Ensemble des nombres complexes.

I Généralités.

Historique.

D'abord introduit par Cardan comme une astuce de calcul, les racines carrées de nombres négatifs furent appelés des nombres imaginaires.

Il furent utilisés pour résoudre des équations.

Argan trouva leur application à la géométrie. Ils occupèrent dès lors une place de plus en plus importante.

Il furent ensuite appelés nombres complexes par Gauss.

Euler introduisit la notation $i = \sqrt{-1}$.

Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$.

La construction de $\mathbb{C}$ se fait à partir de $\mathbb{R}$ en considérant les coordonnées de points : le "nombre" (x,y) est noté $x + iy$. En particulier i est noté $(0,1)$.

Puis sont introduites les opérations.

$$(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$$
$$(x,y) \times (x',y') = (xx' - yy',xy' + yx')$$

Le *module* du nombre complexe $z = (x,y)$, noté $|z|$, s'interprète alors comme la distance euclidienne entre les points de coordonnées (x,y) et $(0,0)$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le *conjugué* du nombre complexe $z = (x,y)$ est $\overline{z} = (x, - y)$.

Si $z = (x,y)$, x est appelé la *partie réelle* et y la *partie imaginaire* de z.

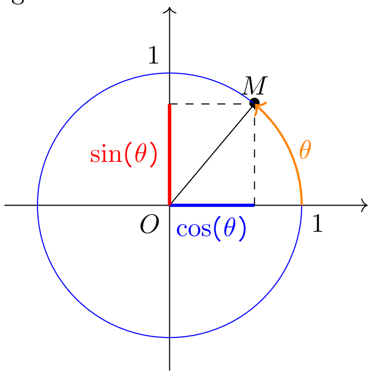
Interprétation géométrique.

Par construction $x + iy$ s'interprète comme le point du plan de coordonnées (x,y).

En fait, si O est l'origine du repère et $M(x,y)$, $x+iy$ peut aussi bien s'interpréter comme les coordonnées de M que comme les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$. $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M = x + iy$ est alors appelé l'affixe de z.

Notre construction utilise un système de coordonnées cartésiennes, mais en utilisant un système de coordonnées polaires, si $M(x,y)$ a pour coordonnées polaires

(ρ,θ) alors $x + iy = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta)$. Dans ce cas $\rho = |z|$ et θ est appelé un argument de z.



$\cos\theta$ est donc l'abscisse de M tandis que $\sin\theta$ est son ordonnée.

D'après le théorème de Pythagore

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Soient A, B, C et D des points du plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

$\left(\vec{i},\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)$

$AB = |z_B - z_A|$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Formule d'Euler.

En usant d'autres moyens de définir ou calculer les fonctions exponentielles, cosinus et sinus il est possible d'établir la formule d'Euler

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta}.$$

Ce qui équivaut aux *formules d'Euler*

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$$

Nous en déduisons aisément la *formule de Moivre*.

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Exercice 1.

Soit n un entier naturel non nul. Calculez lorsque x est un nombre réel, $S_1 + iS_2$ où

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Déduisez-en :

$$S_1 = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et

$$S_2 = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

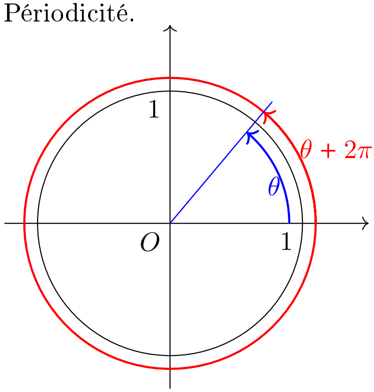
Valeurs remarquables.

θ en degrés	0	30	45	60	90
θ en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Formulaire de trigonométrie.

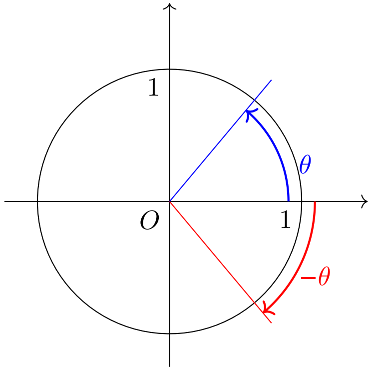
En raisonnant sur le cercle trigonométrique nous retrouvons aisément les formules suivantes.

Périodicité.



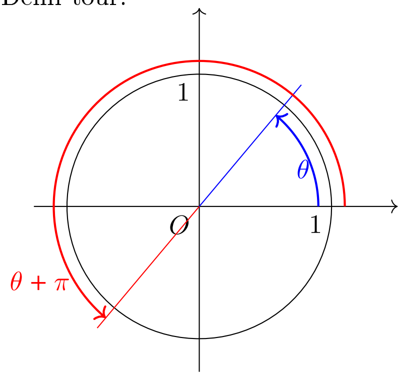
$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$$
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

Parité.



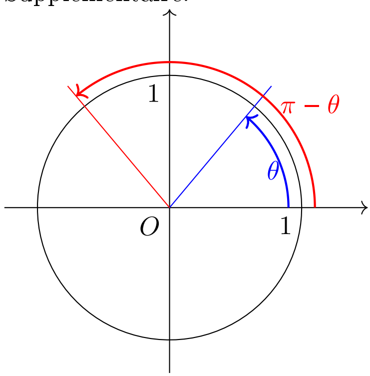
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Demi-tour.



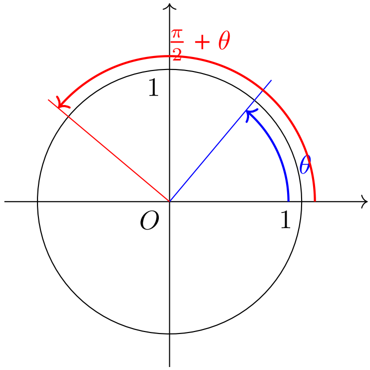
$$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi+x) = -\sin(x)$$

Supplémentaire.



