Équations différentielles.

Les élèves n'ayant pas vu les nombres complexes introduction avec la résolution des trinômes dans le cas complexe. Approche naïve écriture des racines négatives.
Par exemple $x^2 + 1 = 0$.
Puis $x^2 + x + 1 = 0$.

Dans cette leçon nous avons adopter un parti-pris, celui de ne considérer que des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

I Généralités.

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue n'est pas un nombre mais une fonction et éventuellement ses dérivées successives.

Les fonctions sont souvent notées y dans les équations différentielles.

La fonction *exponentielle* est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du *problème de Cauchy* (une équation différentielle et une condition initiale)

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Il existe un très grand nombre d'équations différentielles. Un vocabulaires spécifique a donc été développé pour les distinguer et développer des méthodes de résolutions spécifiques.

L'*ordre* désigne l'ordre de dérivation de y. Par exemple $y' = y$ est d'ordre 1 et $y'' + y' + y = 0$ est d'ordre 2.

Les *équations différentielles linéaires* du premier ordre sont les équations de la formes $\alpha y' + \beta y = \gamma$, où α, β et γ sont des fonctions.

Les *équations différentielles linéaires* du second ordre sont les équations de la formes $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = h$, où α, β, γ et h sont des fonctions.

Une équation différentielle linéaire est dite *homogène* (ou sans second membre) si elle est de la forme $\alpha y' + \beta y = 0$ (ordre un) ou $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$ (ordre deux).

II Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle.

Exercice 1. ♥

On considère l'équation différentielle $(E) : 2y' - 3y = 6$. Dites si la fonction f est solution de (E) dans les cas suivants :

1. $f : x \to \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + 2$
2. $f : x \to \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} - 2$
3. $f : x \to \frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x+1} - 3\right)$
4. $f : x \to \frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x+1} - 3\right)$

Correction exercice 1

1.

$$f'(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$$

donc :

$$\begin{aligned}2f'(x) - 3f(x) &= 2\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - 3\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + 2\right)\\ &= 3\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - 3\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - 6\\ &= -6\end{aligned}$$

f n'est pas solution de l'équation différentielle.

2.

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$$

Donc :

$$\begin{aligned}2f'(x) - 3f(x) &= 2 \times \left(-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}\right) - 3\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - 2\right)\\ &= -\frac{15}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + 6\end{aligned}$$

3.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned}2f'(x) - 3f(x) &= 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x+1} - 3\frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x+1} - 3\right)\\ &= 6\end{aligned}$$

4.

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2f'(x) - 3f(x) &= -2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x+1} - 3\frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x+1} - 3\right) \\ &= -4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x+1} + 6 \end{aligned}$$

Exercice 2. Application.

La solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -\dfrac{1}{4}y$ vérifiant la condition initiale $y(0) = \mathrm{e}$ est :

1. $y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x+1}$
2. $y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$
3. $y(x) = \mathrm{e}^{-4x+1}$
4. $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}x+1}$.

Correction exercice 2

1. $y'(x) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x+1}$ et $y(0) = \mathrm{e}$.
2. $y'(x) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ et $y(0) = 1$.
3. $y'(x) = -4\mathrm{e}^{-4x+1}$.
4. $y'(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x+1}$.

Exercice 3. Application.

Une solution de l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = 5$ est :

1. $y(x) = 5\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{5}{3}$
2. $y(x) = 3\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{5}{3}$
3. $y(x) = 5\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{5}{3}$
4. $y(x) = 3\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{5}{3}$

Correction exercice 3

1. $y'(x) = 15e^{3x}$.

$$\begin{aligned} y'(x) - 3y(x) &= 15e^{3x} - 3\left(5e^{3x} + \frac{5}{3}\right) \\ &= 15e^{3x} - 15e^{3x} - 5 \\ &= -5 \end{aligned}$$

2. $y'(x) = 9e^{3x}$.

$$\begin{aligned} y'(x) - 3y(x) &= 9e^{3x} - 3\left(5e^{3x} - \frac{5}{3}\right) \\ &= 9e^{3x} - 15e^{3x} + 5 \\ &= -6e^{3x} + 5 \end{aligned}$$

3. $y'(x) = 15e^{3x}$.

$$\begin{aligned} y'(x) - 3y(x) &= 15e^{3x} - 3\left(5e^{3x} - \frac{5}{3}\right) \\ &= 15e^{3x} - 15e^{3x} + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

4. $y'(x) = 9e^{3x}$.

$$\begin{aligned} y'(x) - 3y(x) &= 9e^{3x} - 3\left(3e^{3x} + \frac{5}{3}\right) \\ &= 9e^{3x} - 9e^{3x} - 5 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Exercice 4. Application.

