeur de a correspondant à une solution du système.
Puisque

$$a = 4 - b$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
a &= 4-\frac{15}{2}\\
&= -\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, s'il existe un polynôme P qui convienne, nécessairement $a = -\frac{7}{2}$, $b = \frac{15}{2}$ et $c = 0$. Vérifions que cela convient effectivement.

* Synthèse.
Choisissons $P(X) = -\frac{7}{2}X^2 + \frac{15}{2}X$.
P est bien un polynôme de degré deux.
Et il aisé de vérifier par le calcul que $P(0) = 0$, $P(1) = 4$ et $P(2) = 1$.

Nous avons démontré en raisonnant par analyse-synthèse qu'il existe un unique polynôme P à savoir : $P(X) = -\frac{7}{2}X^2 + \frac{15}{2}X$.

Là encore il serait possible de parachuter l'expression de P qui marche et de dire « regardez celui fonctionne ».

Exercice 8. Application.

Soit $P(X)$ un polynôme de degré 2. Déterminez, si possible, P de façon à ce que

$$\begin{cases} P(0) = 0\\ P(1) = 0\\ P(-1) = 0 \end{cases}$$

Correction exercice 8

Si un tel polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ existait alors nous aurions $a = b = c = 0$. Or si $a = 0$ ce n'est pas un polynôme de degré 2 (il s'agit du polynôme nul).

Il n'existe donc pas de polynôme vérifiant les conditions de l'énoncé.

Exercice 9. Application.

Soit $P(X)$ un polynôme de degré 2. Déterminez, si possible, P de façon à ce que

$$\begin{cases} P(0) = 2 \\ P(-1) = -1 \\ P(1) = 2 \end{cases}$$

Correction exercice 9

Si un tel polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ existait alors nous aurions $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ et $c = 2$. Il est aisé de vérifier que $P(X) = -\frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 2$ convient.

Exercice 10. Application.

Soit $P(X)$ un polynôme de degré 2. Déterminez, si possible, P de façon à ce que

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(-1) = 0 \\ P(1) = 1 \\ P(2) = -1 \end{cases}$$

Correction exercice 10

* Analyse.
  En utilisant les trois premières conditions nous obtenons que si un tel polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ existait alors nous aurions $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = 0$. Il est aisé de vérifier que $P(X) = -\frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X$ convient.
* Synthèse.
  Notons $P(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$. Si P vérifie bien les trois premières conditions en revanche il ne vérifie pas la dernière : $P(2) \neq -1$.

Nous avons démontré par analyse synthèse qu'il n'existe pas de polynôme qui corresponde aux données de l'énoncé.

Exercice 11. Application.
Soit $P(X)$ un polynôme de degré 2. Déterminez, si possible, P de façon à ce que

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases}$$

Correction exercice 11

Si un tel polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ existait alors nous aurions $a = b$ et $c = 0$.

Nous avons donc une infinité de possibilités. Choisissons-en une particulière en prenant, par exemple $a = 1$.

Le polynôme $P(X) = X^2 + X$ convient.

5 Fonction polynomiale de degré deux.

Cette définition est un cas particulier de tout ce que nous avons expliqué précédemment.

Définition 1

Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une *fonction polynomiale de degré deux* si et seulement si il existe trois réels a, b et c, avec $a \neq 0$, tels que, pour tout x réel :

$$f(x) = ax^2 + bx + x.$$

Exemples.

1. $x \mapsto 4x^2 + 7x - 3$ est une fonction polynomiale de degré deux avec $a = 4$, $b = 7$ et $c = -3$.
2. $x \mapsto x^2$ est une fonction polynomiale de degré deux avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$.
3. $x \mapsto 7x - 3$ n'est pas une fonction polynomiale de degré deux.
4. Les fonctions inverse, racine carrée, valeur absolue, cube ne sont pas des fonctions polynomiales de degré deux.

Remarques.

1. Par abus de langage au lycée nous nous autoriserons à parler de *fonction trinôme* ou même de *trinôme* plutôt que de fonction polynomiale de degré deux.
2. $a \neq 0$ car sinon ce serait une fonction affine.

3. Nous parlerons encore de trinôme s'il s'agit de la restriction d'une fonction trinôme à une partie de $\mathbb{R}$. Ainsi $f : [-1;3[\to \mathbb{R}$ qui à $x \in [-1;3[$ associe $7x^2 + 5x + 3$ est encore appelée un trinôme.
4. Par abus de langage nous parlerons de la forme développée pour signifier la forme développée, réduite et ordonnée de la fonction polynomiale de degré deux.
5. La courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré deux est appelée une *parabole*.

II Racines.

