

BAC BLANC.

EXERCICE 1

1A1

0,5 def suite(n):
 u = 3
 for i in range(n):
 u = 4 / (5 - u)
 return u.

1A2

0,5
$$u_1 = \frac{4}{5-3} = 2$$
$$u_2 = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3}$$

donc suite(2) renvoie 1,33333

1A3

0,5 $(u_n)_{n \geq 0}$ semble décroître et converger vers 1

1B1

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 4$ et $v(x) = 5 - x$.

u et v sont dérivables sur $] -\infty; 5[$ et v ne s'annule pas sur $] -\infty; 5[$ donc f est dérivable sur $] -\infty; 5[$ et:

0,25
$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

On $u'(x) = 0$ et $v'(x) = -1$ donc, pour tout $x \in]-\infty; 5[$,

0,25
$$f'(x) = \frac{0 \times (5-x) - 4 \times (-1)}{(5-x)^2}$$

0,25
$$= \frac{4}{(5-x)^2}$$

Comme $(5-x)^2 > 0$ pour tout $x \in]-\infty; 5[$,
 $f' > 0$ sur $]-\infty; 5[$ et donc
0,25 f est strictement croissante.

1B2

0,25 Démontrons que " $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ " pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

* Hérité.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons que : $1 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 4$.

0,25 réc 0,25 Démontrons que : $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 4$.

f est croissante sur $[1; 4]$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$f(1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4)$$

i.e.

$$1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 4$$

* Initialisation.

0,25 $u_0 = 3$ et $u_1 = 2$ donc $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$.

* Conclusion.

Pour avons démontré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$

1 B 3 a

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{4}{5-x} = x$$

$$\Leftrightarrow 4 = x(5-x) \quad \text{car } 5-x > 0$$

$$\Leftrightarrow 4 = 5x - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

0,25

Ainsi:

$$\forall x \in]-\infty; 5[, \quad f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$$

1 B 3 b

D'après la question précédente les solutions de $f(x) = x$ sont celles dans $]-\infty; 5[$ de $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Or $x^2 - 5x + 4$ est un polynôme de degré 2 qui admet deux racines distinctes: 1 et 4, donc

0,75

$f(x) = x$ admet deux solutions dans $]-\infty; 5[$, à savoir 1 et 4.

1 B 4

Puisque: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$ (d'après 1 B 2), $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

Puisque, d'après 1 B 2, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 4$, $(u_n)_{n \geq 0}$ est minorée par 1.

0,5

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée
 $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers un
réel $l \in [1; 4]$.

f étant continue, d'après le théorème du point fixe,
le vérifie: $f(l) = l$.

D'après 1B3b: $l \in \{1; 4\}$.

$(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et $u_1 < 4$ donc, nécessairement:

0,5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

1B5

Si $u_0 = 4$ alors $u_1 = 4$ et par une récurrence
immédiate on montrera que:

0,5

$(u_n)_{n \geq 0}$ est constante égale à 4.

EXERCICE 2

2I1

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \end{cases}$$

0,25

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

donc, par composition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0.$$

0,25

Par sommation:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^{-2x} = +\infty.$$

0,25

$$* \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

donc, par composition: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$

0,25

Enfin, par produit puis somme:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - e^{-2x} = -\infty.$$

2I2

0,5

f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 + 2e^{-2x}$$

$e^{-2x} > 0$ donc $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$.

f est strictement croissante.

0,5

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2I3

0,25

* f est continue sur $\mathbb{R}$,

~~0,25~~

* f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

0,25

* $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

0,25

il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Avec la calculatrice :

0,25 donc $f(0,42) < 0$ et $f(0,43) > 0$
 $\alpha \approx 0,42$ à 10^{-2} près par défaut.

