Interrogation du 05/09/2024. 25 minutes.

EXERCICE 1.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0,7$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

On admet que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs.

Enfin on note $f(x) = \dfrac{3x}{2x+1}$.

1. Démontrez que $f'(x) = \dfrac{3}{(2x+1)^2}$ puis déduisez-en les variations de f sur $[0, +\infty[$.
2. Démontrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

EXERCICE 2.

Déterminez la limite en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{n^7\sqrt{n}}{\dfrac{1}{n^2} - 5}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = 2x + 1$.

   u et v étant dérivables sur $\mathbb{R}$ et v ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ (racine $-\frac{1}{2}$), f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

   Or $u' = 3$ et $v'(x) = 2$ donc, pour tout x réel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3 \times (2x+1) - 3x \times 2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{3}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

   Ainsi f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et donc

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

2. Démontrons par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

   * Hérédité.

     Soit $k \in \mathbb{N}$.

     Supposons $u_k \leqslant u_{k+1}$.

Démontrons que $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$.

Par hypothèse de récurrence :

$$u_k \leqslant u_{k+1}$$

Par croissance de f

$$f(u_k) \leqslant f(u_{k+1})$$

Par définition de la suite :

$$u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$$

* Initialisation. Démontrons que $u_0 \leqslant u_1$.

  D'une part $u_0 = 0,7$ et d'autre part $u_1 = f(u_0) = 0,875$ donc $u_0 \leqslant u_1$.

* Conclusion.

  Nous avons démontré l'initialisation et l'hérédité donc

$$\boxed{u_n \leqslant u_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

3. * $\lim_{n\to+\infty} n^7 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc par produit : $\lim_{n\to+\infty} n^7\sqrt{n} = +\infty$.

* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc, par somme, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} - 5 = -5$.
* Par quotient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^7\sqrt{n}}{\frac{1}{n^2}-5} = -\infty.}$$