1 Définition.

Définition 2

Soient

. $n \in \mathbb{N}$,

. $a_n, \dots, a_1, a_0$ des nombres réels,

. $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme.

Nous appellerons *racine* de P tout nombre α tel que $P(\alpha) = 0$.

Remarques.

1. Autrement dit α est une racine de P si et seulement si α est une solution de l'équation (polynomiale) $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$.
2. Pour une fonction nous parlerons pas de racine mais de *zéro* de la fonction.
3. La nature du nombre α n'est pas précisée dans l'énoncé car ce peut être un nombre réel ou pas.

Exemples.

1. Si $P(X) = aX + b$ avec a et b des réels et $a \neq 0$ alors P admet une unique racine $-\frac{b}{a}$.
2. $X^2 - 1$ admet deux racines qui sont 1 et -1.
3. $X^3 + X$ admet une unique racine dans l'ensemble des nombres réels qui est 0.
4. $X^2 + 1$ n'admet aucune racine dans l'ensemble des nombres réels.ne du polynôme nul. Il admet donc une infinité de racines.

2 Racines évidentes.

On appelle racines évidentes des racines dont les valeurs sont simples à deviner. Concrètement il s'agit en général de 0, 1, -1, 2, -2.

Lorsque nous devrons rechercher des racines avant d'essayer de résoudre des équations nous commencerons par tester des valeurs évidentes.

Dans la pratique ce travail peut être réalisé à la calculatrice en utilisant la fonction polynomiale associée au polynôme étudié.

Exercice 12.
Déterminez des racines évidentes de $P(X) = -2X^2 + 2X + 4$.

Correction exercice 12

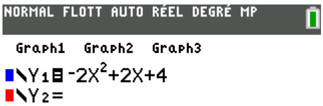
En faisant du calcul mental nous trouvons aisément des racines.

Nous remarquons que $P(-1) = 0$ donc

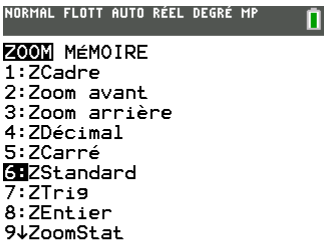
-1 est une racine de P.

Nous pourrions également utiliser la calculatrice pour trouver d'autres racines.

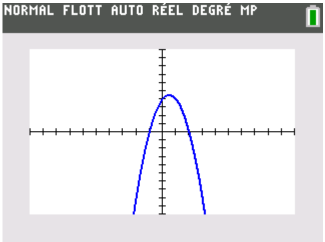
1. Entrez dans la calculatrice la fonction polynomiale associée à P en appuyant sur $\boxed{f(x)}$:



2. A priori nous essayons avec le zoom standard en appuyant sur $\boxed{\text{zoom}}$:



Enfin nous conjecturons graphiquement :



3. Nous aurions pu essayer avec e tableau de valeurs en appuyant successivement sur 2nde puis graphe :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
APP SUR + POUR ▵Tbl

X	Y_1
-3	-20
-2	-8
-1	0
0	4
1	4
2	0
3	-8
4	-20
5	-36
6	-56
7	-80

X= -3

Que ce soit avec le tableau de valeurs ou avec la représentation graphiques nous observons deux racines.

l'une -1 que nous avons déjà trouvée et l'autre semble être 2. Une rapide vérification par le calcul nous permet finalement d'affirmer :

nous remarquons que $P(2) = 0$ donc

2 est une racine de P.

Exercice 13. Application.

Déterminez des racines évidentes de $P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$.

Correction exercice 13

-2, -1 et 1.

Exercice 14. Application.

Déterminez des racines évidentes de $P(X) = X^3 + 9X^2 - 4X - 96$.

Correction exercice 14

-4, 3 et -8.

3 Trouver des racines et factoriser.

Proposition 2 Factorisation d'un polynôme.

Soient :

. P un polynôme,

. $\alpha \in \mathbb{R}$.

α est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$.

Démonstration 1

Démontrons par conditions nécessaire et suffisante.

1. Cette démonstration repose sur la division euclidienne de polynômes. Pour plus d'explications *confer infra*.

   Supposons que α est une racine de P et démontrons alors l'existence de Q.

   En procédant à la division euclidienne de P par $X - \alpha$ nous pouvons affirmer qu'il existe deux polynômes Q et R tels que : $P(X) = (X - \alpha)Q(X) + R(X)$ et R de degré strictement inférieur à 1.
   Autrement dit R est une constante. Puisque $\tilde{P}(\alpha) = 0$ nécessairement $R(\alpha) = 0$.
   Ainsi : $P(X) = Q(X)(X - \alpha)$.

   il existe donc bien un polynôme Q tel que
   $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$.

