Les sommes finies.

I Symbole de sommation discret.

Il s'agit d'un symbole important que nous retrouverons aussi bien en probabilité qu'en algèbre linéaire.

$$\sum_{k=1}^{5} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$$

f est une formule de calcul (une fonction par exemple).
k est une variable qui prend des valeurs entières.
1 est la première valeur prise par k.
5 est la dernière valeur prise par k.
k doit prendre toutes les valeurs entières de 1 jusqu'à 5.

Exercice 1.

Écrivez les calculs suivants sans le symbole de sommation $\sum$ puis calculez.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} k$,
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} 2k$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} 2k+1$,
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^2$,
5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{3} k^3$,
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 2k^2+1$.

Correction exercice 1

1. $\sum_{k=0}^{5} k = 0+1+2+3+4+5 = 15.$
2. $\sum_{k=0}^{5} 2k = 2\times 0 + 2\times 1 + 2\times 2 + 2\times 3 + 2\times 4 + 2\times 5 = 30.$
   Ou : $\sum_{k=0}^{5} 2k = 2\sum_{k=0}^{5} k = 2\times 15 = 30$
3. $\sum_{k=0}^{5} 2k+1 = 2\times 1 + 1 + 2\times 2 + 1 + 2\times 3 + 1 + 2\times 4 + 1 + 2\times 5 + 1 =$
   Ou : $\sum_{k=0}^{5} 2k+1 = \left(\sum_{k=0}^{5} 2k\right) + \left(\sum_{k=0}^{5} 1\right) = 30+6.$
4. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2+2^2+3^2 = 14.$
5. $\sum_{k=2}^{3} k^3 = 2^3+3^3 = 35.$
6. $\sum_{k=1}^{3} 2k^2+1 = 2\left(\sum_{k=1}^{3} k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{3} 1\right) = 2\times 14 + 3 = 31.$

Exercice 2.

1. Calculez $\sum_{k=1}^{4}(-1)^k$.
2. Calculez $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$, pour n un entier naturel non nul quelconque.

Correction exercice 2

1. $\sum_{k=1}^{4}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$.
2. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \frac{1-(-1)^n}{2}$.

On peut remarquer l'analogie entre cette somme discrète, $\sum$, et la somme continue, $\int$, appelée intégrale vue en terminale.

$$\sum_{k=1}^{5} f(k) \leftrightarrow \int_{1}^{5} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Essayons maintenant, à partir d'une somme détaillée de retrouver la formule avec le symbole $\sum$.

Nous pourrons procéder en trois étapes.

1. Identifier les différents termes de la somme,
2. Identifier ce qui ne change pas d'un terme à l'autre et qui constituera la formule de calcul répétée.
3. Reconnaître dans la partie variable l'entier qui augmente de 1 en 1.

Exercice 3.

Écrivez les sommes suivantes de façon symbolique.

1. $A = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$.
2. $B = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$.
3. $C = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$.
4. $D = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720$.
5. $E = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{1\,000\,000} + \frac{1}{100\,000\,000}$.
6. $F = 1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + 7 + \frac{1}{8} + 9 + \frac{1}{10}$.

Exercice 4.

Réécrivez les calculs suivants avec un symbole de sommation $\sum$.

1. $S_1 = \frac{2}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{4^2}$
2. $S_2 = 1 + \cos(\sqrt{2}) + \cos(2\sqrt{2}) + \cos(3\sqrt{2}) + \cos(4\sqrt{2}) + \cos(5\sqrt{2})$,
3. $S_3 = \ln(3) + \ln(5) + \ln(7) + \ln(9) + \cdots + \ln(27) + \ln(31)$,
4. $S_4 = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 3 \times 4$,
5. $S_5 = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6$,
6. $S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125$.

II Les classiques.

Somme des premiers entiers naturels.

Exercice 5.

Démontrez que quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Correction exercice 5

Démonstration par récurrence sur n.

Notons $P(n)$:« $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

* Vérifions que $P(1)$ est vraie.

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{1} k = 1 \\ \frac{1(1+1)}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2}$$

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=0}^{n} k$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= n+1+\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2}\\ &= \frac{(2+n)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Autrement dit $P(n+1)$ est vraie.

* Nous avons établi par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme des carrés.

Exercice 6.

Démontrez que quelque soit $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

Correction exercice 6

Démonstration par récurrence sur n.

Notons $P(n)$:« $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$ ».

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

* Vérifions que $P(1)$ est vraie.

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{1} k = 1 \\ \frac{(2\times1+1)(1+1)1)}{6} = 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{1} k^2 = \frac{(2\times1+1)(1+1)1)}{6}$$

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

D'une part :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n} k^2$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} \\ &= \frac{6(n+1)^2 + (2n+1)(n+1)n}{6} \\ &= \frac{6n^2 + 12n + 6 + (2n^2 + 3n + 1)n}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\frac{(}{2(n+1)+1)((n+1)+1)(n+1)}6 &= \frac{(2n+3)(n+2)(n+1)}{6} \\ &= \frac{(2n^2+7n+6)(n+1)}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 7n^2 + 6n + 2n^2 + 7n + 6}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}\end{aligned}$$

Des deux points précédents nous déduisons par transitivité que $P(n+1)$ est vraie.

* Nous avons établi par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

Somme des cubes.

Exercice 7.

Démontrez que quelque soit $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Somme des termes d'une suite géométrique.

Exercice 8.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Nous souhaitons démontrer que quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrivez
$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$$
en détaillant la somme.
2. Développez l'expression obtenue à la question précédente.
3. En remarquant un télescopage des termes simplifiez l'expression précédente.

Formule du binôme de Newton.

Il s'agit d'une formule très riche d'applications.

Exercice 9.

Soient a et b des réels, n un entier naturel non nul.
Démontrez que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Formule de Bernoulli.

Exercice 10.

Nous souhaitons établir la formule de Bernoulli pour a et b des nombres réels

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$

1. Vérifiez cette formule pour $n = 0$ puis $n = 1$. Quel résultat retrouvez-vous ?
2. En développant le membre de droite mettez en évidence des simplifications (télescopage) et démontrez la formule.

III Exercices.

Exercice 11.

Le pi majuscule de l'alphabet grec, $\prod$, joue pour le produit le même rôle que $\sum$ pour la somme.

Démontrez que quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{k=0}^{n} 2^{k^2} = \left(\mathrm{e}^{(2n+1)(n+1)n}\right)^{\frac{\ln(2)}{6}}$$

Exercice 12.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs.

Montrez que si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$, alors pour tout $n \in [\![1,n]\!]$, $a_k = 0$.

Exercice 13.

Calculez les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} i$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 3$.
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i - 1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
3. $\displaystyle\sum_{i=4}^{n+1} i$, avec $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

Exercice 14.

Démontrez que $0{,}999\cdots = 1$.

Exercice 15.

On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Déterminez le terme général de $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Calculez $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 16.

Calculez, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Exercice 17.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$. *Vous pourrez calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Exercice 18.

1. Démontrez que quelque soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+1}$.
2. Déduisez-en pour $n \geqslant 2$ un entier naturel, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)}$.

Exercice 19.

Calculez pour $n \in \mathbb{N}^*$,

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$,
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$,
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)}$.

Exercice 20.

Calculez $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ pour n$\in \mathbb{N}^*$.

IV Concours général.

Sujet 2018 exercice 1 partie A.