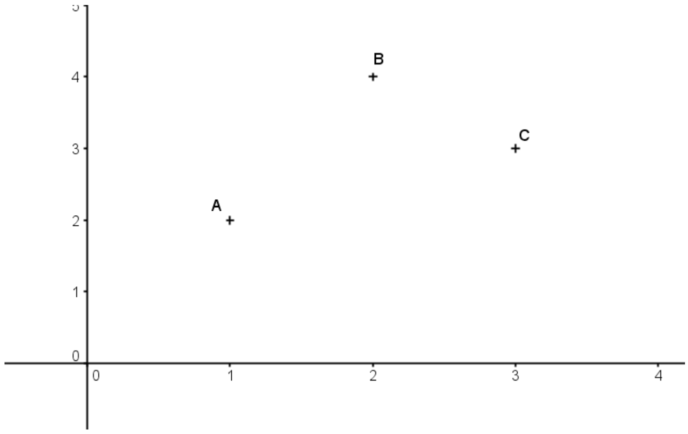
Polynômes — Interpolation de Lagrange

Exercice 1. —

1) Déterminer $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$P(1) = 2\,; \qquad P(2) = 4\,; \qquad P(3) = 3\,;$$

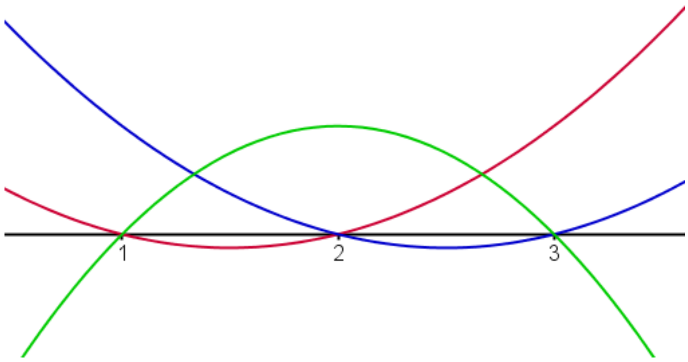
Ceci revient à déterminer l'équation de l'unique parabole passant par les points A, B et C.



2) a) Construire trois polynômes L_1, L_2 et L_3 de degré 2 tels que :

- L_1 s'annule en 2 et 3, et $L_1(1) = 1$;
- L_2 s'annule en 1 et 3, et $L_2(2) = 1$;
- L_3 s'annule en 1 et 2, et $L_3(3) = 1$.

b) Soit P le polynôme obtenu dans la question 1. Expliciter le polynôme $P(1)L_1 + P(2)L_2 + P(3)L_3$.



Les courbes représentatives de L_1 (en bleu), L_2 (en vert) et L_3 (en rouge).

c) Exprimer les polynômes $P = 1$, $Q = X + 2$ et $R = X^2 - X - 1$ comme combinaisons linéaires de L_0, L_1 et L_2.

d) Généraliser le résultat de la question précédente à un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.

e) Montrer l'existence (d'au moins) une bijection entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2. — **(Polynômes de Lagrange explicites, un autre exemple)**. Le but de cet exercice est de construire les polynômes de Lagrange "associés aux réels -1, 0 et 1". Dans cet exercice, tous les polynômes considérés seront dans $\mathbb{R}[X]$.

1) Construire trois polynômes L_0, L_1 et L_2 de degré 2 tels que : L_0 s'annule en 0 et 1, et $L_0(-1) = 1$; L_1 s'annule en -1 et 1, et $L_1(0) = 1$; et L_2 s'annule en -1 et 0, et $L_2(1) = 1$.
2) Montrer que $\{L_0, L_1, L_2\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
3) Exprimer les polynômes $P = 1$, $Q = X + 2$ et $R = X^2 - X - 1$ comme combinaisons linéaires de L_0, L_1 et L_2.

Exercice 3. — **(Polynômes de Lagrange - cas général)**. Soit n un entier naturel non-nul, et soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ $(n+1)$ éléments de $\mathbb{K}$. Pour tout entier i compris entre 1 et n, on pose :

$$L_i(X) = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$$

1) Quel est le degré de L_i (pour tout entier i compris entre 0 et n) ?
2) Vérifier que pour tout entier i entre 0 et n on a : $L_i(\alpha_i) = 1$ et $L_i(\alpha_j) = 0$ si $i \neq j$.
3) Soit P un polynôme quelconque de $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer que :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(\alpha_i)\, L_i(X)$$