2. La réciproque est immédiate. En effet si $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ alors $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$, et donc α est une racine de P.

Remarques.

1. Si P est de degré n et que α en est une racine alors Q sera de degré $n - 1$. Ceci sera très utile dans les exercices qui suivent.
2. En tenant compte de la remarque précédente nous voyons qu'un polynôme de degré n ne peut pas avoir plus de n racines.
3. En particulier si un polynôme de degré deux admet une racine alors il en admet forcément une seconde. Le polynôme est alors un produit de deux polynômes de degré un.

Exemples.

1. 1 est une racine évidente de $X^3 + X - 2$. Et alors : $X^3 + X - 2 = (X - 1)(X^2 + X + 2)$.

Exercice 15.
Soit $P(X) = X^2 + 4X - 21$ un polynôme dont 3 est une racine. Donnez une expression factorisée de P par $X - 3$.

Correction exercice 15

Déterminons une expression factorisée de P.

Puisque 3 est une racine de P et que P est de degré deux il est possible de trouver un polynôme Q de degré 1 tel que : $P(X) = (X - 3)Q(X)$.

Autrement dit Q étant de degré 1, il est possible de trouver $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $P(X) = (X - 3)(aX + b)$.

Pour trouver les valeurs de a et b nous allons utiliser le fait que la forme développée d'un polynôme est unique. Trouvons la forme développée de P avec a et b.

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - 3)(aX + b) \\ &= aX^2 + bX - 3aX - 3b \\ &= aX^2 + (b - 3a)X - 3b \end{aligned}$$

Par identification avec la forme développée donnée dans l'énoncé :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = 4 \\ -3b = -21 \end{cases}$$

Donc $a = 1$ et $b = 7$.
Finalement

$$\boxed{P(X) = (X - 3)(X + 7).}$$

Exercice 16. Application.
Soit $P(X) = 3X^3 + 2X^2 - 7X + 2$ un polynôme dont -2 est une racine. Donnez une expression factorisée de P par $X + 2$.

Exercice 17. Application.
Soit $P(X) = 2X^3 - 20X^2 - 34X + 132$ un polynôme. Donnez une expression la plus factorisée possible de P.

4 Forme factorisée d'une fonction polynomiale de degré deux.

Définition 3

Nous dirons qu'une fonction polynomiale de degré deux f est donnée sous forme factorisée si son expression algébrique est sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

où a, b et c sont des nombres réels.

Exemples.

1. $2(X - 1)(X - 2)$ est une forme factorisée de polynôme de degré deux avec $a = 2$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
2. $-3\left(X - \frac{1}{3}\right)(X + 4)$.
3. $(X + 3)(X + 2)$.
4. $-(X + 1)(X + 2)$.
5. $(X - 2)^2$.
6. X^2.
7. $(X + 2)^2 + 1$.
8. $(X + 1)(X + 2)(X + 3)$.

Remarques.

1. Si $a \neq 0$ alors toute expression de la forme de $a(X - x_1)(X - x_2)$ est un polynôme de degré deux :

$$\begin{aligned} a(X - x_1)(X - x_2) &= a\left[X^2 - x_2X - x_1X + x_1x_2\right] \\ &= a\left[X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2\right] \\ &= aX^2 - a(x_1 + x_2)X + ax_1x_2 \end{aligned}$$

2. Nous déduisons en particulier du développement précédent que la nombre a apparaissant dans la formule factorisée est en fait le coefficient dominant de la fonction polynomiale de degré deux.
3. Il n'est pas toujours possible de factoriser une fonction polynomiale de degré deux. Exemple classique à connaître : $x \mapsto x^2 + 1$ n'a pas de forme factorisée.

Exercice 18.

Déterminez la forme développée des polynômes de degré deux dont la forme factorisée est donnée ci-dessous.

1. $3(X-1)(X-3)$.
2. $-2(X+2)(X+4)$.
3. $\frac{1}{2}(X+1)\left(X+\frac{4}{3}\right)$.

5 Factoriser pour trouver des racines.

La proposition précédente est une équivalence donc : si $P(X)=(X-\alpha)Q(X)$ alors α est une racine de P. Ainsi factoriser peut nous permettre de trouver des racines. Ce que nous avions déjà remarqué avec les équation produits.

Rappelons que pour factoriser nous pouvons essayer successivement : de trouver un facteur commun, de reconnaître une identité remarquable, de faire une factorisation d'abord partielle.

Exercice 19. ♥

Dans cet exercice α, β et γ désigne des nombres réels positifs (fixés). *Ces nombres sont uniquement là pour gêner la recherche de racines évidentes.*
Déterminez une racine des polynômes suivants.