Une solution de l'équation différentielle $y' = -3y + 4e^{-2x}$ est :

1. $y(x) = e^{-3x} + \frac{4}{3}e^{2x}$
2. $y(x) = 4e^{-3x} - 1$
3. $y(x) = 4e^{-3x} - \frac{1}{3}$
4. $y(x) = 4e^{-2x}$

Correction exercice 4

1. $y'(x) = -3e^{-3x} + \frac{8}{3}e^{2x}$.

$$\begin{aligned} -3y(x) + 4e^{-2x} &= -3\left(e^{-3x} + \frac{4}{3}e^{2x}\right) + 4e^{-2x} \\ &= -3e^{-3x} - 4e^{2x} + 4e^{-2x} \end{aligned}$$

2. $y'(x) = -12e^{-3x}$.

$$\begin{aligned} -3y + 4e^{-2x} &= -3\left(4e^{-3x} - 2\right) + 4e^{-2x} \\ &= -12e^{-3x} + 6 + 4e^{-2x} \end{aligned}$$

3. $y'(x) = -12e^{-3x}$.
4. $y'(x) = -8e^{-2x}$.

$$\begin{aligned} -3y(x) + 4e^{-2x} &= -3\left(4e^{-2x}\right) + 4e^{-2x} \\ &= -12e^{-2x} + 4e^{-2x} \\ &= -8e^{-2x} \\ &= y'(x) \end{aligned}$$

III Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants normalisées.

Définition.

Définition 1

Nous appellerons l'*équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants normalisée* toute équation différentielle de la forme

$$y' + ay = b$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Remarques.

1. Si $a = -1$ l'équation devient $y' = y$. Nous reconnaissons l'équation définissant la fonction exponentielle.

2. L'expression *normalisée* signifie que le coefficient de la fonction inconnue la plus dérivée est 1.
3. Nous dirons qu'une équation différentielle linéaire est *homogène* lorsque tous les termes contiennent la fonction inconnue ou ses dérivées. En particulier il n'y pas de termes constant. Ainsi : $y' - 3y = 2$ n'est pas homogène à cause du 2 par contre $y' - 3y = 0$ est homogène.

Résolution de l'équation homogène.

Théorème 1

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + ay = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$, est formé des fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = k\mathrm{e}^{-ax}$$

où k décrit $\mathbb{R}$.

Démonstration 1

La démonstration se fait en deux temps (double inclusion) :

1. Si une fonction est de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{-ax}$ alors c'est une solution de l'équation différentielle.
2. Si y est une solution de l'équation différentielle alors la dérivée de $y(x).\mathrm{e}^{ax}$ est nulle et donc y est bien de la forme $K\mathrm{e}^{-ax}$.

Exercice 5. ♥

Résolvez l'équation différentielle $6y' - 5y = 0$.

Correction exercice 5

Résolvons l'équation $(E_0)\quad y' - \frac{5}{6}y = 0$.

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients constants normalisée et homogène donc l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{\frac{5}{6}x} \mid k \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Exercice 6. ♥

Nous remarquons ici qu'en ajoutant une condition initiale ou aux limites nous obtenons une unique solution à l'équation linéaire homogène d'ordre un à coefficients constants. C'est un résultat général qui est connu comme le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Déterminez la solution de l'équation différentielle $-2y' = 7y$ qui prend la valeur -3 en 2.

Correction exercice 6

Résolvons l'équation $(E_0) \quad y' + \frac{7}{2}y = 0$ sachant que $y(2) = -3$.

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients constants normalisée et homogène donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}x} \mid k \in\right.$

Or $y(2) = -3$ donc :

$$k\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}\times 2} = -3$$

Ceci équivaut successiement à :

$$\begin{aligned} k\mathrm{e}^{-7} &= -3 \\ k &= -3\mathrm{e}^{7} \end{aligned}$$

Le problème admet une unique solution : $x \mapsto -3\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}x+7}$.

