BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2024/2025

BAC BLANC n°1

MATHÉMATIQUES

Spécialité Maths

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES **COEFFICIENT : 16**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/6 à 6/6 .

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Chaque exercice choisi devra être rédigé sur une copie distincte.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (*6 points*) **Polynésie 19 juin 2024 -** Sujet 1

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.

Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante suite(n) qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de suite(2) renvoie 1.3333333333333333.
Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$
3. (a) Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
Prouver l'équivalence suivante :
$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0$$
(b) Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
Déterminer sa limite.
5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

Exercice 2 (*6 points*) **Métropole 13 septembre 2021 J2**

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$, on appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

La courbes $\mathcal{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathcal{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $(t\,;\,\mathrm{e}^{-t})$ de la courbe $\mathcal{C}$.
On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$, c'est-à-dire

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

(a) Montrer que, pour tout nombre réel t,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}$$

où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

(b) Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\,;\,\mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathcal{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.
Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.

(a) Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.
On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.
On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :
Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.

(b) Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.
Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.**

Exercice 3 (*5 points*) Centres étrangers groupe 1 - 13 mars 2023

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers.
Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

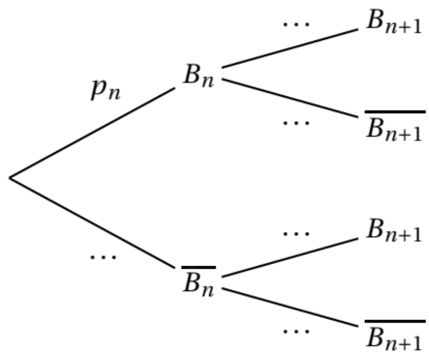
On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9 ;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est 0,4.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0{,}85$.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4$.

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0{,}8$.
(b) À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?

5. (a) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0{,}8$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
(b) En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.
(c) En déduire la limite de la suite (p_n).

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à 0,8.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.

4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter le résultat.

Exercice 4 (*3 points*) Sujet Secours Métropole 2024 J1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\ \{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↘	1

(a) Affirmation 1 :

La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe C_f de la fonction f.

(b) Affirmation 2:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{f(x) - 5} \right) = +\infty$$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

(a) Affirmation 3 :

La courbe représentative de g admet une unique tangente horizontale.

(b) Affirmation 4 :

Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;\ 2[$, on a $g(x) \leqslant x$.

Annexe à rendre avec la copie

Annexe de l'exercice 2