1. $P(X)=3X^7-2\pi X^5+\alpha X^2$.
2. $Q(X)=9X^2+6X+1$.
3. $R(X)=\gamma^2+3X^2-2\sqrt{3}\gamma X$.
4. $S(X)=\beta^2-2X^2$.
5. $T(X)=X^{17}-81X^{15}$.

Correction exercice 19

1. $P(X)=X^2(3X^5-2\pi X^3+\alpha)$. Donc 0 est une racine.
2. $Q(X)=(3X+1)^2$. Donc $-\frac{1}{3}$ est une racine de Q.
3. $R(X)=(\sqrt{3}X-\gamma)^2$. Donc $\frac{\gamma}{\sqrt{3}}$ est une racine de R.
4. $S(X)=(\beta-\sqrt{2}X)(\beta+\sqrt{2}X)$. Donc $\frac{\beta}{\sqrt{2}}$ est une racine de S.
5. $T(X)=X^{15}(X^2-81)=X^{15}(X-9)(X+9)$. Donc 0, 9 et -9 sont des racines de T.

Exercice 20. Application.

Dans cet exercice α, β et γ désigne des nombres réels (fixés).
Déterminez une racine des polynômes suivants.

1. $P(X) = \alpha X + \frac{1}{4}X^2 + \alpha^2$.
2. $Q(X) = (X-1) + X^2 - 1$.
3. $R(X) = X^2 - \beta^2 + (X+\beta)X^5$.
4. $S(X) = (X^2 + X + 1)(X-2) - X^2(X-1)$.

Correction exercice 20

1. $P(X) = \left(\frac{1}{2}X + \alpha\right)^2$. Donc -2αest une racine de P.
2. $Q(X) = (X-1)(X+2)$. Donc 1 et -2 sont des racines de Q.
3. $R(X) = (X+\beta)(X^5 + X - \beta)$. Donc $-\beta$ est une racine de R.
4. $S(X) = -(X+2)$. Donc -2 est une racine de S.

6 Somme et produit de racines.

Par identification avec la forme développée, réduite et ordonnée, $P(X) = aX^2 + bX + c$ nous voyons que

$$b = -a(x_1 + x_2) \quad \text{et} \quad c = ax_1x_2.$$

Autrement dit, puisque $a \neq 0$,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ces formules nous permettrons, à partir de la connaissance d'une racine simple de retrouver l'autre.

Exercice 21. ♥

Résolvez l'équation $-12X^2 - 24X + 36 = 0$.

Correction exercice 21

Nous reconnaissons un polynôme de degré deux. Nous essayons de reconnaître une identité remarquable. Cela ne fonctionnant pas nous essayons une racine simple.

Notons P le polynôme de degré deux donnée sous forme développée avec : $a = -12$, $b = -24$ et $c = 36$.

Déterminons les racines de P.

Nous remarquons que $P(1) = 0$ donc $x_1 = 1$ est une racine de P.
Or

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

donc :

$$1 \times x_2 = \frac{36}{-12}$$

Enfin :

$$x_2 = -3$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{1; -3\}$.

Nous pourrions également trouver la forme factorisée de P : $P(x) = -12(X-1)(X+3)$.

Exercice 22. Application.

Résolvez l'équation $P(x) = 0$, puis donnez la forme factorisée de P dans les cas suivants.

1. $P(X) = 7X^2 - 7X - 14$.
2. $P(X) = -4X^2 + 12X$.
3. $P(X) = -3X^2 - 48X - 45$.
4. $P(X) = X^2 - 26X + 48$.
5. $P(X) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - 2$.
6. $P(X) = -5X^2 + 2X + 3$.
7. $P(X) = 4X^2 - 3X - 7$.
8. $P(X) = 2X^2 - 5X - 3$.
9. $P(X) = -2X^2 + 4\sqrt{7}X - 14$ après avoir calculé $P\left(\sqrt{7}\right)$.

<u>Correction exercice 22</u>

1. $P(X) = 7(X+1)(X-2)$.
2. $P(X) = -4(X-3)X$.
3. $P(X) = -3(X+1)(X+15)$.
4. $P(X) = (X-2)(X-24)$.
5. $P(X) = \frac{3}{2}(X+1)\left(X - \frac{4}{3}\right)$.
6. $P(X) = -5(X-1)\left(X + \frac{3}{5}\right)$.
7. $P(X) = 4(X+1)\left(X - \frac{7}{4}\right)$.
8. $P(X) = 2(X-3)\left(X + \frac{1}{2}\right)$.
9. $P(X) = -2(X - \sqrt{7})^2$.

7 Étude du signe d'une fonction polynomiale de degré deux.

