Interrogation du 12/09/2024. 25 minutes.

1. Démontrez que la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$.

   Déduisez-en les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Question bonus à faire à la fin mais utile pour la démonstration par récurrence.

   Démontrez que $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

4. Déduisez-en la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

1. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + x + 1$.
   u et v étant dérivables sur $\mathbb{R}$ et v ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ (polynôme de degré deux de discriminant strictement négatif), f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
   Or $u' = 1$ et $v'(x) = 2x + 1$ donc, pour tout x réel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x^2 + x + 1) - x \times (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + x + 1 - 2x^2 - x}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + x + 1)^2} \end{aligned}$$

   Ainsi f' est du signe de $(1 - x)(1 + x)$ et donc

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} + 1} \\
&= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n^2+n+1}{n^2}} \\
&= \frac{n}{n^2 + n + 1} \\
&= \frac{1}{n + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\tfrac{1}{n}\right) \leqslant \tfrac{1}{n+1}.}
$$

3. Démontrons par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

   * Hérédité.

     Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{k}$.

Démontrons que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{1}{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence :

$$0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{k}$$

Par croissance de f

$$f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f\left(\frac{1}{k}\right)$$

Par définition de la suite :

$$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant f\left(\frac{1}{k}\right)$$

D'après la question 2

$$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{1}{k+1}$$

* Initialisation. Démontrons que $0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{1}$.

D'une part $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{1}{3}$ et d'autre part $\frac{1}{1} = 1$ donc $0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{1}$.

* Conclusion.

  Nous avons démontré l'initialisation et l'hérédité donc

  $$\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

4. $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes

   $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$