2 II 4

On déduit des questions précédentes :

0,5

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

2 II 1 a

$h = \sqrt{u}$ où $u(x) = x^2 + e^{-2x}$

u est à valeurs positives et ne s'annule pas, de plus u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

0,5

Or $u'(x) = 2(x - e^{-2x})$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

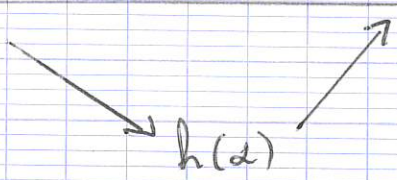
$$h'(x) = \frac{2(x - e^{-2x})}{2\sqrt{x^2 + e^{-2x}}}$$

$$h'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + e^{-2x}}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2 II 1 b

h' est du signe de f donc

0,5

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h			

ainsi h admet un minimum en α et donc, puisque $g(x) = e^{-x}$,

$A(\alpha; e^{-\alpha})$ est le point de $\mathcal{C}$ qui réalise une distance minimale à O .

0,25 placer A

2. II 2 a

$$g'(x) = -e^{-x} \text{ donc } g'(\alpha) = -e^{-\alpha}.$$

0,5

Le coefficient directeur de T est $-e^{-\alpha}$.

2 II 2 b

Le produit des coefficients directeurs de T et (OA) est :

$$-e^{-\alpha} \times \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} = -\frac{e^{-2\alpha}}{\alpha}$$

$$\text{Or } f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = e^{-2\alpha} \text{ donc :}$$

0,5

$$-e^{-\alpha} \times \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} = -1.$$

ainsi (OA) et T sont perpendiculaires

0,25 tracer les droites.

~~2 II 25~~

EXERCICE 3

3 A1

* La trottinette est en bon état lors de sa mise en service donc:

0,25

$$p_1 = 0,9.$$

* Calculons p_2 .

$\{B_1, \bar{B}_1\}$ est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales:

$$IP(B_2) = IP(B_1 \cap B_2) + IP(\bar{B}_1 \cap B_2).$$

$IP(B_1) \neq 0$ et $IP(\bar{B}_1) = 1 - IP(B_1) = 0,1 \neq 0$, donc,

d'après la formule des probabilités composées:

0,5

$$IP(B_2) = IP(B_1) \underset{B_1}{IP}(B_2) + IP(\bar{B}_1) \underset{\bar{B}_1}{IP}(B_2)$$

$$= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4$$

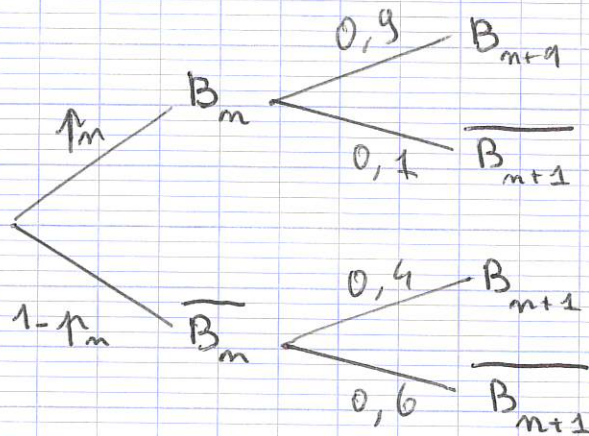
$$= 0,85.$$

Enfin, puisque $p_2 = IP(B_2)$,

$$p_2 = 0,85.$$

3 A 2

0,5



3 A 3

Justifions la formule de récurrence de (p_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$p_{n+1} = IP(B_{n+1}).$$

$\{B_n, B_n\bar{}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales:

0,5

$$p_{n+1} = IP(B_n) IP_{B_n}(B_{n+1}) + IP(\bar{B}_n) IP_{\bar{B}_n}(B_{n+1})$$

$$= p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,4$$

$$= 0,9 p_n + 0,4 - 0,4 p_n.$$

Enfin: $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = 0,5 p_n + 0,4.$

3 A 4 a

Démontrons par récurrence que " $p_n \geq 0,8$ " pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* Initialisation.

Montrons: $p_1 \geq 0,8$.

On a déjà vu que $p_1 = 0,9$ et donc on a $p_1 \geq 0,8$.

* Hérité.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $p_k \geq 0,8$. Démontrons qu'alors $p_{k+1} \geq 0,8$.

0,5

Partons de l'hypothèse de récurrence:

$$p_k \geq 0,8$$

On en déduit successivement:

$$0,5 p_k \geq 0,5 \times 0,8 \quad \text{car } 0,5 > 0$$

$$0,5 p_k + 0,4 \geq 0,4 + 0,4$$

$$p_{k+1} \geq 0,8.$$

* Conclusion.