Proposition 3

Soient :

. a, x_1 et x_2 des nombres réels avec $a \neq 0$ et $x_1 < x_2$,

. $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$ alors

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $a < 0$ alors

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	0	$-$	

Démonstration 2

Remarques.

1. Nous retiendrons la formulette suivante : le trinôme est du signe de son coefficient dominant saut entre ses racines. Nous nous en servirons pour justifier les signe et pour mémoriser le résultat.
2.

Exemples.

1.

8 Changement de variable.

Lorsqu'un polynôme est trop complexe il est parfois possible et intéressant de substituer à l'indéterminée X une autre indéterminée Y.

Exemples.

1. Si $P(X) = (X^3 + 1)^2 + 2(X^3 + 1) + 1$ alors, en posant $Y = X^3 + 1$ et en remplaçant dans l'expression de P : $Q(Y) = Y^2 + 2Y + 1$.
   Cela permet de simplifier la recherche de racines. En effet : $Q(Y) = (Y + 1)^2$ donc -1 est une racine de Q. Puisque $Y = X^3 + 1$, nous avons $X^3 = Y - 1$. Donc $-\sqrt[3]{2}$ est une racine de P.

Exercice 23.

1. En posant $Y = (2X)^2$ déterminez une racine de $P(X) = 4X^4 + 12X^2 + 9$.
2. En posant $Y = X + 3$ déterminez une racine de $Q(X) = (X+3)^3 - (X+3)^2 + (X+3) - 1$.

Exercice 24. Application.

1. En posant $Y = (2x+1)^2$ déterminez toutes les racines de $P(X) = (2X+1)^4 - 18$.
2. En posant $Y = 3X^2$ déterminez toutes les racines de $Q(X) = 9X^4 - 6X^2 + 1$.

9 Racines rationnelles.

(EN COURS)

III Factorisation de $X^n - a^n$ par $X - a$.

Exercice 25. Recherche.

L'objectif de cet exercice est de trouver une factorisation de $X^n - a^n$ par $X - a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit il faut trouver un polynôme Q tel que : $X^n - a^n = (X-a)Q(X)$.

Nous allons raisonner par disjonction des cas en distinguant suivant que $a = 0$ ou $a = 1$ ou une autre valeur. L'idée étant d'utiliser le résultat du cas $a = 1$ pour le cas général.

1. Que pensez-vous du résultat à démontrer dans le cas où $a = 0$.
2. Nous allons démontrer la réponse dans un cas particulier en supposant que $a = 1$.
   (a) Trouvez une factorisation de $X^n - 1$ par $X - 1$ pour $n = 0$, puis $n = 1$ et enfin $n = 2$.
   (b) On suppose maintenant $n \geqslant 3$.
   Développez, ordonnez puis réduisez $(X-1)(X^{n-1} + \cdots + X^2 + X + 1)$ et concluez.
3. Supposons maintenant que $a \in \mathbb{R}^*$.
   (a) Justifiez que $X^n - a^n = a^n\left[\left(\frac{1}{a}X\right)^n - 1\right]$.
   (b) Donnez une expression de $X^n - a^n$ en procédant au changement de variable $Y = \frac{1}{a^n}X$.
   (c) Déduisez-en la formule générale :
   $$X^n - a^n = (X-a)\left(X^{n-1} + aX^{n-2} + \cdots + a^{n-2}X + a^{n-1}\right).$$

Les exercices qui suivent utilisent la formule obtenue dans l'exercice précédent.

Exercice 26. Recherche.

Exercice 27. Recherche.

1. Nous souhaitons calculer $S = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{20}$.
   (a) D'après la question 2.(b) de l'exercice 22 combien vaut $(3-1)(3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^2 0)$?
   (b) Déduisez-en la valeur de S.
2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ induisez de la question précédente une expression fractionnaire de $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

IV Arithmétique des polynômes.

1 Divisibilité.

Nous dirons qu'un polynôme P est divisible par un polynôme D si et seulement si il existe un polynôme Q tel que : $P = QD$.

Nous avons déjà démontré que si α est une racine de P alors P est divisible par $X - \alpha$.

2 Division euclidienne.

Comme pour les entiers nous avons une division euclidienne.

Si P et D sont deux polynômes alors il existe des polynômes Q et R tels que : $P(X) = Q(X) \times D(X) + R(X)$ avec R de degré strictement inférieur à celui de Q.

Nous retrouvons les mêmes idées que pour la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$: D est le diviseur, Q le quotient, R le reste. Si le reste, R, est nul alors P est divisible par D sinon P n'est pas divisible par D.

3 Division en potence des polynômes.

Procédons sur un exemple : la division de $2X^2 - 3X + 4$ par $X + 1$.