Résolution de l'équation avec second membre.

Théorème 2

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto k\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a}$ où k décrit $\mathbb{R}$.

Remarques :

1. $x \mapsto \frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y'+ay = b$. Nous dirons que les solution de l'équation avec second membre sont la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation (avec second membre).

Exercice 7. ♥
Résolvez l'équation différentielle $3y' - y = 2$.

Exercice 8. Application.
Déterminez la solution de l'équation différentielle $-2y' + 4y = 7$ dont la courbe représentative dans un repère cartésien passe par le point A de coordonnées $(-1; 1)$.

IV Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Définition.

Définition 2

Nous appellerons *équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants* toute équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$.

Équation homogène.

Théorème 3

Soient :

. $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$,

. $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$,

. $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

- Si (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

- Si (E) admet une unique solution r_0, alors

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto (Ax + B)\mathrm{e}^{r_0 x} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

- Si (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, alors

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 9. ♥

Résolvez les équations différentielles suivantes

1. $4y'' - 3y' - y = 0$.
2. $4y'' - 4y' + y = 0$
3. $y'' + y' + y = 0$

Exercice 10. ♥

Résolvez $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}_+$ est fixé.

Correction exercice 10

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 0^2 - 4 \times 1 \times \omega^2 \\ &= -(2\omega)^2\end{aligned}$$

$\Delta < 0$ donc il y a deux racines complexes conjuguées :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-0 - i\sqrt{(2\omega)^2}}{2 \times 1} \\ &= i\omega \end{aligned}$$

Et de même : $r_2 = -i\omega$.

Donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\cos(\omega x) - B\sin(\omega x)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}$.

Les physiciens préfèrent une autre présentation de cette solution : $x \mapsto x_m \cos(\omega x + \varphi)$. Cette autre façon de présenter les solutions découle de l'utilisation de la formule trigonométrique $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et de l'écriture du couple (A,B), interprété comme des coordonnées cartésiennes, avec des coordonnées polaires.

Exercice 11. ♥

Déterminez la fonction f solution de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0$ telle que $f(0) = 3$ et $f'(0) = -2$.

L'équation avec second membre.

Comme pour les équations du premier ordre les solutions de l'équation avec second membre sont les sommes des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

Exercice 12. ♥

Dans chaque cas vérifiez que f_0 est une solution de l'équation avec second membre et déduisez-en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

1. $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)\mathrm{e}^x$ et $f_0 : x \mapsto (x^2 + 4x + 7)\mathrm{e}^x$.
2. $y'' + y = \cos^3(x)$ et $f_0 : x \mapsto \frac{3}{8}x\sin(x) - \frac{1}{32}\cos(3x)$.

V Exercices.

Exercice 13.

Déterminez l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $5y' - 2y = 0$
2. $5y'' + 3y' - 2y = 0$
3. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
4. $y'' - 6y' + 13y = 0$

Exercice 14.

Dans chacun des cas suivants déterminez la fonction f solution de l'équation différentielle donnée et vérifiant la (ou les) condition(s) donnée(s).

1. $5y' + 2y = 0$ et $f\left(\frac{5}{2}\right) = 3\mathrm{e}$
2. $y' + 3y = 6$ et $(\mathcal{C}_f)$ passe par le point $A\left(\frac{-1}{3}; 2 + 5\mathrm{e}\right)$.
3. $y'' - 3y' + 2y = 0$; $(\mathcal{C}_f)$ passe par le point $A(0; -1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4.

VI Exercices.

Exercice 15.

Bac de la Réunion 1985.

1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
$$y'' + y = 0 \quad (1).$$
2. Étant donnée une fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Exprimer f'' à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et x.
3. On considère l'équation différentielle
$$y'' = -\frac{1}{x^4}y \quad (2).$$
   Démontrer que la fonction g, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ est solution de (2) si et seulement si la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$$
   est solution de (1).
4. En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
5. Soit g une solution de (2) définie sur $]0; +\infty[$.
   Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction :
$$x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x).$$
   Calculer l'intégrale :
$$J = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \, \mathrm{d}x.$$