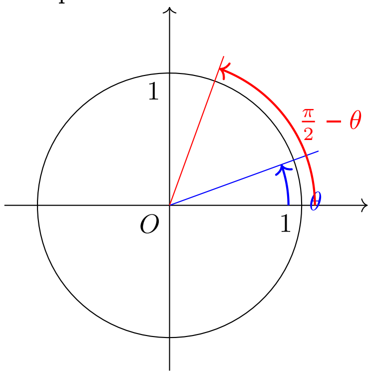
$$\cos(\pi-x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi-x) = \sin(x)$$

Quart de tour.



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin(\theta)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos(\theta)$$

Complémentaire.



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin(\theta)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos(\theta)$$

Formules d'addition.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(b)\sin(b)$$

Exercice 2.

1. Calculez $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en utilisant la formule d'addition.
2. De $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ déduisez les valeurs de sinus et de cosinus $\frac{\pi}{12}$.

Formules de linéarisation.

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2}\\ \sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2}\\ \cos(x)\sin(x) &= \frac{1}{2}\sin(2x)\end{aligned}$$

Exercice 3.
Déterminez sans calcul le maximum sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.

Résolution d'équations trigonométriques.

$$\cos(a) = \cos(b) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ a = \pm b + 2k\pi$$

$$\sin(a) = \sin(b) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$$

Exercice 4.
Résolvez les équations

1. $\cos(2\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $1 + 2\sin(3\theta) = 0$.

Exercice 5.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Déterminez les entiers n pour lesquels le point M d'affixe $\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)^n$ appartient à l'axe $(O,\vec{u})$.

II Formulaire sur les nombres complexes.

En utilisant la construction axiomatique de $\mathbb{C}$ il est possible d'établir les résultats suivants.

Soit $z = x + iy = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta) = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

— $x + iy$ est appelé la forme algébrique,
— $|z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta)$ est appelé la forme trigonométrique,
— $|z|\mathrm{e}^{i\theta}$ est appelé la forme exponentielle.

Les résultats sur les arguments se retrouvent aisément en utilisant la forme exponentielle.

$$
\begin{aligned}
z+\overline{z} &= 2\mathrm{Re}(z) & z-\overline{z} &= 2i\mathrm{Im}(z)\\
|z| &= \sqrt{x^2+y^2} & |z|^2 &= z\overline{z}\\
|\overline{z}| &= |z| & \arg(\overline{z}) = -\arg(z) &\mod 2\pi\\
|zz'| &= |z|\cdot|z'| & \arg(zz') = \arg(z)+\arg(z') &\mod 2\pi\\
|z^n| &= |z|^n,\ (n\in\mathbb{N}) & \arg(z^n) = n\arg(z) &\mod 2\pi\ (n\in\mathbb{N})\\
\left|\frac{z}{z'}\right| &= \frac{|z|}{|z'|} & \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z)-\arg(z') &\mod 2\pi
\end{aligned}
$$

III Racines carrées d'un nombre complexe.

Exercice 6.

Nous souhaitons déterminer les racines carrées complexes de $1+3i$.
On suppose que $z = x+iy$ est une racine carrée complexe de $1+3i$.

1. Calculez x^2+y^2.
2. De $(x+iy)^2 = 1+3i$ déduisez x^2-y^2 et $2xy$.
3. Déduisez des questions précédentes les solutions du problème.

Exercice 7.

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2+(3+i)z+\frac{7}{4}+i\frac{3}{4} = 0$$

IV Des sous-ensembles remarquables.

Définition 1

Nous dirons qu'une partie G de $\mathbb{C}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}$, en notant$*$ l'opération $+$ ou $\times$, si :

(i) G est non vide,

(ii) il existe un élément neutre $e\in G$ tel que : $\forall x\in G$, $x*e = x$,

(iii) G est stable par la loi $*$: $\forall x,y\in G$, $x*y\in G$,

(iv) les éléments de G sont inversibles : quelques soit le nombre $x\in G$ il est possible de trouver un nombre $y\in G$ tel que $x*y = e$.

Par exemple $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{R},+)$ sont des sous-groupes de $\mathbb{C}$.

Exercice 8.

Démontrez que les ensembles munis d'une loi suivants sont des groupes.

1. $\left(\left\{\mathrm{e}^{-i\frac{k}{n}2\pi} \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\},\times\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$. *Ensemble des racines n-ième de l'unité.*
2. $(\mathbf{M}_n(\mathbb{R},+)$. *Ensemble des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}$.*
3. $(\mathbb{R}[X],+)$. *Ensemble des polynômes.*

V Nombres complexes et géométrie.

Distance, angles, vecteurs et points.

Lieux géométriques.

Exercice 9.

On considère les points A, B, C, D, S et T d'affixes respectives : $a = -2+4i$; $b = -4+2i$; $c = 4+2i$; $d = -2+2i+6\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$; $s = 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $t = -2+2i$.

1. Placez les points et complétez la figure au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrez que la droite (ST) est la médiatrice du segment $[AB]$.
3. On considère que les points P et Q milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$, déterminer p et q les affixes respectives des points P et Q.
4. Calculez la forme algébrique des complexes $\frac{t-p}{q-s}$ et $\frac{d-c}{b-a}$. Que peut-on en déduire ?
5. Que représente le point T pour le triangle PQS ? Le démontrer.
6. Déterminez l'affixe du point R tel que $ABSR$ soit un parallélogramme.

Transformation du plan.