En considérant les coefficients dominants nous remarquons que $2X^2 = 2X \cdot X$. Nous allons commencer par soustraire $2X(X+1) = 2X^2 + 2X$:

$$\begin{array}{rrr|ll}
2X^2 & -3X & +4 & X & +1 \\ \cline{4-5}
-(2X^2 & +2X) & & 2X & \\ \cline{1-2}
 & -5X & & &
\end{array}$$

Abaissons le monôme suivant :

$$\begin{array}{rrr|ll}
2X^2 & -3X & +4 & X & +1 \\ \cline{4-5}
-(2X^2 & +2X) & & 2X & \\ \cline{1-2}
 & -5X & +4 & &
\end{array}$$

En considérant les coefficients dominants nous remarquons que $-5X = -5 \cdot X$. Nous allons commencer par soustraire $-5(X+1) = -5X - 5$:

$$
\begin{array}{rrr|rr}
2X^2 & -3X & +4 & X & +1 \\
\cline{4-5}
-(2X^2 & +2X) & & 2X & -5 \\
\cline{1-2}
& -5X & +4 & & \\
& -(-5X & -5) & & \\
\cline{2-3}
& & 9 & &
\end{array}
$$

Ce que nous interpréterons avec l'égalité de la division euclidienne :

$$2X^2 - 3X + 4 = (X + 1)(2X - 5) + 9.$$

Nous avons ainsi démontré que $2X^2 - 3X + 4$ n'est pas divisible par $X + 1$. Ce qui peut encore se reformuler en -1 n'est pas racine de $2X^2 - 3X + 4$.

Exercice 28.
Procédez à la division euclidienne de $X^3 + 2X^2 - 7X + 1$ par $X^2 + 2X + 1$.

Exercice 29. Application.
Procédez à la division euclidienne de $-2X^3 + 4X + 12$ par $X^2 + 3$.

4 Ordre de multiplicité d'une racine.

Nous appellerons *ordre de multiplicité d'une racine* α d'un polynôme P, le plus grand entier m pour lequel P est divisible par $(X - \alpha)^m$.

En particulier si $m = 2$ alors nous dirons que α est une *racine double*.

Nous verrons une méthode analytique utilisant la dérivation pour déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine.

Exercice 30.
Démontrez que -7 est une racine de $P(X) = 2X^2 - 28X + 98$ dont l'ordre est 2.

Exercice 31. Application.
Démontrez que -2 est une racine de $P(X) = X^3 - 3X^2 - 24X - 28$ dont l'ordre est 2.

V Algorithme de Hörner.

Notamment pour les élèves suivant la spécialité NSI.

VI Exercices.

Exercice 32. Concours.

L'entreprise SAVEUR fabrique et commercialise de l'extrait de parfum. Elle est en capacité d'en produire jusqu'à 34 hectolitres par mois. On suppose que toute la production est vendue.

On modélise le coût de production mensuel, en centaines d'euros, de x hectolitres d'extrait de parfum par la fonction C définie par $C(x) = 2x^2 + 12x + 240$, où $x \in [0; 34]$.

Chaque hectolitre d'extrait de parfum est vendu 80 centaines d'euros.

1. (a) Calculer le coût de production mensuel et la recette réalisée par l'entreprise lorsqu'elle produit 6 hectolitres d'extrait de parfum dans le mois.
   (b) L'entreprise réalise-t-elle un profit lorsqu'elle produit et vend 6 hectolitres d'extrait de parfum par mois ?
2. Démontrer que le bénéfice, en centaines d'euros, pour la vente de x hectolitres d'extrait de parfum, est donné par la fonction B définie par :

$$B(x) = -2x^2 + 68x - 240.$$

3. Déterminez une forme factorisée de B.
4. Étudier le signe de $B(x)$, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 34]$, et en déduire la quantité d'extrait de parfum à produire et à vendre pour que l'entreprise ne travaille pas à perte.

Correction exercice 32

1. (a)

$$C(6) = 384$$

> Le coût de production mensuel pour 6 hectolitres est de 38 400 €.

Par proportionnalité la recette pour 6 hectolitres est

$$\begin{aligned} R(6) &= 6 \times 80 \\ &= 480 \end{aligned}$$

> La recette pour 6 hectolitres est de 48 000 €

(b)

$$\begin{aligned} R(6) - C(6) &= 480 - 384 \\ &= 96 \end{aligned}$$

Comme $R(6) - C(6) > 0$

L'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle produit et vend 6 hectolitre.