Nous avons démontré par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = 0,5 p_n + 0,4.$$

3 A 4 b

0,25

Il y a 80% de chance, au moins, qu'une trottinette soit en bon état.

3 A 5 a

Montrons que (p_n) est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,8 \\ &= 0,5 p_n + 0,4 - 0,8 \\ &= 0,5 p_n - 0,5 \times 0,8 \\ &= 0,5 (p_n - 0,8) \\ &= 0,5 u_n \end{aligned}$$

0,5

Ainsi: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,5 u_n$.

~~3A1~~ Autrement dit:

$(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de terme initial $u_0 = 0,2$ et de raison $q = 0,5$.

3A5b

* Déterminons une formule explicite de $(u_n)_{n \geq 0}$.

$(u_n)_{n \geq 0}$ étant géométrique:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n.$$

i.e.

0,25

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0,5^n \times 0,2$$

* Déterminons une formule explicite de $(p_n)_{n \geq 0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = p_n - 0,8 \Leftrightarrow p_n = u_n + 0,8$$

$$\Leftrightarrow p_n = 0,2 \cdot 0,5^n + 0,8.$$

0,25 $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = 0,2 \cdot 0,5^n + 0,8.$

3 A 5 c

Étudions la convergence de $(p_n)_{n \geq 0}$.

Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$.

0,25 En sommant: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2 \cdot 0,5^n + 0,8 = 0,8$.

Enfin: $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,8$.

3 B 1

Justifions: $X \hookrightarrow B(15; 0,8)$.

* Choisir une trottinette est une épreuve de Bernoulli dont le succès est "la trottinette est en bon état" et de paramètre $p = 0,8$.

0,5 * On répète à l'identique et de façon indépendante $n = 15$ fois la précédente épreuve de Bernoulli, nous avons donc un schéma de Bernoulli.

* X compte le nombre de succès du schéma de Bernoulli donc: $X \hookrightarrow B(15; 0,8)$.

3 B 2

Calculons $IP(X=15)$.

$X \subset B(15; 0,8)$ donc :

$$IP(X=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

0,25

$$IP(X=15) = \binom{15}{15} 0,8^{15} (1-0,8)^{15-15}$$

$$IP(X=15) \approx 0,0352$$

3 B 3

Calculons $IP(X \geq 10)$.

$$IP(X \geq 10) = 1 - IP(\overline{X \geq 10})$$

$$= 1 - IP(X < 10)$$

$$= 1 - IP(X \leq 9) \text{ car } X \in [0; 15]$$

0,25

Avec la calculatrice :

$$IP(X \geq 10) \approx 0,9389$$

3 B 4

$E(X) = 12$ signifie :

si on recommençait un grand nombre de fois le choix des 15 trotinettes, en moyenne, on obtient 12 trotinettes en bon état parmi les 15

0,25

EXERCICE 4

4.1 a

$$\lim_{-\infty} f = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} f = 1 \quad \text{donc } \mathcal{G}_f$$

0,75 admet des asymptotes horizontales
d'équations $y = 5$ et $y = 1$.

L'affirmation 1 est fausse.

4.1 b

* Puisque f est décroissante sur $] -\infty, -2[$ et $\lim_{-\infty} f = 5$, $f \leq 5$ sur $] -\infty, -2[$.

0,75 Par conséquent: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 5 = 0^-$

* Par quotient: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x) - 5} = \infty$.

L'affirmation 2 est fausse.

4.2 a

g est un produit de fonctions dérivables donc est dérivable et.

$$g'(x) = (-x+1)e^{-x}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow (-x+1)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x+1 = 0 \quad \text{car } e^{-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_g$ admet une unique tangente horizontale au point d'abscisse 1.

0,75

L'affirmation 3 est vraie.

4-2b

$$x - g(x) = x(1 - e^{-x})$$

Or $1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x$
donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x		0	+
$1 - e^{-x}$		0	+
$x - g(x)$		0	+

0,75

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq x$.

L'affirmation 4 est vraie.