2. Déterminons l'expression de $B(x)$.

   Soit $x \in [0; 34]$.
   Puisque

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

   nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} B(x) &= (80x) - (2x^2 + 12x + 240) \\ &= 80x - 2x^2 - 12x - 240 \\ &= -2x^2 + 68x - 240 \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0; 34],\ B(x) = -2x^2 + 68x - 240.$$

3. Déterminons une expression factorisée de B.

   Les techniques usuelles (facteurs communs, identités remarquables, ...) ne donnent rien. Nous recherchons donc une racine évidente.
   Nous remarquons : $B(4) = 0$.
   Par conséquent le polynôme B et factorisable par $(X - 4)$. Donc il existe un polynôme Q de degré 1 (un de moins que B). Autrement dit il existe des nombres a et b tels que :

$$B(X) = (X - 4)(aX + b).$$

   Déterminons a et b.
   En développant la précédente de B :

$$\begin{aligned} B(X) &= aX^2 + bX - 4aX - 4b \\ &= aX^2 + (b - 4a)X - 4b \end{aligned}$$

Par identification des coefficients avec la forme développée de B obtenue à la question précédente :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b - 4a = 68 \\ -4b = -240 \end{cases}$$

Des première et troisième égalités nous déduisons : $a = -2$ et $b = 60$.
Finalement

$$\boxed{B(X) = (X - 4)(-2X + 60).}$$

4. Étudions le signe de B.

Nous avons, à la question précédente, trouvé une expression factorisée de B ce qui est toujours favorable à l'étude du signe. Commençons par étudier le signe de chacun des facteurs qui intervient dans l'expression factorisée de B.
J'en profite pour rappeler deux présentations et justifications pour l'étude du signe d'une fonction affine.

* $f : x \mapsto x - 4$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = -4$.
  $a > 0$ donc f est strictement croissante et de plus elle s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$. Un raisonnement géométrique sur la droite qui est sa courbe représentative permet alors de conclure quand à son signe.
*

$$\begin{aligned} -2x + 60 > 0 &\iff -2x > -60 \\ &\iff x < \frac{-60}{-2} \quad \text{car } -2 < 0 \\ &\iff x < 30 \\ &\iff x \in]-\infty; 30[\end{aligned}$$

De même : $-2x + 60 = 0 \iff x = 30$.
Le troisième cas possible $a - 2x + 60 < 0$ se déduit des deux précédents.
Nous avons ainsi le signe du facteur $-2x + 60$ suivant les valeurs de x.

x	0		4		30		34
$x - 4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+30$		$+$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour que l'entreprise réalise un profit elle doit vendre entre 4 et 30 hectolitre.

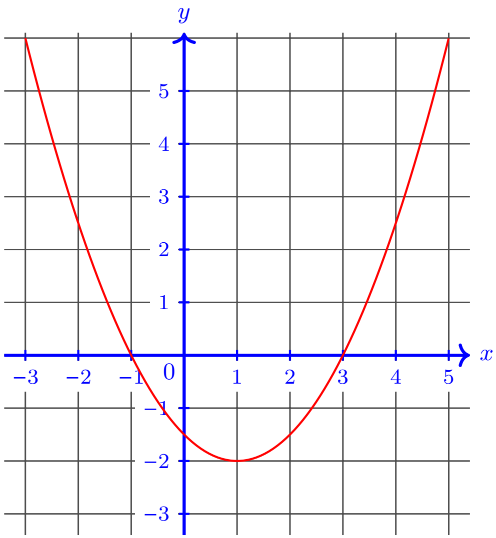
Exercice 33. Concours.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}.$$

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
2. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la fonction g.

Représentation graphique de la fonction g.



Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 2$. On laissera sur le graphique les traces de raisonnement.

3. On appelle x_1 la solution de l'équation $g(x) = 2$ appartenant à l'intervalle $[-2; -1]$ et x_2 la solution appartenant à l'intervalle $[3; 4]$. On cherche à déterminer un encadrement de x_2 d'amplitude 10^{-n}.

Pour cela on a écrit l'algorithme ci-dessous en langage Python.

```
def g(x):
    return 0.5*(x+1)*(x-3)
def balayage(n):
    x=3
    pas=10**(-n)
    while g(x)<2:
    x=x+pas
    return (x-pas,x)
```

Que faut-il taper dans la console pour obtenir un encadrement de x_2 d'amplitude 0,001 ?

Correction exercice 33

1. Déterminons une expression factorisée de g.

   En effet pour résoudre, algébriquement, une équation qui n'est pas de degré 1 nous essayons de nous ramener à une équation produit. Il n'y a ni facteur commun ni identité remarquable, nous recherchons donc des racines évidentes.

   Nous avons : $g(-1) = g(3) = 0$.

   Puisque g est de degré deux cela signifie qu'il existe un nombre réel a tel que : $g(X) = a(X+1)(X-3)$.

   En développant cette dernière expression nous avons

   $$g(X) = aX^2 - 2aX - 3a$$

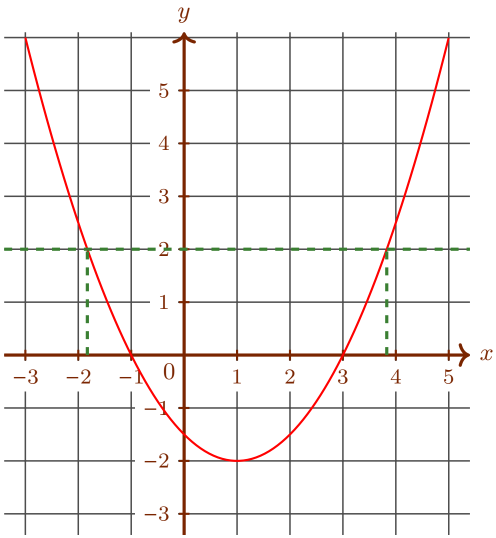
   Par identification avec la forme développée donnée dans l'énoncé nous en déduisons : $a = \frac{1}{2}$.

   Ainsi : $g(X) = \frac{1}{2}(X+1)(X-3)$.

   L'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$ est $\mathscr{S}_1 = \{-1; 3\}$.

2.

Représentation graphique de la fonction g.



L'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 2$ est $\mathscr{S}_2 = \{-1{,}8;\ 3{,}8\}$.

3.
```
>>> balayage(3)
```

Exercice 34. Concours.

En 2022, une entreprise de l'agroalimentaire bio prévoit de produire 60 000 tonnes d'un nouveau produit et de le vendre 800 € la tonne. On estime que toute la production sera vendue et que le coût total de production, en euros, de x tonnes de produit est

$$C(x) = 0{,}01x^2 + 250x + 2\,500\,000.$$

1. Exprimer la recette en euros pour x tonnes de produit vendues.
2. En déduire que le bénéfice en euros pour x tonnes de produit fabriquées et vendues est
$$B(x) = -0{,}01x^2 + 550x - 2\,500\,000,$$
pour tout x de $[0; 60\,000]$.
3. Recopiez et complétez le tableau de valeurs suivants :

x	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000
$B(x)$						

4. Déterminez une factorisation de $B(x)$.
5. Donnez le tableau de signe de B.
6. Quelle quantité de produit l'entreprise doit-elle produire et vendre pour réaliser un bénéfice ?

Correction exercice 34

1. Par proportionnalité la recette est en euro pour x tonnes vendues

$R(x) = 800x$ pour tout $x \in [0; 60000]$.

2. Déterminons le bénéfice.

$$\begin{aligned} B(X) &= R(X) - C(X) \\ &= 800X - (0{,}01X^2 + 250X + 2\,500\,000) \\ &= 800X - 0{,}01X^2 - 250X - 2\,500\,000 \\ &= -0{,}01X^2 + 550X - 2\,500\,000 \end{aligned}$$

3. Avec la calculatrice :

x	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000
$B(x)$	−1 960 000	−1 440 000	−940 000	−460 000	0	440 000

4. Déterminons une factorisation de B.

D'après la question précédente $B(5000))0$ et puisque B est un polynôme de degré deux il existe des réels a et b tels que :

$$B(X) = (X - 5000)(aX + b)$$

Autrement dit en développant :

$$B(X) = aX^2 + (b - 5000a)X - 5000b$$

Par identification avec la forme développée donnée à la question 2 :

$$\begin{cases} a = -0{,}01 \\ b - 5000a = 550 \\ -5000b = -2500000 \end{cases}$$

Nous en déduisons $a = -0{,}01$ et $b = 500$.

$$\boxed{B(X) = (X - 5000)(-0{,}01X + 500).}$$

5. Étudions le signe de B.

* $f : x \mapsto -0{,}01x + 500$ est une fonction affine avec $a = -0{,}01$ et $b = 500$.
  $a < 0$ donc f est strictement décroissante et de plus elle s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{500}{-0{,}01} = 50000$.
*

$$\begin{aligned} x - 5000 > 0 &\iff x > 5000 \\ &\iff x \in]5000; +\infty[\end{aligned}$$

De même : $x - 5000 = 0 \iff x = 5000$.

x	0		5 000		50 000		60 000
$-0{,}01x+500$		+		+	0	−	
$x - 5000$		−	0	+		+	
$B(x)$		−	0	+	0	−	

6. D'après le précédent tableau de signe

   Pour que l'entreprise réalise un profit elle doit vendre entre 5 000 et 50 000 tonnes.